ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977: 534.112

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ НА СКОРОСТИ ТОЧЕК ПРОГИБА В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

В. Р. Барсегян

Рассмотрена задача управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями производной функции прогиба в промежуточные моменты времени. Методом разделения переменных задача сводится к задаче управления со счетным числом обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Задача решается с использованием методов теории управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями. В качестве приложения предложенного подхода построено управляющее воздействие для задачи управления колебаниями струны с заданными неразделенными условиями на значения скорости точек струны в двух промежуточных моментах времени.

Ключевые слова: управление колебаниями, колебание струны, промежуточные моменты, неразделенные многоточечные условия.

V. R. Barseghyan. A control problem for string vibrations with nonseparated conditions on the velocities of deflection points at intermediate times.

We consider the problem of control of string vibrations with given nonseparated values of the derivative of the deflection function at intermediate times. By the method of separation of variables, the problem is reduced to a control problem with countably many ordinary differential equations with given initial, terminal, and nonseparated multipoint intermediate conditions. We solve this problem using the methods of the theory of control of finite-dimensional systems with multipoint intermediate conditions. As an application of the proposed approach, we construct a control action for the problem of control of string vibrations with given nonseparated conditions on the values of the velocities of points of the string at two intermediate times.

Keywords: control of vibrations, string vibrations, intermediate times, nonseparated multipoint conditions.

MSC: 70Q05, 93C20, 93C40

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-24-33

Введение

Большой класс физических процессов, связанных с колебательными системами, моделируется волновым уравнением [1–3], при этом на практике часто возникают задачи управления, когда нужно сгенерировать заданные характеристики колебаний, удовлетворяющих промежуточным условиям. Внимание исследователей привлекли многоточечные краевые задачи управления, в которых наряду с классическими краевыми (начальное и конечное) условиями заданы также неразделенные (нелокальные) многоточечные промежуточные условия [4–15]. С одной стороны, неразделенные многоточечные краевые задачи возникают как математические модели реальных процессов, а с другой стороны, для многих уравнений невозможна корректная постановка локальных краевых задач. Неразделенность многоточечных условий, в частности, обусловлена и невозможностью на практике проводить замеры измеряемых параметров состояния объекта мгновенно или в его отдельно взятых точках. Подобные задачи имеют важное прикладное и теоретическое значение; естественным образом возникает необходимость их исследования в различных постановках.

Задачи управления колебательными процессами как внешними, так и граничными управляющими воздействиями при различных типах граничных условий рассмотрены в [7–14], где предложены различные методы решения задач управления. В работах [7–12] исследуются задачи управления колебаниями струны и мембраны с заданными промежуточными (локальными) состояниями с помощью внешних сил, действующих на системы. В статье [13] анализируется многоточечная краевая задача в полислое и для нее доказывается теорема о существовании корректной краевой задачи. В [14] построены алгоритмы нахождения приближенного решения и установлены условия их сходимости. В работе [15] на основе метода параметризации исследуется линейная многоточечная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений и предложен алгоритм нахождения решения.

В отличие от других работ в настоящей статье рассматривается задача управления для уравнения колебания струны с заданными начальными, конечными условиями и неразделенными значениями скоростей точек струны в промежуточные моменты времени. Методом разделения переменных задача сводится к задаче управления со счетным числом обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Для каждой гармоники построено управляющее воздействие с использованием методов теории управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями. В качестве приложения предложенного конструктивного подхода построено управляющее воздействие для управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями скоростей точек струны в двух промежуточных моментах времени.

1. Постановка задачи

Рассмотрим однородную упругую натянутую струну длиной l, края которой закреплены. Пусть в вертикальной плоскости на струну действуют распределенные силы с плотностью $u(x,t)$, которые являются управляющим воздействием.

Пусть состояния распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания струны), т. е. отклонения от состояния равновесия, описываются функцией $Q(x,t)$, $0 \le x \le l$, $0 < t < T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $0 < t < T$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t) \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{1.2}$$

и однородными граничными условиями

$$Q(0,t) = 0, \quad Q(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{1.3}$$

В уравнении (1.1) $a^2 = T_0/\rho$, где T_0 — натяжение струны, ρ — плотность однородной струны. Функция $Q(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (1.1), дважды непрерывно дифференцируема вплоть до границы области.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T$ на значения производных функции прогиба струны задано неразделенное (нелокальное) условие в виде

$$\sum_{k=1}^{m} e_k \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right|_{t=t_k} = \beta(x), \tag{1.4}$$

где e_k — заданные величины ($k = 1, \ldots, m$), $\beta(x)$ — некоторая известная функция.

Задачу управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями скоростей точек прогиба в промежуточные моменты времени t_k $(k = 1, \dots, m)$ можно сформулировать следующим образом: среди возможных управлений $u(x,t)$, $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$, требуется найти управление, которое переводит колебания струны (1.1) с граничными условиями (1.3) из заданного начального состояния (1.2), обеспечивая удовлетворение неразделенных многоточечных промежуточных условий (1.4), в заданное конечное состояние

$$Q(x,T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \quad \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad 0 \le x \le l. \tag{1.5}$$

Здесь $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_T(x)$, $\psi_T(x)$ и $\beta(x)$ — заданные гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования.

Предполагается, что система (1.1) при ограничениях (1.2)–(1.5) на промежутке времени $[0,\, T]$ является вполне управляемой [5; 16].

2. Решение задачи

Для построения решения поставленной задачи решение уравнения (1.1) с граничными условиями (1.3) ищем в виде

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{2.1}$$

Представим функции $u(x,t)$ и $\beta(x)$ в виде рядов Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{2.2}$$

Подставим разложения (2.1), (2.2) в соотношения (1.1)–(1.5). Далее, в силу ортогональности системы собственных функций получим, что коэффициенты Фурье $Q_n(t)$ удовлетворяют счетному числу систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{Q}_n(t) + \lambda_n^2 Q_n(t) = u_n(t), \quad \lambda_n^2 = \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1,\, 2, \dots, \tag{2.3}$$

и следующим начальным, неразделенным многоточечным промежуточным и конечным условиям:

$$Q_n^{(0)} = \varphi_n^{(0)}, \quad \dot{Q}_n^{(0)} = \psi_n^{(0)}, \tag{2.4}$$

$$\sum_{k=1}^{m} e_k \dot{Q}_n(t_k) = \beta_n, \tag{2.5}$$

$$Q_n(T) = \varphi_n^{(T)} = \varphi_n^{(m+1)}, \quad \dot{Q}_n(T) = \psi_n^{(T)} = \psi_n^{(m+1)}, \tag{2.6}$$

где через $Q_n(t)$, $\varphi_n^{(0)}$, $\psi_n^{(0)}$, $\varphi_n^{(m+1)}$, $\psi_n^{(m+1)}$, $u_n(t)$ и β_n обозначены коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $Q\,(x,t)$, $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_{m+1}(x)$, $\psi_{m+1}(x)$, $u(x,t)$ и $\beta(x)$.

Общее решение уравнения (2.3) с начальными условиями (2.4) и его производная имеют вид

$$Q_n(t) = \varphi_n^{(0)} \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_n^{(0)} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t u_n(\tau) \sin \lambda_n (t - \tau) d\tau,$$

$$\dot{Q}_n(t) = -\lambda_n \varphi_n^{(0)} \sin \lambda_n t + \psi_n^{(0)} \cos \lambda_n t + \int_0^t u_n(\tau) \cos \lambda_n (t - \tau) d\tau. \tag{2.7}$$

Теперь, учитывая промежуточные неразделенные (2.5) и конечные (2.6) условия, из уравнения (2.7) получим, что функции $u_n(\tau)$ для каждого n должны удовлетворять следующей системе равенств:

$$\int\limits_0^T u_n(\tau)\sin\lambda_n(T-\tau)d\tau = C_{1n}(T), \quad \int\limits_0^T u_n(\tau)\cos\lambda_n(T-\tau)d\tau = C_{2n}(T),$$

$$\sum_{k=1}^{m} e_k \int\limits_0^{t_k} u_n(\tau)\cos\lambda_n(t_k-\tau)d\tau = C_{2n}^{(m)}(t_1,\,\ldots,\,t_m), \tag{2.8}$$

где

$$C_{1n}(T) = \lambda_n\varphi_n^{(m+1)} - \lambda_n\varphi_n^{(0)}\cos\lambda_n T - \psi_n^{(0)}\sin\lambda_n T,$$
$$C_{2n}(T) = \psi_n^{(m+1)} + \lambda_n\varphi_n^{(0)}\sin\lambda_n T - \psi_n^{(0)}\cos\lambda_n T,$$
$$C_{2n}^{(m)}(t_1,\,\ldots,\,t_m) = \beta_n - \sum_{k=1}^{m} e_k\big(-\lambda_n\varphi_n^{(0)}\sin\lambda_n t_k + \psi_n^{(0)}\cos\lambda_n t_k\big). \tag{2.9}$$

Введем функции

$$h_{1n}(\tau) = \sin\lambda_n(T-\tau), \quad h_{2n}(\tau) = \cos\lambda_n(T-\tau), \quad 0 \le \tau \le T,$$

$$h_{2n}^{(m)}(\tau) = \sum_{k=1}^{m} e_k h_{2n}^{(k)}(\tau), \quad h_{2n}^{(k)}(\tau) = \begin{cases} \cos\lambda_n(t_k-\tau), \ 0 \le \tau \le t_k, \\ 0, \ t_k < \tau \le t_{m+1} = T. \end{cases} \tag{2.10}$$

Тогда интегральные соотношения (2.8) при помощи функции (2.10) выразим следующим образом:

$$\int\limits_0^T u_n(\tau)h_{1n}(\tau)d\tau = C_{1n}(T),$$

$$\int\limits_0^T u_n(\tau)h_{2n}(\tau)d\tau = C_{2n}(T), \tag{2.11}$$

$$\int\limits_0^T u_n(\tau)h_{2n}^{(m)}(\tau)d\tau = C_{2n}^{(m)}(t_1,\,\ldots,\,t_m), \quad n = 1,\ 2,\ldots\,.$$

Следовательно, для нахождения функции $u_n(\tau)$, $\tau \in [t_0,\,T]$, получим бесконечное семейство интегральных соотношений (2.11).

Введя обозначения

$$H_n(\tau) = \begin{pmatrix} h_{1n}(\tau) \\ h_{2n}(\tau) \\ h_{2n}^{(m)}(\tau) \end{pmatrix}, \quad \eta_n = \begin{pmatrix} C_{1n}(T) \\ C_{2n}(T) \\ C_{2n}^{(m)}(t_1,\,\ldots,\,t_m) \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

запишем интегральные соотношения (2.11) так:

$$\int\limits_0^T H_n(t)u_n(t)dt = \eta_n. \tag{2.13}$$

Из соотношения (2.13) (или (2.11)) следует, что для каждой гармоники движение, описываемое уравнением (2.3) с условиями (2.4)–(2.6), вполне управляемо тогда и только тогда, когда для любого заданного вектора η_n (2.12) можно найти управление $u_n(t)$, $t \in [0,\, T]$, удовлетворяющее условию (2.13) (или (2.11)).

Примем

$$S_n = \int\limits_0^T H_n(t)\,(H_n(t))^T\,dt = \begin{pmatrix} s_{11}^{(n)} & s_{12}^{(n)} & s_{13}^{(n)} \\ s_{21}^{(n)} & s_{22}^{(n)} & s_{23}^{(n)} \\ s_{31}^{(n)} & s_{32}^{(n)} & s_{33}^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Здесь $H_n(t)\,(H_n(t))^T$ — внешнее произведение векторов (здесь и далее буква "T" в верхнем индексе означает операцию транспонирования). Предполагается, что $\det S_n \neq 0$. Тогда, следуя [5; 17], для каждого $n = 1,\ 2, \ldots$ функцию $u_n(t)$, $t \in [0,\, T]$, удовлетворяющую интегральному соотношению (2.13), запишем в виде

$$u_n(t) = (H_n(t))^T\,S_n^{-1}\eta_n + \nu_n(t), \tag{2.15}$$

где $\nu_n(t)$ — некоторая вектор-функция, такая что

$$\int\limits_0^T H_n(t)\nu_n(t)dt = 0.$$

Отметим, что управление $u_n(t)$, $t \in [0,\, T]$, удовлетворяющее условию (2.13) (или (2.11)), существует также тогда, когда ранг матрицы S_n совпадает с рангом расширенной матрицы $\{S_n,\ \eta_n\}$.

Элементы матрицы S_n согласно (2.14) и обозначениям (2.10) имеют следующий вид:

$$s_{11}^{(n)} = \int\limits_0^T (h_{1n}(\tau))^2\,d\tau = \int\limits_0^T (\sin\lambda_n(T-\tau))^2\,d\tau;$$

$$s_{12}^{(n)} = s_{21}^{(n)} = \int\limits_0^T h_{1n}(\tau)h_{2n}(\tau)d\tau = \int\limits_0^T \sin\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(T-\tau)d\tau;$$

$$s_{13}^{(n)} = s_{31}^{(n)} = \int\limits_0^T h_{1n}(\tau)h_{2n}^{(m)}(\tau)d\tau = \int\limits_0^T \sin\lambda_n(T-\tau)\Big(\sum_{k=1}^m e_k h_{2n}^{(k)}(\tau)\Big)d\tau$$

$$= \sum_{k=1}^m e_k \int\limits_0^T \sin\lambda_n(T-\tau)h_{2n}^{(k)}(\tau)d\tau = \sum_{k=1}^m e_k \int\limits_0^{t_k} \sin\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_k-\tau)d\tau; \tag{2.16}$$

$$s_{23}^{(n)} = s_{32}^{(n)} = \int\limits_0^T h_{2n}(\tau)h_{2n}^{(m)}(\tau)d\tau = \int\limits_0^T \cos\lambda_n(T-\tau)\Big(\sum_{k=1}^m e_k h_{2n}^{(k)}(\tau)\Big)d\tau$$

$$= \sum_{k=1}^m e_k \int\limits_0^T \cos\lambda_n(T-\tau)h_{2n}^{(k)}(\tau)d\tau = \sum_{k=1}^m e_k \int\limits_0^{t_k} \cos\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_k-\tau)d\tau;$$

$$s_{22}^{(n)} = \int\limits_0^T (h_{2n}(\tau))^2\,d\tau = \int\limits_0^T (\cos\lambda_n(T-\tau))^2\,d\tau, s_{33}^{(n)} = \int\limits_0^T \Big(h_{2n}^{(m)}(\tau)\Big)^2\,d\tau = \int\limits_0^T \Big(\sum_{k=1}^m e_k h_{2n}^{(k)}(\tau)\Big)^2 d\tau.$$

Отметим, что в соответствии с обозначениями (2.12) получим

$$h_{2n}^{(m)}(t)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m}e_k\cos\lambda_n(t_k-t),\ 0\le t\le t_1,\\ \sum\limits_{k=2}^{m}e_k\cos\lambda_n(t_k-t),\ t_1<t\le t_2,\\ \dots\\ \sum\limits_{k=m-1}^{m}e_k\cos\lambda_n(t_k-t),\ ,t_{m-2}<t\le t_{m-1},\\ e_m\cos\lambda_n(t_m-t),\ t_{m-1}<t\le t_m,\\ 0,\ t_m<t\le t_{m+1}=T.\end{cases}$$

Следовательно, учитывая обозначения (2.10), (2.12), управляющее воздействие $u_n(t)$, $t\in[0,\,T]$, согласно (2.15) представим как

$$u_n(t)=\begin{cases}\Big(\sin\lambda_n(T-t)\quad\cos\lambda_n(T-t)\quad\sum\limits_{k=1}^{m}e_k\cos\lambda_n(t_k-t)\Big)S_n^{-1}\eta_n+\nu_n(t),\ 0\le t\le t_1,\\ \Big(\sin\lambda_n(T-t)\quad\cos\lambda_n(T-t)\quad\sum\limits_{k=2}^{m}e_k\cos\lambda_n(t_k-t)\Big)S_n^{-1}\eta_n+\nu_n(t),\ t_1<t\le t_2,\\ \dots\\ \big(\sin\lambda_n(T-t)\quad\cos\lambda_n(T-t)\quad e_m\cos\lambda_n(t_m-t)\big)\,S_n^{-1}\eta_n+\nu_n(t),\ t_{m-1}<t\le t_m,\\ \big(\sin\lambda_n(T-t)\quad\cos\lambda_n(T-t)\quad 0\big)\,S_n^{-1}\eta_n+\nu_n(t),\ t_m<t\le t_{m+1}=T.\end{cases}\tag{2.17}$$

Подставляя (2.17) в (2.7), получим $Q_n(t)$ на промежутке времени $t\in[0,\,T]$, а из формулы (2.1) и (2.2) выводим функцию $Q\,(x,t)$ прогиба и $u(x,t)$ управления. Таким образом, будем иметь

$$u(x,t)=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(\sin\lambda_n(T-t)\quad\cos\lambda_n(T-t)\quad\sum\limits_{k=1}^{m}e_k\sin\lambda_n(t_k-t)\Big)S_n^{-1}\eta_n+\nu_n(t)\Big]\sin\dfrac{\pi n}{l}x,\\ \hfill 0\le t\le t_1,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(\sin\lambda_n(T-t)\quad\cos\lambda_n(T-t)\quad\sum\limits_{k=2}^{m}e_k\sin\lambda_n(t_k-t)\Big)S_n^{-1}\eta_n+\nu_n(t)\Big]\sin\dfrac{\pi n}{l}x,\\ \hfill t_1<t\le t_2,\\ \dots\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\big[\big(\sin\lambda_n(T-t)\quad\cos\lambda_n(T-t)\quad e_m\sin\lambda_n(t_m-t)\ V\big)\,S_n^{-1}\eta_n+\nu_n(t)\big]\sin\dfrac{\pi n}{l}x,\\ \hfill t_{m-1}<t\le t_m,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\big[\big(\sin\lambda_n(T-t)\quad\cos\lambda_n(T-t)\quad 0\big)\,S_n^{-1}\eta_n+\nu_n(t)\big]\sin\dfrac{\pi n}{l}x,\ t_m<t\le t_{m+1}=T.\end{cases}\tag{2.18}$$

Из этого выражения видно, что управляющее воздействие, решающее поставленную задачу, является кусочно-непрерывной функцией.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *При согласовании исходных данных задачи и выполнении условия управляемости системой* (1.1), *указанных в разд.* 1, *задача управления* (1.1)–(1.5) *имеет кусочно-непрерывное решение, определяемое формулами* (2.18).

3. Пример

Предположим, что $m = 2$ (т. е. $0 < t_1 < t_2 < t_3 = T$), тогда при $\nu_n(t) = 0$ из формулы (2.17) получаем

$$u_n(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \sin\lambda_n(T-t) & \cos\lambda_n(T-t) & e_1\cos\lambda_n(t_1-t) + e_2\cos\lambda_n(t_2-t) \end{pmatrix} S_n^{-1}\eta_n, \ 0 \le t \le t_1, \\ \begin{pmatrix} \sin\lambda_n(T-t) & \cos\lambda_n(T-t) & e_2\cos\lambda_n(t_2-t) \end{pmatrix} S_n^{-1}\eta_n, \ t_1 < t \le t_2, \\ \begin{pmatrix} \sin\lambda_n(T-t) & \cos\lambda_n(T-t) & 0 \end{pmatrix} S_n^{-1}\eta_n, \ t_2 < t \le t_3 = T. \end{cases} \tag{3.1}$$

Согласно формуле (2.16)

$$s_{11}^{(n)} = \frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_n T, \quad s_{12}^{(n)} = s_{21}^{(n)} = \frac{\sin^2\lambda_n T}{2\lambda_n}, \quad s_{22}^{(n)} = \frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_n T,$$

$$s_{13}^{(n)} = s_{31}^{(n)} = e_1\int\limits_0^{t_1}\sin\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_1-\tau)d\tau + e_2\int\limits_0^{t_2}\sin\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_2-\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\left[e_1t_1\sin\lambda_n(T-t_1) + e_2t_2\sin\lambda_n(T-t_2)\right] + \frac{\sin\lambda_n T}{2\lambda_n}\left(e_1\sin\lambda_n t_1 + e_2\sin\lambda_n t_2\right),$$

$$s_{23}^{(n)} = s_{32}^{(n)} = e_1\int\limits_0^{t_1}\cos\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_1-\tau)d\tau + e_2\int\limits_0^{t_2}\cos\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_2-\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n}\left\{\lambda_n\left[e_1t_1\cos\lambda_n(T-t_1) + e_2t_2\cos\lambda_n(T-t_2)\right] + \cos\lambda_n T\left(e_1\sin\lambda_n t_1 + e_2\sin\lambda_n t_2\right)\right\},$$

$$s_{33}^{(n)} = e_1^2\int\limits_0^{t_1}\left(\cos\lambda_n(t_1-\tau)\right)^2 d\tau + 2e_1e_2\int\limits_0^{t_1}\cos\lambda_n(t_1-\tau)\cos\lambda_n(t_2-\tau)d\tau$$

$$+ e_2^2\int\limits_0^{t_2}\left(\cos\lambda_n(t_2-\tau)\right)^2 d\tau = \frac{1}{4\lambda_n}\left[2\lambda_n\left(e_1^2t_1 + e_2^2t_2\right) + 4e_1e_2t_1\lambda_n\cos\lambda_n(t_1-t_2)\right.$$

$$\left. + 4e_1e_2t_2\cos\lambda_n t_2\sin\lambda_n t_1 + e_1^2\sin 2\lambda_n t_1 + e_2^2\sin 2\lambda_n t_2\right].$$

Теперь, предполагая $t_1 = l/a$, $t_2 = 2l/a$, $T = 4l/a$, получим $t_1\lambda_n = \pi n$, $t_2\lambda_n = 2\pi n$, $T\lambda_n = 4\pi n$, следовательно, из вышеприведенных выражений вытекает

$$s_{11}^{(n)} = s_{22}^{(n)} = \frac{2l}{a}, \quad s_{12}^{(n)} = s_{21}^{(n)} = s_{13}^{(n)} = s_{31}^{(n)} = 0,$$

$$s_{23}^{(n)} = s_{32}^{(n)} = \frac{l}{2a}\left[(-1)^n e_1 + 2e_2\right], \quad s_{33}^{(n)} = \frac{l}{2a}\left[e_1^2 + 2e_2^2 + 2(-1)^n e_1e_2\right]$$

или

$$S_n = \begin{pmatrix} \frac{2l}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2l}{a} & \frac{l}{2a}\left[(-1)^n e_1 + 2e_2\right] \\ 0 & \frac{l}{2a}\left[(-1)^n e_1 + 2e_2\right] & \frac{l}{2a}\left[e_1^2 + 2e_2^2 + 2(-1)^n e_1e_2\right] \end{pmatrix}.$$

Отсюда будем иметь $\det S_n = 1/2\,(l/a)^3\left[2e_1^2 + ((-1)^n e_1 + 2e_2)^2\right]$. Ясно, что при $e_1 \neq 0$ и $e_2 \neq 0$ $\det S_n \neq 0$. Следовательно, для обратной матрицы получим

$$S_n^{-1} = \begin{pmatrix} s_{11}^{-(n)} & 0 & 0 \\ 0 & s_{22}^{-(n)} & s_{23}^{-(n)} \\ 0 & s_{32}^{-(n)} & s_{33}^{-(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2a}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{e_1^2 + 2(-1)^n e_1 e_2 + 2e_2^2}{2e_1^2 + [(-1)^n e_1 + 2e_2]^2}\dfrac{2a}{l} & \dfrac{-[(-1)^n e_1 + 2e_2]}{2e_1^2 + [(-1)^n e_1 + 2e_2]^2}\dfrac{2a}{l} \\ 0 & \dfrac{-[(-1)^n e_1 + 2e_2]}{2e_1^2 + [(-1)^n e_1 + 2e_2]^2}\dfrac{2a}{l} & \dfrac{1}{2e_1^2 + [(-1)^n e_1 + 2e_2]^2}\dfrac{8a}{l} \end{pmatrix}.$$

Из (2.12) согласно (2.9) имеем

$$\eta_n = \begin{pmatrix} \eta_1^{(n)} \\ \eta_2^{(n)} \\ \eta_3^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_n\left(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(0)}\right) \\ \psi_n^{(3)} - \psi_n^{(0)} \\ \beta_n - \psi_n^{(0)}\left[(-1)^n e_1 + e_2\right] \end{pmatrix}, \quad S_n^{-1}\eta_n = \begin{pmatrix} s_{11}^{-(n)}\eta_1^{(n)} \\ s_{22}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{23}^{-(n)}\eta_3^{(n)} \\ s_{32}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{33}^{-(n)}\eta_3^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Подставляя значение вектора $S_n^{-1}\eta_n$ в (3.1), а полученное выражение — в (2.2), выводим следующие явные выражения для функции управления $u(x,t)$:

при $0 \le t \le l/a$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[s_{11}^{-(n)}\eta_1^{(n)}\sin\lambda_n(T-t) + \left(s_{22}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{23}^{-(n)}\eta_3^{(n)}\right)\cos\lambda_n(T-t)$$
$$+\left(s_{32}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{33}^{-(n)}\eta_3^{(n)}\right)\left[e_1\cos\lambda_n(t_1-t) + e_2\cos\lambda_n(t_2-t)\right]\Big]\sin\frac{\pi n}{l}x;$$

при $l/a < t \le 2l/a$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[s_{11}^{-(n)}\eta_1^{(n)}\sin\lambda_n(T-t) + \left(s_{22}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{23}^{-(n)}\eta_3^{(n)}\right)\cos\lambda_n(T-t)$$
$$+\left(s_{32}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{33}^{-(n)}\eta_3^{(n)}\right)e_2\cos\lambda_n(t_2-t)\Big]\sin\frac{\pi n}{l}x;$$

при $2l/a < t \le 4l/a$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[s_{11}^{-(n)}\eta_1^{(n)}\sin\lambda_n(T-t) + \left(s_{22}^{-(n)}\eta_2^{(n)} + s_{23}^{-(n)}\eta_3^{(n)}\right)\cos\lambda_n(T-t)\Big]\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Таким образом, имея полученные явные выражения функций управления, с помощью вышеприведенных формул можем найти также функцию прогиба струны.

Заключение

Задача управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями производных функций прогиба в промежуточные моменты времени методом разделения переменных сводится к задаче управления со счетным числом обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Задача решается с использованием методов теории управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями. В качестве приложения предложенного подхода построено управляющее воздействие для колебания струны с заданными неразделенными значениями производной функции прогиба точек струны в двух промежуточных моментах времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бутковский А.Г.** Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
2. **Сиразетдинов Т.К.** Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 480 с.
3. **Знаменская Л.Н.** Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. 176 с.
4. **Ащепков Л.Т.** Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45, вып. 2. С. 215–222.
5. **Барсегян В.Р.** Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.
6. **Барсегян В.Р., Барсегян Т.В.** Об одном подходе к решению задач управления динамическими системами с неразделенными многоточечными промежуточными условиями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 4. С. 3–15.
7. **Барсегян В.Р., Саакян М.А.** Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени // Известия НАН РА. Механика. 2008. Т. 61, № 2. С. 52–60.
8. **Барсегян В.Р.** Об оптимальном управлении колебаниями мембраны при фиксированных промежуточных состояниях // Уч. записки ЕГУ. 1998. №1 (188). С. 24–29.
9. **Барсегян В.Р.** О задаче граничного управления колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени // XI Всерос. съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 20–24 августа 2015 г.): тез. докл. 2015. С. 354–356.
10. **Барсегян В.Р.** Об одной задаче граничного оптимального управления колебаниями струны с ограничениями в промежуточные моменты времени // XI Междунар. Четаевская конф. “Аналитическая механика, устойчивость и управление” (Казань, 13–17 июня 2017 г.): труды. 2017. Т. 3. Ч. I. С. 119–125.
11. **Корзюк В.И., Козловская И.С.** Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. I // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2010. Т. 18, № 2. С. 22–35.
12. **Корзюк В.И., Козловская И.С.** Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2011. Т. 19, № 1. С. 62–70.
13. **Макаров А.А., Левкин Д.А.** Многоточечная краевая задача для псевдодифференциальных уравнений в полислое // Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету iменi В. Н. Каразiна. Серiя : Математика, прикладна математика i механiка. 2014. № 1120, вып. 69. С. 64–74.
14. **Асанова А.Т., Иманчиев А.Е.** О разрешимости нелокальной краевой задачи для нагруженных гиперболических уравнений с многоточечными условиями // Вестн. Караганд. ун-та. Серия Математика. 2016. № 1 (81). С. 15–20.
15. **Бакирова Э.А., Кадирбаева Ж.М.** О разрешимости линейной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2016. № 5. С. 168–175.
16. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением, М.: Наука, 1968. 476 с.
17. **Зубов В.И.** Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.

Поступила 5.07.2019
После доработки 18.07.2019
Принята к публикации 21.07.2019

Барсегян Ваня Рафаелович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий научный сотрудник
Институт механики НАН Армении;
профессор факультета математики и механики
Ереванский государственный университет,
г. Ереван
e-mail: barseghyan@sci.am

REFERENCES

1. Butkovskii A.G. *Metody upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami* [Control methods for systems with distributed parameters]. Moscow: Nauka Publ., 1975, 568 p.
2. Sirazetdinov T.K. *Optimizatsiya sistem s raspredelennymi parametrami* [Optimization of systems with distributed parameters]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 480 p.
3. Znamenskaya L.N. *Upravlenie uprugimi kolebaniyami* [Control of elastic vibrations]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2004, 176 p.
4. Aschepkov L.T. Optimal control of the system with intermediate conditions. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1981, vol. 45, no. 2, pp. 215–222 (in Russian).
5. Barseghyan V.R. *Upravlenie sostavnykh dinamicheskikh sistem i sistem s mnogotochechnymi promezhutochnymi usloviyami* [Control of composite dynamic systems and systems with multipoint intermediate conditions]. Moscow: Nauka Publ., 2016, 230 p. ISBN: 978-5-02-039961-7/hbk .
6. Barseghyan V.R., Barseghyan T.V. On an approach to the problems of control of dynamic system with nonseparated multipoint intermediate conditions. *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 4, pp. 549–559. doi: 10.1134/S0005117915040013 .
7. Barseghyan V.R., Saakyan, M.A. The optimal control of wire vibration in the states of the given intermediate periods of time. *Proc. of NAS RA: Mechanics*, 2008, vol. 61, no. 2, pp. 52–60 (in Russian).
8. Barseghyan V.R. Optimal control of a membrane vibration with fixed intermediate states. *Proc. of Yerevan State University*, 1998, vol. 188, no. 1, pp. 24–29 (in Russian).
9. Barseghyan V.R. On the problem of boundary control of string oscillations with given states at intermediate moments of time. *Proc. XIth All-Russian Congress on Basic Problems of Theoretical and Applied Mechanics* (Kazan, August 20–24), 2015, vol. 1, pp. 354–356 (in Russian).
10. Barseghyan V.R. On one problem of optimal boundaery control of string vibrations with restrictions in the intermediate moment of time. *Proc. 11th Internat. Chetaev Conf. "Analytical mechanics, stability and control"*(Kazan, June 14–18), 2017, vol. 3, part 1, pp. 119–125 (in Russian).
11. Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S. Two-point boundary problem for string oscillation equation with given velocity in arbitrary point of time. I. *Tr. Inst. Mat. NAS of Belarus*, 2010, vol. 18, no. 2, pp. 22–35 (in Russian).
12. Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S. Two-point boundary problem for string oscillation equation with given velocity in arbitrary point of time. II. *Tr. Inst. Mat. NAS of Belarus*, 2011, vol. 19, no. 1, pp. 62–70 (in Russian).
13. Makarov A.A., Levkin D.A. Multipoint boundary value problem for pseudo-differential equations in multilayer. *Vistnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 69, no. 1120, pp. 64–74 (in Ukrainian).
14. Assanova A.T., Imanchiev A.E On the solvability of a nonlocal boundary value problem for a loaded hyperbolic equations with multi-point conditions. *Bulletin of the Karaganda University. Ser.: Mathematics*, 2016, no. 1 (81), pp. 15–25 (in Russian).
15. Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. On a solvability of linear multipoint boundary value problem for the loaded differential equations. *Izvestiya NAS RK. Ser. Fiz.-Mat.*, 2016, vol. 5, no. 309, pp. 168–175 (in Russian).
16. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 476 p.
17. Zubov V.I. *Lektsii po teorii upravleniya* [Lectures on Control Theory]. Moscow: Nauka Publ., 1975, 496 p.

Received July 5, 2019
Revised July 18, 2019
Accepted July 21, 2019

Vanya Rafaelovich Barseghyan, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Leading Scientific Researcher of Institute of Mechanics of NAS of RA; Prof. of Mathematics and Mechanics Department of Yerevan State University, Yerevan, 0025 Armenia; Yerevan, 0019 Armenia, e-mail: barseghyan@sci.am .

Cite this article as: V. R. Barseghyan. A control problem for string vibrations with nonseparated conditions on the velocities of deflection points at intermediate times, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 24–33 .