ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 517.5

АНАЛИЗ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ О НЕРАВЕНСТВЕ ДЖЕКСОНА — СТЕЧКИНА В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА B_2

М. С. Саидусайнов

В работе дано уточнение одной теоремы В. А. Абилова, Ф. В. Абиловой, М. К. Керимова о точной константе в неравенстве типа Джексона между среднеквадратичным приближением функций комплексной переменной рядами Фурье по ортогональной в ограниченной области системе и обобщенным модулем непрерывности порядка $m \geq 1$.

Ключевые слова: обобщенный модуль непрерывности, оператор обобщенного сдвига, ортонормированная система, неравенство Джексона — Стечкина.

M. S. Saidusainov. Analysis of a theorem on the Jackson–Stechkin inequality in the Bergman space B_2.

We present a refinement of a theorem of V. A. Abilov, F. V. Abilova, and M. K. Kerimov on the exact constant in a Jackson type inequality between the mean-square approximation of a function of a complex variable by Fourier series in a system orthogonal in a bounded domain and the generalized modulus of continuity of order $m \geq 1$.

Keywords: generalized modulus of continuity, generalized translation operator, orthonormal system, Jackson–Stechkin inequality.

MSC: 42C10, 47A58

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-217-224

1. Введение

Одной из наиболее важных задач теории приближения функций является задача об отыскании точных констант в неравенствах типа Джексона — Стечкина. Напомним, что под неравенствами Джексона — Стечкина понимают соотношения, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством в заданном нормированном пространстве оценивается через модуль гладкости самой функции или некоторой ее производной. Отметим, что в случае равномерного приближения непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами точная константа в неравенстве Джексона найдена в [1]. Аналогичная задача в случае приближения периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ решена в [2; 3]. В дальнейшем идеи из [2; 3] плодотворно развивалась, например, в работах [4–10].

2. Вспомогательные утверждения

Через $B_2 := B_2(\mathcal{D})$ обозначим пространство Бергмана комплексных функций f, регулярных в односвязной ограниченной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{B_2(\mathcal{D})} = \left(\frac{1}{\pi} \iint\limits_{(\mathcal{D})} |f(z)|^2 \, d\sigma\right)^{1/2},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma = d\sigma(z)$ — здесь и в дальнейшем элемент площади.

Пусть $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормированная система функций в B_2. Если $f \in B_2$, то числа

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{(\mathcal{D})} f(z)\overline{\varphi_k(z)}\, d\sigma \tag{2.1}$$

называются коэффициентами Фурье функции f по отношению к ортонормированной системе $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$. Функции f сопоставляется ее ряд Фурье по указанной ортогональной системе

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\varphi_k(z). \tag{2.2}$$

Пусть

$$S_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f)\varphi_k(z), \quad n \in \mathbb{N},$$

— частичная сумма n-го порядка ряда (2.2). Составим линейную комбинацию первых из n функций системами $\{\varphi_k(z)\}$

$$p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k\varphi_k(z),$$

которую назовем обобщенным полиномом, где $d_k \in \mathbb{C}$ — произвольные комплексные коэффициенты. Хорошо известно, что (см., например, [11, с. 203])

$$E_{n-1}(f)_2 = \inf\{\|f - p_{n-1}\| \colon d_k \in \mathbb{C}\} = \|f - S_{n-1}(f)\| = \Big(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2\Big)^{1/2},$$

где $a_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f, определенные равенством (2.1).

Пусть

$$T(\xi, \eta; h) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi)\overline{\varphi_k(\eta)} h^k, \tag{2.3}$$

где $h \in (0, 1)$, $(\xi, \eta) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, а равенство (2.3) понимается в смысле сходимости в $L_2(\mathcal{D} \times \mathcal{D})$. В пространстве B_2 вслед за [12] рассмотрим введенный авторами оператор обобщенного сдвига

$$F_h f(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{(\mathcal{D})} f(\zeta) T(z, \zeta; 1-h)\, d\sigma(\zeta) \tag{2.4}$$

и разности $\Delta_h^1 f(\tau)$, $\Delta_h^m f(z)$.

Для функции $f \in B_2$ определим конечные разности первого и высших порядков следующим образом:

$$\Delta_h^1 f(z) = F_h f(z) - f(z) = (F_h - \mathbb{I}) f(z),$$

$$\Delta_h^m f(z) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(z)) = (F_h - \mathbb{I})^m f(z) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k F_h^k f(z),$$

где $\Delta_h^m f(z)$ называется *обобщенной* конечной разностью m-го порядка функции $f \in B_2$ посредством оператора обобщенного сдвига $F_h f(z)$; $F_h^0 f(z) = \mathbb{I} f(z) = f(z)$, $F_h^k f(z) = F_h(F_h^{k-1} f(z))$, $k = \overline{1, m}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{I}$ — единичный оператор в пространстве B_2. Пользуясь формулами (2.1) и (2.3), оператор (2.4) представим в виде

$$F_h f(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{(\mathcal{D})} f(\zeta) T(z, \zeta; 1-h)\, d\sigma = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{(D)} f(\zeta) \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z)\bar{\varphi}_k(\zeta)(1-h)^k\Big)\, d\sigma$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \iint\limits_{(D)} f(\zeta)\bar{\varphi}_k(\zeta)\, d\sigma \right) \varphi_k(z)(1-h)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\varphi_k(z)(1-h)^k.$$

Поэтому для разностей первого и высших порядков получаем

$$\Delta_h^1 f(z) = F_h f(z) - f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\varphi_k(z)[(1-h)^k - 1] \tag{2.5}$$

и по индукции

$$\Delta_h^m f(z) = \Delta_h\big(\Delta_h^{m-1} f(z)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\varphi_k(z)[(1-h)^k - 1]^m. \tag{2.6}$$

Величину

$$\Omega_m(f;t)_2 = \sup\left\{ \|\Delta_h^m f\| : 0 < h \le t \right\}$$

будем называть *обобщенным* модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$.

Рассмотрим более подробно случай, когда $\mathcal{D}$ есть единичный круг $U := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$. Очевидно, что в этом случае система функций $\psi(z) = z^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ является ортогональной в круге U:

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{(U)} \psi(z)\overline{\psi_l^*(z)}\, d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{k+l+1} e^{i(k-l)t}\, dr\, dt = 0, \quad k \ne l.$$

Но эта система не является ортонормированной, поскольку

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{(U)} |\psi(z)|^2\, d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{2k+1}\, dr\, dt = \frac{1}{k+1}.$$

Следовательно, система функций $\varphi_k(z) = \sqrt{k+1}\, z^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ является ортонормированной системой. Для ее элементов имеем классическую разность с шагом h

$$\tilde{\Delta}_h^1 \varphi(z) = \varphi_k(z+h) - \varphi_k(z) = \sqrt{k+1}(z+h)^k - \sqrt{k+1}\, z^k$$

$$= \sqrt{k+1} \sum_{l=1}^{k} C_k^l z^{k-l} h^l = \sqrt{k+1}\ h \sum_{l=1}^{k} C_k^l z^{k-l} h^{l-1} = O(h) \ \text{ при } \ h \to 0. \tag{2.7}$$

Перепишем равенство (2.5) в следующем виде:

$$\Delta_h^1 f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\varphi_k(z)((1-h)^k - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\varphi_k(z) \Big(\sum_{j=1}^{k} (-h)^j C_k^j \Big)$$

$$= h \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} a_k(f)\varphi_k(z)(-1)^j C_k^j h^{j-1} = O(h) \ \text{ при } \ h \to 0. \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.8) видно, что разности первого порядка как для классической разности (2.7), так и для обобщенной разности (2.8) имеют одинаковый (первый) порядок малости по h при $h \to 0$, и тем самым оправданы введенные в (2.5) и (2.6) обобщенные разности для любых аналитических функций $f(z)$ и ортогональных в B_2 систем $\{\varphi_k(z)\}$.

В случае приближения в среднем функций комплексной переменной, регулярных в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, рядами Фурье по ортогональной в $\mathcal{D}$ системе функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$

задача отыскания точной константы в неравенстве Джексона — Стечкина изучалась в работе [12]. Там было доказано следующее утверждение.

Теорема [12, теорема 1]. *Для любой функции $f \in B_2$ при любом $h \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \le [1-(1-h)^n]^{-m}\Omega_m(f,h), \quad n=1,2,\dots, \quad m=1,2,\dots,$$

причем при каждом фиксированном n константа в правой части неравенства (10) *уменьшена быть не может.*

3. Основной результат

Понятно, что вышеприведенная теорема содержательна только в том смысле, что при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ параметры n и h должны быть связаны таким образом, что при $n \to \infty$ числа $h = h_n$ должны стремиться к нулю. Иначе, зафиксировав h и устремив n к ∞, получим верное, но грубое неравенство $0 \le \Omega_m(f,h)$, а значит, при любом фиксированном $h \in (0,1)$ и больших (фиксированных) n неравенство также будет грубым. Приводим уточнение вышеприведенного утверждения в случае $m=1$.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in B_2$ при любом $\alpha \in (0,1)$ имеет место точное неравенство*

$$E_{n-1}^2(f) \le \frac{1}{\alpha}\Omega^2\big(f, h_n(\alpha)\big), \tag{3.1}$$

где $h_n = h_n(\alpha) = 1 - \sqrt[n]{1-\sqrt{\alpha}}$. Неравенство (3.1) *обращается в равенство для функции $f_0(z) = \varphi_n(z)$.*

Доказательство. Из равенства (2.5) находим

$$\big\|\Delta_h^1 f\big\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2\big[(1-h)^k - 1\big]^2. \tag{3.2}$$

Откуда имеем

$$\big\|\Delta_h^1 f\big\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2\big[(1-h)^k - 1\big]^2 \ge \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2\big[(1-h)^{2k} - 2(1-h)^k + 1\big]$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2\big[\alpha + (1-\alpha+(1-h)^{2k} - 2(1-h)^k)\big] = \alpha E_{n-1}^2(f) + \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \cdot \mathcal{A}(k,h,\alpha), \tag{3.3}$$

где $\mathcal{A}(k,h,\alpha) = 1-\alpha+(1-h)^{2k} - 2(1-h)^k,\ \alpha \in (0,1)$.

Рассмотрим поведение величины $\mathcal{A}(k,h,\alpha)$ как функции, зависящей от h, при ограничениях $k \ge n$ и $\alpha \in (0,1)$ для параметров k и α. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial h}\mathcal{A}'(k,h,\alpha) = 2k(1-h)^{k-1} - 2k(1-h)^{2k-1} = 2k(1-h)^{k-1}[1-(1-h)^k] > 0.$$

Отсюда видно, что функция $\mathcal{A}(k,h,\alpha)$ при любом $\alpha \in (0,1)$ и любом $k \ge n$ есть возрастающая функция параметра h и меняется при возрастании h на $[0,1]$ от $-\alpha$ до $1-\alpha$. Находим нули $h_k(\alpha)$ функции $\mathcal{A}(k,h,\alpha)$

$$1-\alpha+(1-h)^{2k} - 2(1-h)^k = 0, \quad \text{т. е.} \quad [1-(1-h)^k]^2 = \alpha, \tag{3.4}$$

откуда $h_k = h_k(\alpha) = 1 - \sqrt[k]{1-\sqrt{\alpha}}$. Таким образом $\mathcal{A}(k, h_k(\alpha), \alpha) = 0$ при каждом $k = n, n+1, n+2, \dots$ и $\mathcal{A}(k,h,\alpha) > 0$ при $h > h_k(\alpha)$ в силу возрастания этой функции по h. Значения $h_k(\alpha)$ при $k = n, n+1, n+2, \dots$ убывают: $h_n(\alpha) \ge h_{n+1}(\alpha) \ge h_{n+2}(\alpha) \ge \dots$. Тогда при

$h \geq h_n(\alpha)$ будет $h \geq h_k(\alpha)$ для $k > n$, откуда получаем $\mathcal{A}(k, h, \alpha) \geq 0$ при $h \geq h_n$ и любых $k \geq n$, $\alpha \in (0,1)$ (из-за возрастания этой функции по h). Значит, в силу (3.3) для h_n и α, связанных условием (3.4), имеем оценку

$$\big\|\Delta^1_{h_n(\alpha)} f\big\|_2^2 \geq \alpha E^2_{n-1}(f). \tag{3.5}$$

Отсюда и из определения модуля непрерывности вытекает оценка (3.1). Так как $h_k(\alpha) \to 0$ при $k \to \infty$, то $0 \leq 1 - \sqrt[k]{1-\sqrt{\alpha}} \leq 1$. Поэтому при $h \in (0,1)$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 \big[1 - (1-h)^k\big]^2 < \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f)|^2.$$

Таким образом, ряд, стоящий в левой части последнего соотношения, при $h \in [0,1]$ сходится равномерно, а значит, является непрерывной функцией на отрезке $[0,1]$, в частности,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f)|^2 \big[1 - (1-h_n(\alpha))^k\big]^2 = 0.$$

Следовательно, $\Omega(f, h_n(\alpha))$ равномерно по $\alpha \in [0,1]$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Непосредственным вычислением легко проверить, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ неравенство (11) обращается в равенство для $f(z) = f_n(z) = \varphi_n(z) \in B_2$, так как тогда $E^2_{n-1}(\varphi_n) = \|\varphi_n\|^2 = 1$, а $\|\Delta^1_{h_n(\alpha)}\varphi_n\|^2 = \big((1-h_n(\alpha))^n - 1\big)^2 = \big(\sqrt{\alpha}\big)^2 = \alpha$.

Теорема доказана. □

Рассмотрим класс функций

$$\mathfrak{B}_2 = \Big\{ f(z) \in B_2 \colon \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 k^2\Big)^{1/2} := M(f) < \infty \Big\}.$$

Так как по теореме Лагранжа о среднем имеем

$$\|\Delta^1_h f\|^2 = \sum |a_k(f)|^2 k^2 (1-h_{\text{ср}})^{k-1} h^2 \leq M^2(f) h^2,$$

то для функций $f(z) \in \mathfrak{B}_2$ имеем $\Omega(f,h) \leq M(f)h$.

Теорема 2. *Если $f \in \mathfrak{B}_2$, то при любом $\alpha \in (0,1]$ имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f) \leq M(f) \frac{h_n(\alpha)}{\sqrt{\alpha}},$$

где $h_n(\alpha) = 1 - \sqrt[n]{1-\sqrt{\alpha}}$, $\alpha \in (0,1)$.

Доказательство. Используя неравенство (3.5) и равенство (3.2), получаем

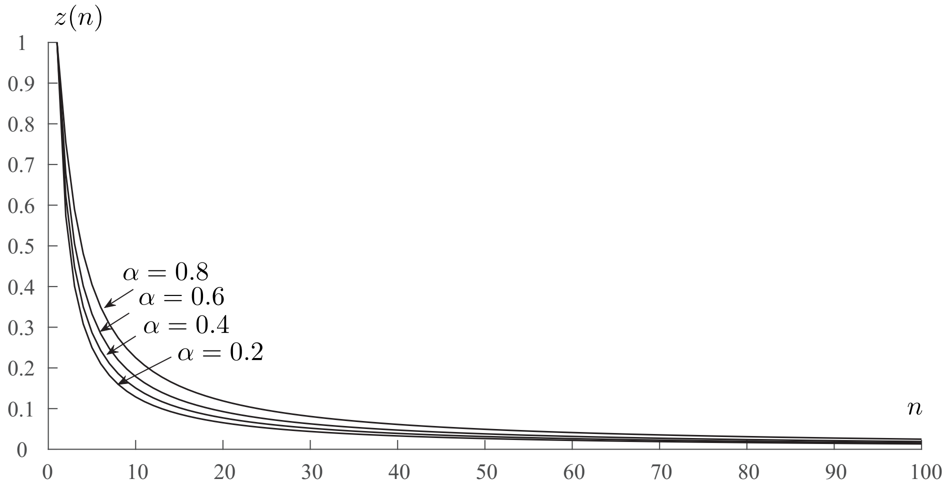
$$E^2_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\alpha} \big\|\Delta^1_{h_n(\alpha)} f\big\|^2 = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 \big[1 - (1-h_n(\alpha))^k\big]^2$$

$$= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 k^2 \frac{[1-(1-h_n(\alpha))^k]^2}{k^2} \leq \frac{1}{\alpha} \max_{k\geq 1} \Big\{ \frac{[1-(1-h_n(\alpha))^k]}{k} \Big\}^2 \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 k^2$$

$$= \frac{1}{\alpha} \max_{k\geq 1} \Big\{ \frac{[1-(1-h_n(\alpha))^k]}{k} \Big\}^2 M^2(f). \tag{3.6}$$

Легко установить, например, обычным образом, считая k непрерывным параметром, при любом $\alpha \in (0,1]$

$$\max_{k\geq 1} \frac{1-(1-h_n(\alpha))^k}{k} = h_n(\alpha). \tag{3.7}$$



Рисунок

Из неравенства (3.6) и равенства (3.7) окончательно имеем

$$E_{n-1}^2(f) \le M^2(f)\frac{h_n^2(\alpha)}{\alpha},$$

и этим теорема доказана. □

Следствие. *Для* $f \in \mathfrak{B}_2$ *имеем*

$$E_{n-1}(f) \le M(f)\inf_{\alpha\in(0,1)}\frac{h_n(\alpha)}{\alpha} = \frac{M(f)}{n}. \tag{3.8}$$

Неравенство (3.8) *обращается в равенство для функции* $f_0(z) = \varphi_n(z)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим поведение отношения $h_n(\alpha)/\sqrt{\alpha}$, как функцию двух переменных от n и α в виде

$$z(n,\alpha) = \frac{1-\sqrt[n]{1-\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha}}, \quad n \in [1,+\infty), \quad \alpha \in (0,1).$$

Очевидно, что при $\alpha \to 1$ $z(n,1) \to 1$. Построим график функции $z(n,\alpha)$ при некоторых фиксированных $\alpha \in (0,1)$ и возрастании значения $n \in [1,+\infty)$ (см. рисунок выше).

При малых значениях $\alpha : \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \dots$ функция $z(n,\alpha)$ принимает малые значения

$$z(n,\alpha_1) < z(n,\alpha_2) < z(n,\alpha_3) < \dots < 1.$$

Вероятно,

$$\inf_{\alpha\in(0,1)}\frac{h_n(\alpha)}{\sqrt{\alpha}} = \lim_{\alpha\to+0}\frac{1-\sqrt[n]{1-\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{n}. \tag{3.9}$$

Сделав замену переменной в (3.9) $1-\sqrt{\alpha} = t^n$, запишем

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{1-\sqrt[n]{1-\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha}} = \inf_{t\in(0,1)}\frac{1-t}{1-t^n} = \inf_{t\in(0,1)}\frac{1-t}{(1-t)(1+t+t^2+\dots+t^{n-1})}$$

$$= \inf_{t\in(0,1)}\frac{1}{1+t+t^2+\dots+t^{n-1}} = \lim_{t\to1}\frac{1}{1+t+t^2+\dots+t^{n-1}} = \frac{1}{n}.$$

Откуда получаем неравенство (3.8). □

Имеет место более общий аналог результата, полученного в теореме 1, для модулей непрерывности порядка m.

Теорема 3. *Для любой функции $f \in B_2$ при любом $n, m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$ имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha^m}}\,\Omega_m(f, h_n(\alpha)), \tag{3.10}$$

где $h_n(\alpha) = 1 - \sqrt[n]{1-\sqrt{\alpha}}$. Неравенство обращается в равенство для функции $f(z) = \varphi_n(z)$ при любых $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in (0,1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя равенство (2.6), запишем

$$\|\Delta_h^m f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 \big[(1-h)^k - 1\big]^{2m} \geq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \big[(1-h)^k - 1\big]^{2m}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \big[\alpha + \big(1 - \alpha + (1-h)^{2k} - 2(1-h)^k\big)\big]^m = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \big[\alpha + \mathcal{A}(k,h,\alpha)\big]^m$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \Bigg\{\sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \alpha^l \big[\mathcal{A}(k,h,\alpha)\big]^{m-l}\Bigg\} = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \Bigg\{\alpha^m + \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} \alpha^l \big[\mathcal{A}(k,h,\alpha)\big]^{m-l}\Bigg\}$$

$$= \alpha^m \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 + \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} \alpha^l \big[\mathcal{A}(k,h,\alpha)\big]^{m-l}$$

$$= \alpha^m E_{n-1}^2(f) + \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2 \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} \alpha^l \big[\mathcal{A}(k,h,\alpha)\big]^{m-l}. \tag{3.11}$$

В силу условия (3.4) для h_n и α из (3.11) получаем

$$\|\Delta_{h_n(\alpha)}^m f\|^2 \geq \alpha^m E_{n-1}^2(f). \tag{3.12}$$

Из (3.12) и определения модуля непрерывности вытекает оценка (3.10). Легко проверить, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$ неравенство (3.10) обращается в равенство для $f(z) = f_n(z) = \varphi_n(z) \in B_2$, $E_{n-1}^2(\varphi_n) = \|\varphi_n\|^2 = 1$, а $\|\Delta_{h_n(\alpha)}^m \varphi_n\|^2 = ((1-h_n(\alpha))^n - 1)^{2m} = (\sqrt{\alpha})^{2m} = \alpha^m$.

Теорема доказана. □

Автор выражает глубокую благодарность профессорам Н. И. Черных и М. Ш. Шабозову за постановку задач и полезные обсуждения при работе над данной статьей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Корнейчук Н.П.** Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН. 1962. Т. 145, № 3. С. 514–515.
2. **Черных Н.И.** О неравенствах Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
3. **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. 1967. Т. 2, № 5. С. 513–522.
4. **Жук В.В.** О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 4. С. 748–750.
5. **Тайков Л.В.** Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности из L_2 // Мат. заметки. 1976. Т. 20, № 3. С. 433–438.
6. **Лигун А.А.** Точные неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1978. Т. 24, № 6. С. 785–792.
7. **Бабенко А.Г.** О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 5. С. 651–664.
8. **Иванов В.И, Смирнов О.И.** Константы Джексона и константы Юнга в пространстве L_p. Тула: Изд-во Тульского ун-та, 1995. 192 с.

9. **Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.** Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки. 2011. Т. 90, № 5. С. 764–775.
10. **Вакарчук С.Б., Забутная В.И.** Неравенства типа Джексона — Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Мат. заметки. 2012. Т. 92, № 4. С. 497–514.
11. **Смирнов В.И., Лебедев Н.А.** Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.; Л.: Наука, 1964, 440 с.
12. **Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К.** Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$ // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 6. С. 999–1004.

Саидусайнов Муким Саидусайнович
канд. физ.-мат. наук
Университет Центральной Азии
г. Душанбе
e-mail: smuqim@gmail.com

Поступила 28.06.2018
После доработки 15.11.2018
Принята к публикации 19.11.2018

REFERENCES

1. Korneichuk N.P. The exact constant in D. Jackson's theorem on best uniform approximation of continuous periodic functions. *Sov. Math., Dokl.*, 1962, vol. 3, pp. 1040–1041.
2. Chernykh N.I. On Jackson's inequality in L_2. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1967, vol. 88, pp. 75–78.
3. Chernykh N.I. Best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in L_2. *Math. Notes.* 1967, vol. 2, no. 5, pp. 803–808. doi: 10.1007/BF01093942 .
4. Zhuk V.V. Some exact inequalities between best approximations and moduli of continuity. *Soviet Math. Dokl.*, 1971, vol. 12, pp. 223–226.
5. Taikov L.V. Inequalities containing best approximations and the modulus of continuity of functions in L_2. *Math. Notes*, 1976, vol. 20, no. 3, pp. 797–800. doi: 10.1007/BF01097254 .
6. Ligun A.A. Some inequalities between best approximation and moduli of continuity in L_2 space. *Math. Notes*, 1978, vol. 24, no. 6, pp. 917–921. doi: 10.1007/BF01140019 .
7. Babenko A.G. The exact constant in the Jackson inequality in L^2. *Math. Notes*, 1986, vol. 39, no. 6, pp. 355–363. doi: 10.1007/BF01156673 .
8. Ivanov V.I, Smirnov O.I. *Konstanty Jeksona i konstanty Yunga v prostranstve L_p* [Jackson and Jung constants in the spaces L_p]. Tula: Tula State University Publ., 1995, 192 p.
9. Shabozov M.S., Yusupov G.A. Best polynomial approximations in L_2 of classes of 2π-periodic functions and exact values of their widths, *Math. Notes*, 2011, vol. 90, no. 5-6, pp. 748–757. doi: 10.1134/S0001434611110125 .
10. Vakarchuk S.B., Zabutnaya V.I. Jackson — Stechkin type inequalities for special moduli of continuity and widths of function classes in the space L_2, *Math. Notes*, 2012, vol. 92, no. 3-4, pp. 458–472. doi: 10.1134/S0001434612090180 .
11. Smirnov V.I., Lebedev N.A. *Functions of a complex variable. Constructive theory.* Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1968, 488 p. ISBN: 9780262190466 . Original Russian text published in Smirnov V.I., Lebedev N.A. *Konstruktivnaya teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo.* Moscow; Leningrad: Nauka Publ., 1964, 440 p.
12. Abilov V.A., Abilova F.V., Kerimov M.K. Sharp estimates for the convergence rate of Fourier series of complex variable functions in $L_2(D, p(z))$. *Comput. Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, no. 6, pp. 946–950. doi: 10.1134/S0965542510060023 .

Received Juny 28, 2018
Revised November 15, 2018
Accepted November 19, 2018

Mukim Saidusainovich Saidusaynov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), University of Central Asia, Dushanbe, SPCE, 734013, Tajikistan, e-mail: smuqim@gmail.com .