ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Л. А. Власенко, А. Г. Руткас, А. А. Чикрий

Изучается игровая задача сближения для системы, динамика которой описывается стохастическим дифференциальным уравнением в гильбертовом пространстве. Основное ограничение на уравнение состоит в том, что оператор при состоянии системы является генератором сильно непрерывной полугруппы (полугруппы класса C_0). Решения уравнения представляются с помощью стохастической формулы вариации постоянных. С использованием ограничений на опорные функционалы множеств, которые определяются поведением преследователя и убегающего, получены условия приведения состояния системы на цилиндрическое терминальное множество. Результаты иллюстрируются на модельном примере простого движения в гильбертовом пространстве при случайных возмущениях. Рассматриваются приложения к распределенным системам, описываемым стохастическими уравнениями в частных производных. С учетом случайного внешнего воздействия исследуется процесс распространения тепла с управляемыми распределенными тепловыми источниками и утечками.

Ключевые слова: дифференциальная игра, стохастическое дифференциальное уравнение, винеровский процесс, производящий оператор сильно непрерывной полугруппы, многозначное отображение, опорный функционал, разрешающий функционал, стохастическое уравнение в частных производных.

L. A. Vlasenko, A. G. Rutkas, A. A. Chikrii. On a differential game in a stochastic system.

We study the game problem of approach for a system whose dynamics is described by a stochastic differential equation in a Hilbert space. The main assumption on the equation is that the operator multiplying the system state is the generator of a strongly continuous semigroup (a semigroup of class C_0). Solutions of the equation are represented by a stochastic formula of variation of constants. Using constraints on the support functionals of sets defined by the behavior of the pursuer and the evader, we obtain conditions for the approach of the system state to a cylindrical terminal set. The results are illustrated with a model example of a simple motion in a Hilbert space with random perturbations. Applications to distributed systems described by stochastic partial differential equations are considered. By taking into account a random external influence, we consider the heat propagation process with controlled distributed heat sources and leaks.

Keywords: differential game, stochastic differential equation, Wiener process, generator of a strongly continuous semigroup, set-valued mapping, support functional, resolving functional, stochastic partial differential equation.

MSC: 49N70, 47D03, 65C30

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-45-61

Введение

Уральская научная школа в области математической теории управления и теории динамических игр, основанная Николаем Николаевичем Красовским, является крупнейшим научным центром, хорошо известным среди специалистов. Исследования Н. Н. Красовского [1–5], созданные им фундаментальные методы стали основой для дальнейшего продвижения в этой области, осуществляемого его учениками и последователями (см., например, [6–8]). Ряд математических понятий, введенных в научный оборот уральскими учеными, стали ключевыми для многих научных работ. Такие термины, как позиционные дифференциальные игры, стабильные мосты, седловая точка в маленькой игре, правило экстремального прицеливания, экстремальный сдвиг, альтернатива, программные итерации, управление с поводырем активно используются специалистами. Одним из важнейших направлений исследований екатеринбургской научной школы являются стохастические дифференциальные игры. Подчас конфликт между противоборствующими сторонами осложняется влиянием различного рода случайных помех, что обуславливает рассмотрение конфликтно-управляемых случайных процессов. Изучению подобного рода проблем посвящен цикл работ Н. Н. Красовского, В. Е. Третьякова и их учеников [9–13].

Обзор по теории стохастических дифференциальных игр можно найти в книге [14]. Эти игры относятся к сосредоточенным системам, состояния которых описываются стохастическими дифференциальными уравнениями в конечномерных пространствах. Однако в ряде областей физики и техники динамика изучаемых процессов описывается стохастическими дифференциальными уравнениями в частных производных, как, например, при исследовании дифференциальных игр в [15]. В настоящей работе рассматриваются дифференциальные игры в распределенных системах, описываемые стохастическими дифференциально-операторными уравнениями, а также стохастическими уравнениями в частных производных, которые трактуются как стохастические дифференциальные уравнения в гильбертовых или банаховых пространствах. В статьях [16; 17] мы показали, как метод разрешающих функций [18; 19] распространяется на детерминированные распределенные системы. Это распространение получило название "метод разрешающих функционалов". Для применения метода принципиальным является представление решения уравнения, допускающее аддитивное вхождение члена с начальными данными и блока управления. При определенных ограничениях на операторные коэффициенты уравнения такое представление дает стохастическая формула вариации постоянных.

Будем использовать следующие обозначения.

Y, U, V, H — вещественные сепарабельные гильбертовы пространства;

$\|\cdot\|_Y$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$ — соответственно норма и скалярное произведение в пространстве Y;

$\mathcal{L}(H,Y)$ — пространство ограниченных линейных операторов из H в Y, $\mathcal{L}(Y)=\mathcal{L}(Y,Y)$;

E — единичный оператор;

$L_2 = L_2(0,T;Y)$ — пространство интегрируемых по Бохнеру с квадратом нормы на $[0,T]$ Y-значных функций;

$W_2^k(0,T;Y)$ — пространство функций из $L_2(0,T;Y)$, у которых обобщенные производные до порядка k включительно принадлежат пространству $L_2(0,T;Y)$;

K^* — сопряженный оператор к оператору K.

В силу теоремы Петтиса [20] в сепарабельных пространствах понятия сильной и слабой измеримости эквивалентны. Поэтому в дальнейшем будем употреблять термин "измеримость".

Пусть $\{\Omega,\mathcal{F},P\}$ — полное вероятностное пространство с неубывающим семейством σ-алгебр (потоком или фильтрацией) $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$, $\mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}$, $0\le s\le t\le T$. Через $\boldsymbol{M}$ обозначаем математическое ожидание относительно вероятностной меры P. Рассматриваем H-значный винеровский процесс $w(t)=w(t,\omega)$ на $[0,T]$, выходящий из нуля и согласованный с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}$, с ядерным симметричным положительным ковариационным оператором W, как в [21]. Через $\mathrm{tr}W$ обозначаем след оператора W. Имеем $\boldsymbol{M}w(t)=0$ и $\boldsymbol{M}\|w(t)\|_H^2=\mathrm{tr}W\cdot t$. Заметим, что в [22] рассматривался винеровский процесс с единичным ковариационным оператором, т. е. цилиндрическим винеровским процессом [23]. Обозначим через $L_2(0,T;\Omega;Y)=L_{2,\Omega}$ гильбертово пространство Y-значных измеримых случайных процессов $y(t,\omega)$, $0\le t\le T$, $\omega\in\Omega$, удовлетворяющих условию $\int_0^T \boldsymbol{M}\|y(t,\omega)\|_Y^2dt<\infty$, со скалярным произведением $\langle y_1,y_2\rangle_{L_{2,\Omega}}=\int_0^T\boldsymbol{M}\langle y_1(t),y_2(t)\rangle_Y dt$. Подпространство пространства $L_{2,\Omega}$, состоящее из $\mathcal{F}_t$-согласованных случайных процессов, обозначим через $L_2(0,T;\Omega;Y;\mathcal{F}_t)$.

Пусть $\mathcal{H}_2(\Omega;Y)=\mathcal{H}_2$ — гильбертово пространство Y-значных случайных величин $\xi=\xi(\omega)$, которые имеют конечный абсолютный момент второго порядка $\boldsymbol{M}\|\xi\|_Y^2<\infty$, со скалярным произведением $\langle\xi_1,\xi_2\rangle_{\mathcal{H}_2}=\boldsymbol{M}\langle\xi_1,\xi_2\rangle_Y$. Если $\mathcal{F}_0$ — σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{F}$, то $\mathcal{H}_2(\Omega;Y;\mathcal{F}_0)$ обозначает подпространство пространства $\mathcal{H}_2$, состоящее из $\mathcal{F}_0$-измеримых случайных величин.

1. Постановка задачи и вспомогательные сведения

Динамика системы описывается стохастическим дифференциально-операторным уравнением в смысле Ито:

$$dy(t) = Ay(t)dt + [K_1u(t) - K_2v(t)]dt + \Lambda dw(t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{1.1}$$

Относительно уравнения (1.1) предполагаем: замкнутый линейный оператор $A : D_A \subset Y \to Y$ порождает сильно непрерывную полугруппу $S(t)$ в Y (полугруппу класса C_0), область определения D_A оператора A плотна в Y; $K_1 \in \mathcal{L}(U, Y)$, $K_2 \in \mathcal{L}(V, Y)$, $\Lambda \in \mathcal{L}(H, Y)$; управления преследователя $u(t)$ и убегающего $v(t)$ суть случайные процессы $u(t, \omega) \in L_2(0, T; \Omega; U; \mathcal{F}_t)$ и $v(t, \omega) \in L_2(0, T; \Omega; V; \mathcal{F}_t)$. Стохастическое уравнение (1.1) также формально записывается в виде

$$y'(t) = Ay(t) + K_1u(t) - K_2v(t) + \Lambda w'(t),$$

где $w'(t)$ — обобщенная производная H-значного винеровского процесса, т. е. белый шум. Для уравнения (1.1) рассматриваем начальное условие

$$y(0) = \xi, \tag{1.2}$$

где $\xi = \xi(\omega) \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y; \mathcal{F}_0)$. Если в (1.1) оператор Λ нулевой ($\Lambda = 0$), а $u(t)$ и $v(t)$ — неслучайные управления, то мы получаем уравнение

$$y'(t) = Ay(t) + K_1u(t) - K_2v(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.3}$$

которое описывает детерминированную конфликтно-управляемую систему, как, например, в [16;17;24]. Его решения могут быть случайными процессами только за счет выбора случайного вектора $\xi = \xi(\omega)$ в начальном условии (1.2).

Решением начальной задачи (1.1), (1.2) назовем случайный процесс $y(t) \in L_2(0, T; \Omega; Y; \mathcal{F}_t)$ такой, что $Ay(t) \in L_2(0, T; \Omega; Y; \mathcal{F}_t)$ и выполняется равенство

$$y(t) - \xi = \int\limits_0^t Ay(\tau)d\tau + \int\limits_0^t [K_1u(\tau) - K_2v(\tau)]d\tau + \Lambda w(t), \quad \text{п.в.} \ \ t \in [0, T], \quad \omega \in \Omega.$$

Единственность решения начальной задачи (1.1), (1.2) будем понимать в смысле стохастической эквивалентности. Из определения следует, что случайный процесс $y(t, \omega)$ имеет непрерывную модификацию с вероятностью единица. Мы будем рассматривать непрерывную модификацию этого процесса. Нам понадобится вспомогательный результат о разрешимости стохастической начальной задачи (1.1), (1.2). Утверждение следующей леммы является стохастическим аналогом детерминированной формулы вариации постоянных из монографии [25, гл. 4, теорема 2.9].

Лемма 1. *Пусть оператор A является генератором C_0-полугруппы, значения случайной величины $\xi(\omega) \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y; \mathcal{F}_0)$ принадлежат D_A, $\mathrm{Im}K_1 \subset D_A$, $\mathrm{Im}K_2 \subset D_A$, $\mathrm{Im}\Lambda \subset D_A$, $u(t) \in L_2(0, T; \Omega; U; \mathcal{F}_t)$, $v(t) \in L_2(0, T; \Omega; V; \mathcal{F}_t)$. Тогда с точностью до стохастической эквивалентности существует единственное решение $y(t)$ задачи* (1.1), (1.2), *которое задается стохастической формулой вариации постоянных с помощью полугруппы $S(t)$*:

$$y(t) = S(t)\xi + \int\limits_0^t S(t-\tau)[K_1u(\tau) - K_2v(\tau)]d\tau + \int\limits_0^t S(t-\tau)\Lambda dw(\tau), \quad \textit{п.в.} \ \ t \in [0, T], \quad \omega \in \Omega. \tag{1.4}$$

Результаты, подобные лемме 1, можно найти в [21; 22]. При их доказательстве используются свойства стохастического интеграла (третьего слагаемого) в правой части формулы (1.4). Этот интеграл называют стохастической конволюцией [23]. В случае аналитической полугруппы $S(t)$ утверждение леммы применялось при исследовании стохастического оптимального управления в [26; 27]. Если рассматривать винеровский процесс с единичным ковариационным оператором, то дополнительно нужно потребовать, чтобы операторы Λ и $A\Lambda$ являлись операторами Гильберта — Шмидта (ср. с [22, гл. VII, теорема 2.2]).

Управлениям $u(t)$ и $v(t)$ отвечает решение $y(t) = y(t; u, v)$ начальной задачи (1.1), (1.2), существование и единственность которого гарантируют условия леммы 1. Всюду в дальнейшем будем предполагать выполнение этих условий. Подобно детерминистической ситуации в работах [16–18; 24], определим цель игры в стохастической системе (1.1), (1.2). *Допустимыми управлениями преследователя* $u(t)$ *и убегающего* $v(t)$ являются случайные процессы $u(t) \in L_2(0, T; \Omega; U, \mathcal{F}_t)$ и $v(t) \in L_2(0, T; \Omega; V, \mathcal{F}_t)$, принимающие значения из областей управления U_0 и V_0, которые предполагаются замкнутыми выпуклыми ограниченными множествами в пространствах случайных величин $\mathcal{H}_2(\Omega; U)$ и $\mathcal{H}_2(\Omega; V)$. Множества допустимых управлений преследователя и убегающего обозначим соответственно через U_1 и V_1. Понятно, что U_1 и V_1 — выпуклые замкнутые ограниченные множества в $L_2(0, T; \Omega; U, \mathcal{F}_t)$ и $L_2(0, T; \Omega; V, \mathcal{F}_t)$. Под целью игры в детерминированной системе (1.3), (1.2) понимают приведение состояния $y(t)$ на некоторое цилиндрическое терминальное множество $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \oplus \mathfrak{M}_1$ за конечное время в классе допустимых управлений преследователя при любом допустимом управлении убегающего. Здесь $\mathfrak{M}_0$ — замкнутое линейное подпространство в Y, $\mathfrak{M}_1$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество из ортогонального дополнения $\mathfrak{M}_0^{\perp}$ к $\mathfrak{M}_0$ в Y. В дальнейшем будем пользоваться тем фактом, что выпуклое замкнутое ограниченное множество в гильбертовом пространстве является слабо компактным [20, разд. 2.9, 2.10]. Принимая во внимание, что решение стохастической системы есть случайный процесс, терминальное множество определим в пространстве Y-значных случайных величин:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{B}_d, \tag{1.5}$$

где $\mathfrak{H}_0$ — замкнутое линейное подпространство в $\mathcal{H}_2(\Omega; Y)$; $\mathfrak{B}_d$ — замкнутый шар из ортогонального дополнения $\mathfrak{H}_0^{\perp}$ к $\mathfrak{H}_0$ в $\mathcal{H}_2(\Omega; Y)$ с центром в нуле и радиуса d. Если $d = 0$, то $\mathfrak{B}_d = \{0\}$. Обозначим через $\Pi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2(\Omega; Y))$ ортопроектор в $\mathcal{H}_2(\Omega; Y)$ на $\mathfrak{H}_0^{\perp}$. Теперь следует дать определение того, что состояние $y(t)$ стохастической системы (1.1), (1.2) может быть переведено на стохастическое терминальное множество $\mathfrak{H}$ (1.5) в момент времени T_0, не превосходящий T. *Игру в системе* (1.1), (1.2) *можно завершить за время* T_0, если для любого допустимого управления убегающего $v(t) \in V_1$ найдется допустимое управление преследователя $u(t) \in U_1$, для которого $\|\Pi y(T_0; u, v)\|_{\mathcal{H}_2} \le d$.

2. Условия разрешимости стохастической дифференциальной игры

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполняются условия леммы 1, гарантирующие существование и единственность решения стохастической задачи (1.1), (1.2). Нетрудно видеть, что игру в системе (1.1), (1.2) можно завершить за время T_0 тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\sup_{v \in V_1} \inf_{u \in U_1} \|\Pi y(T_0; u, v)\|_{\mathcal{H}_2} \le d.$$

Подразумевается, что время T является достаточно большим, так что $T \ge T_0$. Для доказательства достаточности этого неравенства воспользуемся тем, что непрерывный выпуклый функционал $f(u) = \|\Pi y(T_0; u, v)\|_{\mathcal{H}_2}$, определенный на гильбертовом пространстве $L_2(0, T; \Omega; U, \mathcal{F}_t)$, достигает своего минимума на выпуклом замкнутом ограниченном множестве U_1.

2.1. Схема метода разрешающих функционалов для дифференциальной игры в стохастической системе

Способность вычислять разрешающие функции или функционалы позволяет строить управления преследователя, обеспечивающие приведение состояния системы на терминальное множество. Покажем, как выглядит схема метода разрешающих функционалов для завершения игры в стохастической системе (1.1), (1.2). Будем пользоваться определениями и понятиями из теории многозначных отображений [28].

Рассмотрим многозначное отображение

$$Q(t,\tau,v)=\Pi S(t-\tau)[K_1U_0-K_2v],\quad Q\colon \Delta\times V_0\rightsquigarrow \mathcal{H}_2(\Omega;Y),\quad \Delta=\{(t,\tau)\colon 0\le\tau\le t<\infty\}. \quad (2.1)$$

Очевидно, что это отображение имеет ограниченные и выпуклые образы в $\mathcal{H}_2(\Omega;Y)$. Замкнутость образов следует из слабой компактности в гильбертовом $\mathcal{H}_2(\Omega;U)$ выпуклого замкнутого ограниченного множества U_0. Предположим, что $0\in Q(t,\tau,v)$ для $(t,\tau,v)\in\Delta\times V_0$. Этот случай имеет место в рассматриваемых нами приложениях. Введем в рассмотрение случайный процесс

$$\zeta(t)=\zeta(t,\omega)=\Pi S(t)\xi+\Pi\int_0^t S(t-\tau)\Lambda dw(\tau). \quad (2.2)$$

Понятно, что $\zeta(t)\in L_2(0,T;\Omega;Y;\mathcal{F}_t)$.

Чтобы определить *разрешающий функционал*, рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{L}(t,\tau,v)=\{\widetilde{\alpha}\ge 0\colon Q(t,\tau,v)\cap\widetilde{\alpha}[\mathfrak{B}_d-\zeta(t)]\ne\varnothing\},\quad \mathfrak{L}:\Delta\times V_0\rightsquigarrow\mathbb{R}^1. \quad (2.3)$$

Это отображение имеет непустые образы. Замкнутость образов следует из слабой компактности множеств $\mathfrak{B}_d$ и Q. Если $\|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}_2}\le d$, то $\mathfrak{L}(t,\tau,v)=[0,\infty)$; в противном случае многозначное отображение $\mathfrak{L}$ имеет ограниченные и выпуклые образы. Разрешающий функционал есть опорный функционал многозначного отображения (2.3) в направлении $+1$:

$$\alpha(t,\tau,v)=\sup\{\widetilde{\alpha}\ge 0\colon Q(t,\tau,v)\cap\widetilde{\alpha}[\mathfrak{B}_d-\zeta(t)]\ne\varnothing\},\quad \alpha:\Delta\times V_0\to\mathbb{R}^1. \quad (2.4)$$

Если $\|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}_2}\le d$, то $\alpha(t,\tau,v)=\infty$; если $\|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}_2}>d$, то в силу компактности образов $\mathfrak{L}(t,\tau,v)$ (2.3) точная верхняя грань в (2.4) достигается.

Если $\|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}_2}>d$, то мы предполагаем, что для $v(\tau)\in V_1$ функция $\alpha(t,\tau,v(\tau))$ является измеримой по $\tau\in[0,t]$. Определим следующее множество моментов времени:

$$\Upsilon=\{t\in[0,T]\colon \|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}_2}\le d\}\cup\left\{t\in[0,T]\colon \|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}_2}>d\wedge\inf_{v\in V_1}\int_0^t\alpha(t,\tau,v(\tau))d\tau\ge 1\right\}. \quad (2.5)$$

Пусть множество Υ (2.5) не является пустым и $T_0\in\Upsilon$. Рассмотрим многозначные отображения из $[0,T_0]\times V_0$ в $\mathcal{H}_2(\Omega;Y)$:

$$G_1(\tau,v)=\{u\in U_0\colon \Pi S(T_0-\tau)[K_1u-K_2v]=0\}, \quad (2.6)$$

$$G_2(\tau,v)=\{u\in U_0\colon \Pi S(T_0-\tau)[K_1u-K_2v]\in\alpha(T_0,\tau,v)[\mathfrak{B}_d-\zeta(T_0)]\}. \quad (2.7)$$

Предположим, что $\|\zeta(T_0)\|_{\mathcal{H}_2}\le d$, т. е. $\zeta(T_0)\in\mathfrak{B}_d$. Тогда на промежутке $[0,T_0]$ при допустимом управлении убегающего $v(\tau)$ управление преследователя $u(\tau)$ положим равным селектору $g_1(\tau)\in L_2(0,T;\Omega;U;\mathcal{F}_t)$ многозначного отображения $G_1(\tau,v(\tau))$. При таком выборе управления преследователя $\Pi y(T_0)=\zeta(T_0)\in\mathfrak{B}_d$ и, следовательно, игра в системе (1.1), (1.2) будет завершена в момент T_0.

Пусть$\|\zeta(T_0)\|_{\mathcal{H}_2} > d$ и $v(\tau)$ — допустимое управление убегающего на промежутке $[0, T_0]$. Ищем момент времени $t_* \in (0, T_0]$ такой, что

$$\int_0^{t_*} \alpha(T_0, \tau, v(\tau))d\tau = 1. \tag{2.8}$$

В качестве управления преследователя $u(\tau)$ на промежутке $[0, t_*)$ возьмем селектор $g_2(\tau) \in L_2(0, T; \Omega; U, \mathcal{F}_t)$ многозначного отображения $G_2(\tau, v(\tau))$, а на промежутке $[t_*, T_0]$ — селектор $g_1(\tau) \in L_2(0, T; \Omega; U, \mathcal{F}_t)$ многозначного отображения $G_1(\tau, v(\tau))$. При таком выборе управления преследователя справедливы соотношения

$$\Pi y(T_0) = \zeta(T_0) + \int_0^{t_*} \Pi S(T_0 - \tau)[K_1 g_2(\tau) - K_2 v(\tau)]d\tau + \int_{t_*}^{T_0} \Pi S(T_0 - \tau)[K_1 g_1(\tau) - K_2 v(\tau)]d\tau$$

$$= \zeta(T_0) + \int_0^{t_*} \Pi S(T_0 - \tau)[K_1 g_2(\tau) - K_2 v(\tau)]d\tau \in \zeta(T_0) + \int_0^{t_*} \alpha(T_0, \tau, v(\tau))[\mathfrak{B}_d - \zeta(T_0)]d\tau$$

$$= \int_0^{t_*} \alpha(T_0, \tau, v(\tau))\mathfrak{B}_d d\tau \subset \mathfrak{B}_d,$$

где интеграл от многозначного отображения понимается в смысле Ауманна, т. е. как множество интегралов от интегрируемых селекторов. Следовательно, состояние $y(t)$ системы (1.1), (1.2) будет приведено на терминальное множество $\mathfrak{H}$ (1.5) в момент времени T_0.

Таким образом, мы получили следующий результат.

Теорема 1. *Пусть для конфликтно-управляемой системы* (1.1), (1.2) *с терминальным множеством* $\mathfrak{H}$ (1.5) *выполняются следующие предположения: оператор A является генератором C_0-полугруппы; случайная величина $\xi(\omega) \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y; \mathcal{F}_0)$ принимает значения в D_A;* $\mathrm{Im}K_1 \subset D_A$, $\mathrm{Im}K_2 \subset D_A$, $\mathrm{Im}\Lambda \subset D_A$; $0 \in Q(t, \tau, v)$ (2.1) *для всех* $(t, \tau, v) \in \Delta \times V_0$; *если* $\|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}_2} > d$, *то для* $v(\tau) \in V_1$ *функция* $\alpha(t, \tau, v(\tau))$ *является измеримой по* $\tau \in [0, t]$; *множество моментов времени* Υ (2.5) *не является пустым; для* $v(\tau) \in V_1$ *многозначные отображения* $G_1(\tau, v(\tau))$, $G_2(\tau, v(\tau))$, *где* G_1, G_2 *определены в* (2.6), (2.7), *имеют селекторы* $g_1(\tau) \in L_2(0, T; \Omega; U; \mathcal{F}_t)$ *и* $g_2(\tau) \in L_2(0, T; \Omega; U, \mathcal{F}_t)$.

Тогда состояние $y(t)$ системы (1.1), (1.2) *может быть приведено на терминальное множество* $\mathfrak{H}$ (1.5) *в момент* $T_0 \in \Upsilon$.

2.2. Время завершения игры в стохастической системе

Из схемы метода разрешающих функционалов видно, что для определения времени окончания игры и построения управления преследователя необходимо вычислить разрешающий функционал (2.4). Нижеследующие условия позволяют до вычисления разрешающего функционала установить существование моментов окончания игры.

Для фиксированного $T_0 \in [0, T]$ определим операторы $M_1 \in \mathcal{L}(L_2(0, T; \Omega; U, \mathcal{F}_t), \mathcal{H}_2(\Omega; Y))$ и $M_2 \in \mathcal{L}(L_2(0, T; \Omega; V, \mathcal{F}_t), \mathcal{H}_2(\Omega; Y))$ равенствами

$$M_1 u = \Pi \int_0^{T_0} S(T_0 - \tau)K_1 u(\tau)d\tau, \quad M_2 v = -\Pi \int_0^{T_0} S(T_0 - \tau)K_2 v(\tau)d\tau. \tag{2.9}$$

Рассмотрим выпуклые замкнутые ограниченные множества

$$\Omega_u = M_1 U_1 \subset \mathcal{H}_2(\Omega; Y), \quad \Omega_v = M_2 V_1 \subset \mathcal{H}_2(\Omega; Y), \tag{2.10}$$

и их опорные функционалы

$$\varphi_u(h) = \sup_{z\in\Omega_u} \langle h, z\rangle_{\mathcal{H}_2}, \quad \varphi_v(h) = \sup_{z\in\Omega_v} \langle h, z\rangle_{\mathcal{H}_2}. \tag{2.11}$$

Укажем условия завершения игры в системе (1.1), (1.2) с терминальным множеством $\mathfrak{H}$ (1.5) за время T_0.

Теорема 2. *Пусть для конфликтно-управляемой системы* (1.1), (1.2) *с терминальным множеством* $\mathfrak{H}$ (1.5) *выполняются следующие предположения: оператор A является генератором C_0-полугруппы; случайная величина $\xi(\omega) \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y; \mathcal{F}_0)$ принимает значения в D_A;* $\mathrm{Im}K_1 \subset D_A$, $\mathrm{Im}K_2 \subset D_A$, $\mathrm{Im}\Lambda \subset D_A$.

Для того чтобы игру в системе (1.1), (1.2) *можно было завершить к моменту времени T_0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\varphi_v(h) - \varphi_u(-h) \le d - \langle h, \zeta(T_0)\rangle_{\mathcal{H}_2} \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y)\colon \|h\|_{\mathcal{H}_2} = 1, \tag{2.12}$$

где φ_u, φ_v — опорные функционалы (2.11) *множеств Ω_u, Ω_v* (2.10)*; случайный процесс $\zeta(t)$ определен в* (2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем неравенство (2.12) в эквивалентной форме. В силу леммы 1 для любых управлений $u \in U_1$, $v \in V_1$ существует единственное решение $y(t; u, v)$ (1.4) задачи (1.1), (1.2), причем

$$\Pi y(T_0; u, v) = M_1 u + M_2 v + \zeta(T_0), \tag{2.13}$$

где операторы $M_1 \in \mathcal{L}(L_2(0,T;\Omega;U,\mathcal{F}_t), \mathcal{H}_2(\Omega;Y))$, $M_2 \in \mathcal{L}(L_2(0,T;\Omega;V,\mathcal{F}_t), \mathcal{H}_2(\Omega;Y))$ определены в (2.9), а случайный процесс $\zeta(t)$ — в (2.2). Для любого $h \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y)$ справедливо равенство

$$\langle h, \Pi y(T_0; u, v)\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle h, M_1 u\rangle_{\mathcal{H}_2} + \langle h, M_2 v\rangle_{\mathcal{H}_2} + \langle h, \zeta(T_0)\rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

Обозначим

$$p(h) = \sup_{v\in V_1} \inf_{u\in U_1} \langle h, \Pi y(T_0; u, v)\rangle_{\mathcal{H}_2} = \inf_{u\in U_1} \sup_{v\in V_1} \langle h, \Pi y(T_0; u, v)\rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

Справедливо соотношение

$$p(h) = \varphi_v(h) - \varphi_u(-h) + \langle h, \zeta(T_0)\rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

Следовательно, неравенство (2.12) эквивалентно неравенству

$$p(h) \le d \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y)\colon \|h\|_{\mathcal{H}_2} = 1. \tag{2.14}$$

Докажем *необходимость*. Покажем, что если игру можно завершить за время T_0, то выполняется неравенство (2.12). Предположим противное, т. е. существует $h \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y)$ с $\|h\|_{\mathcal{H}_2} = 1$ такой, что выполняется неравенство

$$\langle h, \zeta(T_0)\rangle_{\mathcal{H}_2} + \varphi_v(h) - \varphi_u(-h) > d. \tag{2.15}$$

Так как множество V_1 слабо компактно, то точная верхняя грань в определении опорного функционала $\varphi_v(h)$ (2.11) достигается: $\varphi_v(h) = \langle h, M_2 v_0\rangle_{\mathcal{H}_2}$, $v_0 \in V_1$. Это позволяет неравенство (2.15) переписать в виде

$$\langle h, \Pi y(T_0; u, v_0)\rangle_{\mathcal{H}_2} > d \quad \forall u \in U_1.$$

Тогда имеем управление убегающего $v_0 \in V_1$ такое, что при любом выборе управления преследователя $u \in U_1$ выполняется неравенство

$$\|\Pi y(T_0; u, v_0)\|_{\mathcal{H}_2} > d, \tag{2.16}$$

что противоречит возможности завершения игры за время T_0. Таком образом, необходимость неравенства (2.12) доказана.

Теперь докажем *достаточность*. Покажем, что если выполняется неравенство (2.12), то игру можно завершить за время T_0. Предположим противное, т. е. найдется управление убегающего $v_0 \in V_1$ такое, что при любом выборе управления преследователя $u \in U_1$ выполняется неравенство (2.16). Непрерывный выпуклый функционал $f(u) = \|\Pi y(T_0; u, v_0)\|_{\mathcal{H}_2}$, определенный на гильбертовом пространстве $L_2(0, T; \Omega; U, \mathcal{F}_t)$, достигает своего минимума на выпуклом замкнутом ограниченном множестве U_1. Следовательно, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что удовлетворяется неравенство $\min\limits_{u \in U_1} f(u) > d + \varepsilon$. В силу представления (2.13) для $v = v_0$ получаем, что в пространстве $\mathcal{H}_2(\Omega; Y)$ выпуклое множество $M_1 U_1 + M_2 v_0 + \zeta(T_0)$ и замкнутый шар $\mathfrak{B}_{d+\varepsilon}$ с центром в нуле и радиуса $d + \varepsilon$ не пересекаются. Из теоремы отделимости [20, разд. 2.6] заключаем, что найдется единичный вектор $h \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y)$ такой, что

$$\inf_{u \in U_0} \langle h, \Pi y(T_0; u, v_0) \rangle_{\mathcal{H}_2} \geq \sup_{z \in B_{d+\varepsilon}} \langle h, z \rangle_{\mathcal{H}_2} \geq d + \varepsilon > d.$$

Отсюда следует, что неравенство (2.14) не выполняется, а это противоречит предположению. На этом доказательство теоремы завершается.

3. Приложения

Ряд фактов теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных можно получить, исходя из общих положений теории дифференциально-операторных уравнений в абстрактных банаховых или гильбертовых пространствах. Рассмотрим приложения полученных результатов к двум моделям.

3.1. Модель простого движения в гильбертовом пространстве при случайных возмущениях

Процесс простого движения преследователя и убегающего после замены переменных записывается в виде $y'(t) = u(t) - v(t)$ [18]. Мы будем рассматривать этот процесс в сепарабельном гильбертовом пространстве, а также предполагать наличие случайного возмущения в виде аддитивного белого шума. Таким образом, динамика системы описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением в гильбертовом пространстве Y с H-значным винеровским процессом $w(t)$:

$$dy(t) = [u(t) - v(t)]dt + \Lambda dw(t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.1}$$

Начальное состояние системы определяем с помощью (1.2), где $\xi \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y; \mathcal{F}_0)$; $\Lambda \in \mathcal{L}(H, Y)$. Случайные процессы из множеств U_1 и V_1 допустимых управлений преследователя $u(t, \omega) \in L_2(0, T; \Omega; Y, \mathcal{F}_t)$ и убегающего $v(t, \omega) \in L_2(0, T; \Omega; Y, \mathcal{F}_t)$ для почти всех $t \in [0, T]$ удовлетворяют ограничениям $\boldsymbol{M}\|u(t, \omega)\|_Y^2 \leq \varrho_1^2$ и $\boldsymbol{M}\|v(t, \omega)\|_Y^2 \leq \varrho_2^2$, $\varrho_1 > 0$, $\varrho_2 > 0$. *Игру в системе* (3.1), (1.2) *можно завершить за время* T_0, если для любого допустимого управления убегающего $v \in V_1$ существует допустимое управление преследователя $u \in U_1$, для которого состояние системы $y(t, \omega)$ в момент времени T_0 будет переведено в ноль.

Здесь $Y = U = V$, A — нулевой оператор, $K_1 = K_2 = E$, $S(t) = E$. Терминальное множество (1.5) состоит из нулевого вектора $\mathfrak{H} = \{0\}$, $\mathfrak{H}_0 = \{0\}$, $\mathfrak{B}_d = \{0\}$, $d = 0$, $\Pi = E$ — единичный оператор. Множества U_0 и V_0 суть замкнутые шары в пространстве случайных величин $\mathcal{H}_2(\Omega; Y)$ с центрами в нуле и радиусами ϱ_1 и ϱ_2. Исключим тривиальный случай и предположим, что начальное состояние ξ отлично от нуля.

Множество всех моментов времени, за которые можно завершить игру, определим с помощью теоремы 2. Случайный процесс $\zeta(t)$ (2.2) есть

$$\zeta(t) = \xi + \Lambda w(t).$$

Винеровский процесс $w(t)$ $(t > 0)$ не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}_0$, относительно которой измеримо начальное состояние ξ. Имеем

$$\|\zeta(t)\|^2_{\mathcal{H}_2} = \|\xi(\omega) + \Lambda w(t,\omega)\|^2_{\mathcal{H}_2} = \boldsymbol{M}\|\xi\|^2_Y + \boldsymbol{M}\|\Lambda w(t)\|^2_Y \le \boldsymbol{M}\|\xi\|^2_Y + t\|\Lambda\|^2 \mathrm{tr} W. \tag{3.2}$$

Точная верхняя грань в определении опорных функционалов $\varphi_u(h), \varphi_v(h)$ (2.11) достигается, и мы имеем представления

$$\varphi_u(h) = \varrho_1 T_0 \|h(\omega)\|_{\mathcal{H}_2}, \quad \varphi_v(h) = \varrho_2 T_0 \|h(\omega)\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Действительно, если $h \ne 0$, то

$$\begin{aligned}
\varphi_u(h) = {} & \sup_{u\in U_1} \langle h(\omega), \int\limits_0^{T_0} u(\tau,\omega)d\tau\rangle_{\mathcal{H}_2} = \int\limits_0^{T_0} \langle h(\omega), u_0(\tau,\omega)\rangle_{\mathcal{H}_2} d\tau \\
= {} & \varrho_1 \int\limits_0^{T_0} \|h(\omega)\|_{\mathcal{H}_2} d\tau = \varrho_1 T_0 \|h(\omega)\|_{\mathcal{H}_2}, \quad u_0(\tau,\omega) = \frac{\varrho_1 h(\omega)}{\|h(\omega)\|_{\mathcal{H}_2}}; \\
\varphi_v(h) = {} & \sup_{v\in V_1} \langle -h(\omega), \int\limits_0^{T_0} v(\tau,\omega)d\tau\rangle_{\mathcal{H}_2} = \varrho_2 T_0 \|h(\omega)\|_{\mathcal{H}_2}.
\end{aligned}$$

Необходимое и достаточное условие (2.12) завершения игры в системе (3.1), (1.2) в момент времени T_0 принимает вид

$$(\varrho_1 - \varrho_2)T_0 \ge \langle h(\omega), \zeta(T_0,\omega)\rangle_{\mathcal{H}_2} \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_2(\Omega;Y)\colon \|h\|_{\mathcal{H}_2} = 1.$$

Тогда множество всех моментов времени T_0, за которые можно завершить игру, удовлетворяет неравенству

$$(\varrho_1 - \varrho_2)T_0 \ge \|\zeta(T_0,\omega)\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Если $\varrho_1 < \varrho_2$, то игру невозможно завершить. Пусть $\varrho_1 > \varrho_2$. С помощью (3.2) получаем, что игру в системе (3.1), (1.2) можно завершить в момент времени T_0 тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$(\varrho_1 - \varrho_2)T_0 \ge \sqrt{\boldsymbol{M}\|\xi\|^2_Y + \boldsymbol{M}\|\Lambda w(T_0)\|^2_Y}. \tag{3.3}$$

С учетом (3.2), (3.3) заключаем, что для завершения игры в системе (3.1), (1.2) достаточно выбрать моменты времени T_0, удовлетворяющие неравенству

$$T_0 \ge \frac{\|\Lambda\|^2 \mathrm{tr} W + \sqrt{\|\Lambda\|^4 \mathrm{tr}^2 W + 4(\varrho_1 - \varrho_2)^2 \boldsymbol{M}\|\xi\|^2_Y}}{2(\varrho_1 - \varrho_2)^2} \doteq T^*. \tag{3.4}$$

Например, если $\Lambda = \lambda E$, где λ — константа, то $\|\Lambda\| = |\lambda|$ и неравенство (3.4) является необходимым и достаточным для завершения игры в момент времени T_0. Отрезок времени $[0,T]$, на котором изучается игра, предполагается достаточно большим, так что $T \ge T^*$.

Теперь покажем, как выбрать допустимое управление преследователя при любом допустимом управлении убегающего, чтобы завершить игру в системе (3.1), (1.2). Здесь $Q(t,\tau,v)$ (2.1) есть замкнутый шар в $\mathcal{H}_2(\Omega;Y)$ с центром $-v$ и радиуса ϱ_1, причем $0 \in Q(t,\tau,v)$. Разрешающий функционал (2.4) имеет вид

$$\alpha(t,\tau,v) = \frac{\langle\zeta(t), v\rangle_{\mathcal{H}_2} + \sqrt{\langle\zeta(t), v\rangle^2_{\mathcal{H}_2} + \|\zeta(t)\|^2_{\mathcal{H}_2}(\varrho_1^2 - \|v\|^2_{\mathcal{H}_2})}}{\|\zeta(t)\|^2_{\mathcal{H}_2}}. \tag{3.5}$$

Уточним вид множества Υ (2.5):

$$\Upsilon = \Big\{ t \in [0,T] \colon \inf_{v \in V_1} \int_0^t \alpha(t,\tau,v(\tau))d\tau \geq 1 \Big\}.$$

Тогда множество Υ есть

$$\Upsilon = \Big\{ t \in [0,T] \colon t \geq \frac{\|\zeta(t)\|_{\mathcal{H}_2}}{\varrho_1 - \varrho_2} \Big\}.$$

За счет выбора достаточно большого $T \geq T^*$ это множество не является пустым. Например, $T_0 \in \Upsilon$ можно выбрать с помощью неравенства (3.4).

Отображения (2.6), (2.7) принимают вид

$$G_1(\tau, v) = v, \quad G_2(\tau, v) = v - \alpha(T_0, \tau, v)\zeta(T_0).$$

Для допустимого управления убегающего $v(\tau) \in V_1$ ищем момент времени $t_* \in (0, T_0]$ такой, что выполняется соотношение (2.8). В качестве управления преследователя на промежутке $[0, t_*)$ возьмем $u(\tau) = v(\tau) - \alpha(T_0, \tau, v(\tau))\zeta(T_0)$, а на промежутке $[t_*, T_0]$ возьмем $u(\tau) = v(\tau)$.

Доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть для конфликтно-управляемой системы* (3.1), (1.2) *выполняются следующие предположения: области управления U_0 и V_0 суть замкнутые шары в пространстве случайных величин $\mathcal{H}_2(\Omega; Y)$ с центрами в нуле и радиусами ϱ_1 и ϱ_2, $\varrho_1 > \varrho_2$; момент времени T является достаточно большим $T \geq T^*$* (3.4); *$\xi \in \mathcal{H}_2(\Omega; Y; \mathcal{F}_0)$, $\boldsymbol{M}\|\xi\|_Y^2 \neq 0$; $\Lambda \in \mathcal{L}(H, Y)$.*

Тогда при любом допустимом управлении $v(t,\omega) = v(t) \in V_1$ траектория системы (3.1), (1.2) *может быть приведена в ноль за время T_0, удовлетворяющее* (3.3), *с помощью допустимого управления $u(t,\omega) = u(t) \in U_1$ вида*

$$u(t) = \begin{cases} v(t) - \alpha(T_0, t, v(t))\zeta(T_0), & t \in [0, t_*), \\ v(t), & t \in [t_*, T_0], \end{cases}$$

где момент t_* переключения управления удовлетворяет соотношению (2.8) *с разрешающим функционалом $\alpha(t, \tau, v)$* (3.5).

3.2. Стохастический конфликтно-управляемый процесс теплопроводности

В [17] исследовалась детерминированная дифференциальная игра для процесса распространения тепла в стационарной однородной среде с управляемыми распределенными тепловыми источниками и утечками. Здесь мы изучаем процесс теплопроводности со случайными источником (управление преследователя) и утечкой (управление убегающего). В области $[0,T] \times [0,\pi]$ рассматриваем смешанную задачу

$$dy(t,x,\omega) = \Big[\frac{\partial^2 y(t,x.\omega)}{\partial x^2} + K(u(t,x,\omega) - v(t,x,\omega))\Big]dt + \Lambda dw(t,x,\omega), \tag{3.6}$$

$$y(t,0,\omega) = y(t,\pi,\omega) = 0, \quad y(0,x,\omega) = \xi(x,\omega). \tag{3.7}$$

В (3.6), (3.7) предполагаем: $w(t,x,\omega)$ — винеровский процесс со значениями в пространстве $L_2(0,\pi)$, согласованный с потоком σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$, вложенных в $\mathcal{F}$, где $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ — вероятностное пространство (см. введение); функция $\xi(x,\omega)$ измерима относительно произведения борелевской σ-алгебры подмножеств из $[0,\pi]$ на $\mathcal{F}_0$; управляющие воздействия преследователя и убегающего $u(t,x,\omega)$ и $v(t,x,\omega)$ измеримы и при фиксированном $t\in[0,T]$ измеримы по (x,ω) относительно произведения борелевской σ-алгебры подмножеств из $[0,\pi]$ на $\mathcal{F}_t$;

$$\int\limits_0^\pi \boldsymbol{M}|\xi(x,\omega)|^2dx<\infty, \quad K\in\mathcal{L}(L_2(0,\pi)),$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^\pi \boldsymbol{M}|u(t,x,\omega)|^2dxdt<\infty, \quad \int\limits_0^T\int\limits_0^\pi \boldsymbol{M}|v(t,x,\omega)|^2dxdt<\infty.$$

Допустимые управления преследователя (источника) U_1 и убегающего (утечки) V_1 удовлетворяют ограничениям

$$\int\limits_0^\pi \boldsymbol{M}\ |u(t,x,\omega)|^2dx\le\varrho_1^2, \quad \int\limits_0^\pi \boldsymbol{M}|v(t,x,\omega)|^2dx\le\varrho_2^2.$$

Следовательно, области управления U_0,V_0 суть замкнутые шары в $\mathcal{H}_2(\Omega,L_2(0,\pi))$ с центрами в нуле и радиусами ϱ_1,ϱ_2 соответственно. Модели белого шума для стохастического уравнения теплопроводности предлагались в [29;30], где в качестве $w(t)$ рассматривались либо стандартный скалярный винеровский процесс, либо винеровский процесс со значениями в пространстве L_2. *Цель игры в системе* (3.6), (3.7) состоит в приведении состояния $y(t,x,\omega)$ на некоторое терминальное множество за конечное время, не превосходящее T, в классе допустимых управлений преследователя при любом допустимом управлении убегающего.

В вещественном пространстве $Y=U=V=H=L_2(0,\pi)$ смешанная задача (3.6), (3.7) трактуется как задача Коши (1.1), (1.2) для стохастического уравнения в смысле Ито с оператором

$$Aq=\frac{d^2q(x)}{dx^2}, \quad D_A=\{q(x)\in W_2^2(0,\pi),\ q(0)=q(\pi)=0\},$$

и операторами $K_1=K_2=K\in\mathcal{L}(L_2(0,\pi))$. Решение смешанной задачи (3.6), (3.7) будем понимать в смысле решения соответствующей абстрактной задачи (1.1), (1.2). Спектр оператора A состоит из простых собственных чисел $\lambda_k=-k^2$, которым отвечает полная ортонормированная система собственных функций $e_k(x)=\sqrt{2/\pi}\sin kx$. Через q_k мы обозначаем коэффициенты Фурье в разложении функции $q(x)\in L_2(0,\pi)$ по функциям базиса:

$$q(x)=\sum_{k=1}^\infty q_ke_k(x), \quad q_k=\int\limits_0^\pi q(x)e_k(x)dx, \quad k=1,2,\dots\ .$$

Оператор A есть генератор полугруппы класса C_0:

$$S(t)q=\sum_{k=1}^\infty e^{-k^2t}q_ke_k(x). \tag{3.8}$$

Пусть также выполняются ограничения: $\xi(x,\omega)\in D_A$ для почти всех $\omega\in\Omega$, $\mathrm{Im}K,\mathrm{Im}\Lambda\subset D_A$. Сделанные предположения гарантируют выполнение условий леммы 1. Поэтому существует единственное решение $y(t,x,\omega)$ (1.4) смешанной задачи (3.6), (3.7).

В качестве терминального множества $\mathfrak{H}$ (1.5) рассматриваем

$$\mathfrak{H}=(E-\Pi)\mathcal{H}_2(\Omega;L_2(0,\pi))\oplus\mathfrak{B}_d,$$

где Π — оператор ортогонального проектирования в $\mathcal{H}_2(\Omega; L_2(0,\pi))$; $\mathfrak{B}_d$ — d-окрестность нуля в подпространстве $\Pi\mathcal{H}_2(\Omega; L_2(0,\pi))$. С помощью опорных функционалов (2.11) определим множество моментов времени, за которые можно завершить игру. Находим

$$\varphi_u(h) = \varrho_1 \int\limits_0^{T_0} \|K^* S(T_0-\tau)\Pi h(x,\omega)\|_{\mathcal{H}_2} d\tau, \quad \varphi_v(h) = \varrho_2 \int\limits_0^{T_0} \|K^* S(T_0-\tau)\Pi h(x,\omega)\|_{\mathcal{H}_2} d\tau.$$

В силу теоремы 2 множество моментов времени T_0, за которые можно завершить игру, удовлетворяют неравенству

$$(\varrho_2-\varrho_1)\int\limits_0^{T_0} \|K^* S(T_0-\tau)\Pi h(x,\omega)\|_{\mathcal{H}_2} d\tau + \langle h, \zeta(T_0)\rangle_{\mathcal{H}_2} \le d \ \ \forall\, h \in \mathcal{H}_2(\Omega; L_2(0,\pi))\colon \|h\|_{\mathcal{H}_2} = 1, \tag{3.9}$$

где случайный процесс $\zeta(t)$ со значениями в $L_2(0,\pi)$ определен в (2.2) с помощью полугруппы $S(t)$ (3.8).

Если терминальное множество $\mathcal{H}$ (1.5) состоит из нуля $\mathcal{H} = \{0\}$, то $d = 0$, $\Pi = E$ и неравенство (3.9) принимает вид

$$(\varrho_1-\varrho_2)\int\limits_0^{T_0} \|K^* S(T_0-\tau)h(x,\omega)\|_{\mathcal{H}_2} d\tau \ge \left\langle h, S(T_0)\xi + \int\limits_0^{T_0} S(T_0-\tau)\Lambda dw(\tau)\right\rangle_{\mathcal{H}_2}. \tag{3.10}$$

В качестве ковариационного оператора W винеровского процесса $w(t)$ выберем $W = -A^{-1}$. Тогда

$$w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) e_k(x),$$

где $w_k(t)$ — независимые скалярные винеровские процессы с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\dfrac{1}{k^2}t$. Пусть Π_k есть оператор ортогонального проектирования в пространстве $L_2(0,\pi)$ на линейную оболочку функции $\sin kx$. Ортопроектор Π_k естественным образом индуцирует ортопроектор в пространстве случайных величин $\mathcal{H}_2(\Omega; L_2(0,\pi))$. Для индуцированного оператора сохраним прежнее обозначение. Положим $K = \Lambda = \Pi_k$ и $\xi = \Pi_k\xi = \xi_k(\omega)e_k(x)$. Имеем следующее представление для случайного процесса $\zeta(t)$ (2.2):

$$\zeta(t) = e^{-k^2 t}\eta(t)e_k(x) \in L_2(0,T;\Omega;L_2(0,\pi);\mathcal{F}_t), \quad \eta(t) = \left[\xi_k + \int\limits_0^t e^{k^2\tau} dw_k(\tau)\right] \in L_2(0,T;\Omega;\mathbb{R}^1;\mathcal{F}_t).$$

Неравенство (3.10) принимает вид

$$(\varrho_1-\varrho_2)\sqrt{\boldsymbol{M} h_k^2}\,\frac{1-e^{-k^2T_0}}{k^2} \ge e^{-k^2T_0}\boldsymbol{M}[h_k\eta(T_0)].$$

Отсюда получаем, что множество всех моментов времени T_0, за которые можно завершить игру, удовлетворяют неравенству

$$(\varrho_1-\varrho_2)\frac{1-e^{-k^2T_0}}{k^2} \ge e^{-k^2T_0}\boldsymbol{M}[h\eta(T_0)] \ \ \forall\, h \in \mathcal{H}_2(\Omega;\mathbb{R}^1)\colon \|h\|_{\mathcal{H}_2} = 1.$$

Поэтому для завершения игры в момент времени T_0 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$(\varrho_1-\varrho_2)\frac{e^{k^2T_0}-1}{k^2} \ge \|\eta(T_0)\|_{\mathcal{H}_2},$$

где

$$\|\eta(t)\|^2_{\mathcal{H}_2} = \boldsymbol{M}\xi_k^2 + \frac{e^{2k^2t}-1}{2k^4}.$$

Исключим тривиальный случай окончания игры в начальный момент времени ($\xi_k \neq 0$). Если $\varrho_1 \leq \varrho_2$, то игру невозможно завершить. Пусть $\varrho_1 > \varrho_2$. Для завершения игры в момент T_0 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\sqrt{2}(\varrho_1-\varrho_2)(e^{k^2T_0}-1) \geq \sqrt{2k^4\boldsymbol{M}\xi_k^2 + e^{2k^2T_0}-1}. \tag{3.11}$$

В частности, если $\varrho_1 - \varrho_2 > 1/\sqrt{2}$, то неравенство (3.11) удовлетворяется при

$$T_0 \geq \frac{1}{k^2}\ln\frac{2(\varrho_1-\varrho_2)^2 + \sqrt{2k^4[2(\varrho_1-\varrho_2)^2-1]\boldsymbol{M}\xi_k^2+1}}{2(\varrho_1-\varrho_2)^2-1} \doteq T^*. \tag{3.12}$$

Применим схему метода разрешающих функционалов. Уточним вид многозначного отображения (2.1)

$$Q(t,\tau,v) = \{e^{-k^2(t-\tau)}(u_k - v_k)e_k(x)\colon u_k \in \mathcal{H}_2(\Omega;\mathbb{R}^1),\ \boldsymbol{M}u_k^2 \leq \varrho_1^2\}$$

и определим разрешающий функционал (2.4)

$$\alpha(t,\tau,v) = \sup\bigl\{\widetilde{\alpha} \geq 0\colon \boldsymbol{M}[v_k - \widetilde{\alpha}e^{-k^2\tau}\eta(t)]^2 \leq \varrho_1^2\bigr\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\alpha(t,\tau,v) = \frac{\langle\eta(t),v_k\rangle_{\mathcal{H}_2} + \sqrt{\langle\eta(t),v_k\rangle^2_{\mathcal{H}_2} + \|\eta(t)\|^2_{\mathcal{H}_2}(\varrho_1^2 - \|v_k\|^2_{\mathcal{H}_2})}}{e^{-k^2\tau}\|\eta(t)\|^2_{\mathcal{H}_2}}. \tag{3.13}$$

Множество Υ (2.5) состоит из тех моментов времени $T_0 \in [0,T]$, которые удовлетворяют (3.11). При определенных соотношениях на ϱ_1, ϱ_2 и за счет выбора достаточно большого T это множество не является пустым, например, $\varrho_1 > \varrho_2 + 1/\sqrt{2}$ и $T \geq T^*$ (3.12).

Отображения (2.6), (2.7) представляют собой следующие выражения:

$$G_1(\tau,v) = \{u(x,\omega) \in U_0\colon u_k(\omega) = v_k(\omega)\},$$

$$G_2(\tau,v) = \{u(x,\omega) \in U_0\colon u_k(\omega) = v_k(\omega) - e^{-k^2\tau}\alpha(T_0,\tau,v)\eta(T_0,\omega)\}.$$

Рассмотрим селекторы этих отображений

$$g_1(\tau,v) = v_k(\omega)e_k(x) \in G_1(\tau,v), \quad g_2(\tau,v) = [v_k(\omega) - e^{-k^2\tau}\alpha(T_0,\tau,v)\eta(T_0,\omega))]e_k(x) \in G_2(\tau,v).$$

Для любого допустимого управления $v(\tau,x,\omega) = v(\tau) \in V_1$ строим управление

$$u(\tau) = u(\tau,x,\omega) = \begin{cases} [v_k(\tau,\omega) - e^{-k^2\tau}\alpha(T_0,\tau,v(\tau))\eta(T_0,\omega)]e_k(x), & \tau \in [0,t_*), \\ v_k(\tau,\omega)e_k(x), & \tau \in [t_*,T_0], \end{cases} \tag{3.14}$$

где t_* есть момент переключения с управления $u(\tau,x,\omega) = g_2(\tau,v(\tau))$ на управление $u(\tau,x,\omega) = g_1(\tau,v(\tau))$, который определяется с помощью соотношения (2.8).

Таким образом, мы получили следующий результат.

Утверждение 2. *Пусть для конфликтно-управляемой системы* (3.6), (3.7) *выполняются следующие предположения: области управления* U_0 *и* V_0 *суть замкнутые шары в* $\mathcal{H}_2(\Omega; L_2(0,\pi))$ *с центрами в нуле и радиусами* ϱ_1 *и* ϱ_2, $\varrho_1 - \varrho_2 > 1/\sqrt{2}$; *момент времени* T *является достаточно большим* $T \geq T^*$ (3.12); $K = \Lambda = \Pi_k$ — *оператор ортогонального проектирования в пространстве* $L_2(0,\pi)$ *на линейную оболочку функции* $e_k(x) = \sqrt{2/\pi}\sin kx$; $\xi(x,\omega) \in \mathcal{H}_2(\Omega; L_2(0,\pi); \mathcal{F}_0)$, $\xi = \Pi_k\xi = \xi_k(x,\omega)e_k(x)$, $\boldsymbol{M}\xi_k^2 \neq 0$.

Тогда при любом допустимом управлении $v(t,x,\omega)$ *траектория системы* (3.6), (3.7) *может быть приведена в ноль за время* T_0, *удовлетворяющее* (3.12), *с помощью допустимого управления* $u(t,x,\omega)$ *вида* (3.14), *где момент* t_* *переключения управления удовлетворяет соотношению* (2.8) *с разрешающим функционалом* $\alpha(t,\tau,v)$ (3.13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. Линейные системы. Москва: Наука, 1968. 476 с.
2. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. Москва: Наука, 1970. 420 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 456 с.
4. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. Москва: Наука, 1985. 516 с.
5. **Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Boston: Birkhauser, 1995. 322 p.
6. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
7. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. Москва: Наука, 1977. 456 с.
8. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. Москва: Наука, 1981. 288 с.
9. **Красовский Н.Н.** Игра сближения-уклонения со стохастическим поводырем // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 5. С. 1020—1023.
10. **Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.** Седловая точка стохастической дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 1. С. 24–27.
11. **Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.** Стохастический программный синтез для позиционной дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, № 3. С. 534–539.
12. **Красовский Н.Н.** Детерминированная стратегия и стохастические программы // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, № 2. С. 179–198.
13. **Красовский Н.Н., Котельникова А.Н.** Стохастический поводырь для объекта с последействием в позиционной дифференциальной игре // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН // 2011. Т. 17, № 2. С. 97–104.
14. **Ramachandran K.M., Tsokos C.P.** Stochastic differential games. Paris; Amsterdam; Beijing: Atlantis Press, 2012. 248 p.
15. **Fleming W.H., Nisio M.** Differential games for stochastic partial differential equations // Nagoya Math. J. 1993. Vol. 131. P. 75–107. doi: 10.1017/S0027763000004554 .
16. **Vlasenko L.A., Chikrii A.A.** The method of resolving functionals for a dynamic game in a Sobolev system // J. Automat. Inform. Sci. 2014. Vol. 46,№ 7. P. 1–11. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v46.i7.10 .
17. **Власенко Л.А., Руткас А.Г., Чикрий А.А.** О дифференциальной игре в абстрактной параболической системе // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 26–40.
18. **Chikrii A.A.** Conflict-controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ, 1997. 424 p.
19. **Чикрий А.А.** Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 76–92.
20. **Хилле Э., Филлипс Р.** Функциональный анализ и полугруппы. М.: Иностранная литература, 1962. 830 с.
21. **Curtain R.F., Falb P.L.** Stochastic differential equations in Hilbert space // J. Diff. Eq. 1971. Vol. 10, iss. 3. P. 412–430. doi: 10.1016/0022-0396(71)90004-0 .

22. **Далецкий Ю.Л., Фомин С.В.** Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. Москва: Наука. 1983. 383 с.
23. **Da Prato G., Zabchyk J.** Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 1992. 454 p. doi: 10.1017/CBO9780511666223 .
24. **Власенко Л.А., Руткас А.Г.** О дифференциальной игре в системе, описываемой неявным дифференциально-операторным уравнением // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 6. С. 785–795.
25. **Pazy A.** Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. N Y; Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer-Verlag, 1983. 279 p. doi: 10.1007/978-1-4612-5561-1 .
26. **Власенко Л.А., Руткас А.Г.** Стохастическое импульсное управление параболическими системами типа Соболева // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 10. С. 1482–1491.
27. **Vlasenko L.A., Rutkas A.G.** Optimal control of a class of random distributed Sobolev type systems with aftereffect // J. Automat. Inform. Sci. 2013. Vol. 45, № 9. P. 66–76. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v45.i9.60 .
28. **Aubin J.P., Frankowska H.** Set-valued analysis. Boston: Birkhäuser, 1990. 461 p.
29. **Дороговцев А.Я., Ивасишен С.Д., Кукуш А.Г.** Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части // Укр. мат. журн. 1985. Т. 37, № 1. С. 13–20.
30. **Вейтс Е.** Стохастическое уравнение теплопроводности для стационарного магистрального транспортного потока // Теория вероятностей и ее применения. 1992. Т. 37, вып. 1. С. 153–156.

Поступила 5.04.2019
После доработки 15.05.2019
Принята к публикации 20.05.2019

Власенко Лариса Андреевна
д-р тех. наук, профессор,
профессор
Харьковский нац. университет радиоэлектроники
г. Харьков
e-mail: lara@rutrus.com

Руткас Анатолий Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор,
профессор
Харьковский нац. университет радиоэлектроники
г. Харьков
e-mail: anatoly@rutrus.com

Чикрий Аркадий Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
академик НАН Украины,
зав. отделом
Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАНУ
г. Киев
e-mail: chik@insyg.kiev.ua

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineinye sistemy* [Theory of motion control. Linear systems]. Moscow: Nauka Publ, 1968, 476 p.
2. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* [Game problems on the encounter of motions]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 420 p.
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.

4. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 520 p.
5. Krasovskii N.N., Krasovskii A.N. *Control under lack of information.* Berlin etc.: Birkhäuser, 1995, 322 p. ISBN: 0-8176-3698-6 .
6. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions.* Basel: Gordon and Breach, 1995, 625 p.
7. Kurzhanskii A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under the conditions of uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
8. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Guarantee optimization in control problems]. Moscow: Nauka Publ., 1981, 288 p.
9. Krasovskii N.N. A convergence-evasion game with stochastic guide. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1977, vol. 237, no. 5, pp. 1020–1023. (in Russian)
10. Krasovskii N.N., Tret'yakov V.E. Saddle point of a stochastic differential game. *Soviet Math. Dokl.*, 1981, vol. 22, no. 2, pp. 393–398.
11. Krasovskii N.N., Tret'yakov V.E. Stochastic program synthesis for a positional differential game. *Soviet Math. Dokl.*, 1981, vol. 24, no. 1, pp. 17–20.
12. Krasovskii N.N. Deterministic strategy and stochastic programs. *J. Appl. Math. Mech.*, 1985, vol. 49, no. 2, pp. 135–143. doi: 10.1016/0021-8928(85)90092-9 .
13. Krasovskii N.N., Kotel'nikova A.N. Stochastic guide for a time-delay object in a positional differential game. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 277, suppl. 1, pp. 145–151. doi: 10.1134/S0081543812050148 .
14. Ramachandran K.M., Tsokos C.P. *Stochastic differential games.* Paris; Amsterdam; Beijing: Atlantis Press, 2012, 248 p. ISBN: 978-94-91216-47-3 .
15. Fleming W.H., Nisio M. Differential games for stochastic partial differential equations. *Nagoya Math. J.*, 1993, vol. 131, pp. 75–107. doi: 10.1017/S0027763000004554 .
16. Vlasenko L.A., Chikrii A.A. The method of resolving functionals for a dynamic game in a Sobolev system. *J. Automat. Inform. Sci.*, 2014, vol. 46, no. 7, pp. 1–11. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v46.i7.10 .
17. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 293, suppl. 1, pp. 254–269. doi: 10.1134/S0081543816050229 .
18. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes.* Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997, 424 p. ISBN: 0-79234522-3 .
19. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 271, pp. 69–85. doi: 10.1134/S0081543810040073 .
20. Hille E., Phillips R.S. *Functional analysis and semigroups.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 31, Providence, RI: AMS, 1957, 808 p. ISBN: 978-0-8218-3395-7 . Translated to Russian under the title *Funktsional'nyi analiz i polugruppy*, Moscow: Inostrannaya Literatura Publ., 1962, 830 p.
21. Curtain R.F., Falb P.L. Stochastic differential equations in Hilbert space. *J. Diff. Eq.*, 1971, vol. 10, no. 3, pp. 412–430. doi: 10.1016/0022-0396(71)90004-0 .
22. Dalecky Yu.L., Fomin S.V. *Measures and differential equations in infinite-dimensional space.* Dordrecht: Kluwer, 1991, 337 p. ISBN: 978-94-010-5148-4 . Original Russian text published in Daletskii Yu.L., Fomin S.V. *Mery i differentsial'nye uravneniya v beskonechnomernykh prostranstvakh.* Moscow: Nauka Publ., 1983, 383 p.
23. Da Prato G., Zabchyk J. *Stochastic equations in infinite dimensions.* Cambridge: Cambridge University Press, 1992, 454 p. doi: 10.1017/CBO9780511666223 .
24. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. On a differential game in a system described by an implicit differential-operator equation. *Diff. Eq.*, 2015, vol. 51, no. 6, pp. 798–807. doi: 10.1134/S0012266115060117 .
25. Pazy A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* N Y; Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer-Verlag, 1983, 279 p. doi: 10.1007/978-1-4612-5561-1 .
26. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. Stochastic impulse control of parabolic systems of Sobolev type. *Diff. Eq.*, 2011, vol. 47, no. 10, pp. 1498–1507. doi: 10.1134/S0012266111100132 .
27. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. Optimal control of a class of random distributed Sobolev type systems with aftereffect. *J. Automat. Inform. Sci.*, 2013, vol. 45, no. 9, pp. 66–76. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v45.i9.60 .
28. Aubin J.P., Frankowska H. *Set-valued analysis.* Boston: Birkhäuser, 1990, 461 p. ISBN: 0-8176-3478-9 .

29. Dorogovtsev A.Ya., IvasishenS.D., Kukush A.G. Asymptotic behavior of solutions of the heat-conduction equation with white noise in the right side. *Ukrain. Math. J.*, 1985, vol. 37, no. 1, pp. 10–15. doi: 10.1007/BF01056844 .
30. Weits E. A Stochastic heat equation for stationary freeway traffic flow. *Theory Probab. Appl.*, 1993, vol. 37, no. 1, pp. 185–188. doi: 10.1137/1137049 .

Received April 5, 2019
Revised May 15, 2019
Accepted May 20, 2019

Larisa Andreevna Vlasenko, Dr. Tech. Sci., Prof., Kharkov National University of Radio Electronics, Kharkov, 61166 Ukraine, e-mail: lara@rutrus.com .

Anatolii Georgievich Rutkas, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Kharkov National University of Radio Electronics, Kharkov, 61166 Ukraine, e-mail: anatoly@rutrus.com .

Arkadii Alekseevich Chikrii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ukranian NAS Academician, Glushkov Institute of Cybernetics, Kiev, 03187 Ukraine, e-mail: chik@insyg.kiev.ua .

Cite this article as: L. A. Vlasenko, A. G. Rutkas, A. A. Chikrii. On a differential game in a stochastic system, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 45–61 .