Том 23 № 1 2017

УДК 517.27

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫХ СВЕРХУ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, В ВИДЕ НИЖНИХ ОГИБАЮЩИХ СЕМЕЙСТВ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ[1]

В. В. Гороховик

Известно, что вещественнозначная функция, определенная на метрическом пространстве, полунепрерывна сверху (снизу) в том и только том случае, когда она является нижней (верхней) огибающей некоторого семейства непрерывных функций. В статье для функций, определенных на вещественных нормированных пространствах, этот классический результат уточняется следующим образом: ограниченная сверху (снизу) вещественнозначная функция, определенная на нормированном пространстве, полунепрерывна сверху (снизу) тогда и только тогда, когда она может быть представлена как нижняя (верхняя) огибающая семейства выпуклых (вогнутых) функций, удовлетворяющих на всем пространстве условию Липшица. Показано, что для положительно однородных функций требование ограниченности сверху (снизу) может быть опущено: положительно однородная функция, определенная на нормированном пространстве, полунепрерывна сверху (снизу) в том и только том случае, когда она является нижней (верхней) огибающей семейства непрерывных сублинейных (суперлинейных) функций. Данная характеристика распространяет на произвольные нормированные пространства аналогичное утверждение, ранее доказанное В. Ф. Демьяновым и А. М. Рубиновым для положительно однородных функций, определенных на конечномерных пространствах, и распространенное А. Удерзо на случай равномерно выпуклых банаховых пространств. Этот результат позволяет распространить на негладкие функции, определенные на нормированных пространствах, понятия верхнего и нижнего экзостеров, введенные в конечномерных пространствах В. Ф. Демьяновым.

Ключевые слова: полунепрерывные функции, верхние и нижние огибающие, выпуклые и вогнутые функции, условие Липшица, положительно однородные функции.

V. V. Gorokhovik. On the representation of upper semicontinuous functions defined on infinite-dimensional normed spaces as lower envelopes of families of convex functions.

It is well known that a real-valued function defined on a metric space is upper (lower) semicontinuous if and only if it is a lower (upper) envelope of a family of continuous functions. In this paper, for functions defined on real normed spaces, this classical result is refined as follows. An upper (lower) bounded real-valued function defined on a normed space is upper (lower) semicontinuous if and only if it can be represented as a lower (upper) envelope of a family of convex (concave) functions that satisfy the Lipschitz condition on the whole space. It is shown that the requirement of upper (lower) boundedness may be omitted for positively homogeneous functions: a positively homogeneous function defined on a normed space is upper (lower) semicontinuous if and only if it is a lower (upper) envelope of a family of continuous sublinear (superlinear) functions. This characterization extends to arbitrary normed spaces a similar statement proved earlier by V. F. Demyanov and A. M. Rubinov for positively homogeneous functions defined on finite-dimensional spaces and later extended by A. Uderzo to the case of uniformly convex Banach spaces. The latter result allows to extend the notions of upper and lower exhausters introduced by V. F. Demyanov in finite-dimensional spaces to nonsmooth functions defined on arbitrary real normed spaces.

Keywords: semicontinuous functions, upper and lower envelopes, convex and concave functions, Lipschitz continuity, positively homogeneous functions.

MSC: 49J52, 54C35, 26B25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-88-102

Введение

Отправным пунктом для исследований, результаты которых представлены в настоящей статье, явились работы В. Ф. Демьянова и А. М. Рубинова, а также их учеников и последова-

[1]Работа выполнена при поддержке БРФФИ (проект Ф15-035).

телей, посвященные исчерпывающим семействам верхних выпуклых (нижних вогнутых) аппроксимаций и экзостерам положительно однородных функций.

Так, в 1982 г. В. Ф. Демьянов и А. М. Рубинов [1, теорема 2.1] (см. также [2, лемма 4.3]) доказали, что для того чтобы вещественнозначная положительно однородная функция, определенная на $\mathbb{R}^n$, была полунепрерывной сверху (снизу), необходимо и достаточно, чтобы она была нижней (верхней) огибающей некоторого семейства таких ее сублинейных мажорант (суперлинейных минорант), которые принимают конечные значения на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Такие семейства, в терминологии Демьянова — Рубинова, называются исчерпывающими семействами верхних выпуклых (нижних вогнутых) аппроксимаций. Используя данную характеристику (полу)непрерывных положительно однородных функций и классическую двойственность Минковского, В. Ф. Демьянов [3;4] построил для таких функций двойственные им объекты, которые он назвал *экзостерами*, и тем самым фактически распространил двойственность Минковского на существенно более общие функции, чем сублинейные или даже разностно-сублинейные. Экзостеры, являясь двойственными объектами по отношению к полунепрерывным положительно однородным функциям, могут эффективно использоваться для их глобального анализа. Что же касается произвольных вещественнозначных функций, то в том случае, когда они являются в том или ином смысле дифференцируемыми по направлениям, экзостеры, соответствующие производным по направлениям, обобщают понятия субдифференциала [5; 6] и квазидифференциала [2; 7] и, следовательно, являются инструментом локального анализа таких функций. Описанная схема использования экзостеров для исследования негладких функций успешно развивалась в последние десятилетия в многочисленных работах, часть из которых указана в библиографических ссылках в статье [8].

В 2000 г. А. Удерзо [9], следуя идейно доказательству из [2], распространил приведенную выше характеристику свойства полунепрерывности на вещественнозначные положительно однородные функции, областью определения которых являются равномерно выпуклые банаховы пространства. Одним из основных результатов настоящей статьи является доказательство того, что данная характеристика полунепрерывности остается справедливой и для положительно однородных функций, определенных на произвольных нормированных пространствах. Данное здесь доказательство этой характеристики (точнее, доказательство ее необходимой части) существенно отличается от соответствующих доказательств из [1; 2] и [9]. Схема нашего доказательства и статьи в целом следующая.

Прежде всего, в разд. 1 мы вводим для множеств, принадлежащих векторному пространству, понятие выпуклой компоненты, под которой понимается максимальное (по включению) выпуклое подмножество данного множества, и доказываем, что рецессивный конус любого непустого множества совпадает с пересечением рецессивных конусов его выпуклых компонент. Как показано в статье [10], телесность рецессивного конуса является характеристическим признаком глобальной эпилипшицевости множества. Этим признаком мы пользуемся в дальнейшем для характеристики надграфиков (подграфиков) функций, удовлетворяющих условию Липшица.

В разд. 2 для функций, определенных на вещественных векторных пространствах и принимающих значения в расширенной вещественной прямой, вводятся понятия минимальных выпуклых мажорант и максимальных вогнутых минорант, которые распространяют на функции понятие выпуклой компоненты множества. Так, выпуклые компоненты надграфика функции являются надграфиками минимальных выпуклых мажорант, а выпуклые компоненты подграфика — подграфиками максимальных вогнутых минорант. Доказывается (теорема 2.1), что любая функция, которая не принимает значение $-\infty$, в частности, любая вещественнозначная функция, определенная на векторном пространстве, является точной нижней огибающей семейства всех ее минимальных выпуклых мажорант, а любая функция, которая не принимает значение $+\infty$, — точной верхней огибающей семейства всех ее максимальных вогнутых минорант. Недостатком такого представления функций в виде точных огибающих является то, что даже в случае, когда рассматриваемая функция принимает только конечные вещественные значения, среди ее минимальных выпуклых мажорант и среди максимальных вогнутых минорант могут содержаться такие, которые принимают бесконечные значения. Вместе с тем, как показано в теореме 2.2, вещественнозначная функция, определенная на нормированном векторном пространстве, удовлетворяет на всем пространстве условию Липшица в том и только том случае, когда любая ее минимальная выпуклая мажоранта (или, эквивалентно, любая ее максимальная вогнутая миноранта) принимает только конечные вещественные значения и удовлетворяет на всем пространстве условию Липшица, причем множество констант Липшица, соответствующих всем минимальным выпуклым мажорантам (максимальным вогнутым минорантам), ограничено сверху. Естественно возникает вопрос: а нельзя ли охарактеризовать класс таких вещественнозначных функций, определенных на нормированном векторном пространстве, которые являются нижними (верхними) огибающими семейств вещественнозначных выпуклых (вогнутых) функций, удовлетворяющих на всем пространстве условию Липшица? Частичный ответ на этот вопрос дается в разд. 3 в теореме 3.2. Как установлено в этой теореме, классу таких функций принадлежат все ограниченные сверху (снизу) вещественнозначные функции, которые являются полунепрерывными сверху (снизу) на всем пространстве. В разд. 4 показано, что если ограничиться рассмотрением только положительно однородных функций, то данный класс можно охарактеризовать полностью. Так, в теореме 4.3 установлено, что для того чтобы вещественнозначная положительно однородная функция, определенная на нормированном векторном пространстве, была полунепрерывной сверху (снизу) на всем пространстве, необходимо и достаточно, чтобы она была нижней (верхней) огибающей некоторого семейства таких ее сублинейных мажорант, которые принимают только конечные вещественные значения и являются непрерывными (равносильно, удовлетворяют условию Липшица) на всем пространстве. Таким образом, эта теорема решает поставленную в самом начале данного введения задачу о распространении на произвольные нормированные пространства характеристики полунепрерывных функций, установленной ранее В. Ф. Демьяновым и А. М. Рубиновым [1; 2] для конечномерных нормированных пространств, а А. Удерзо [9] для равномерно выпуклых банаховых пространств. Самостоятельный интерес представляет также теорема 4.2, в соответствии с которой вещественнозначная положительно однородная функция, определенная на нормированном пространстве, является полунепрерывной сверху (снизу) в том и только том случае, когда она является нижней (верхней) огибающей невозрастающей (неубывающей) последовательности вещественнозначных положительно однородных функций, удовлетворяющих на всем пространстве условию Липшица.

Перейдем к детальному изложению результатов статьи.

1. Выпуклые компоненты и рецессивный конус множества

Пусть X — вещественное векторное пространство, Q — произвольное множество из X.

Любое максимальное (в смысле включения) выпуклое подмножество множества Q будем называть *выпуклой компонентой множества* Q.

Существование выпуклых компонент для произвольного непустого множества Q следует из леммы Цорна [11]. Действительно, так как любое одноточечное множество из X выпукло, то совокупность всех выпуклых подмножеств, принадлежащих непустому множеству Q, непуста. Кроме того, поскольку для любой цепи выпуклых подмножеств из Q объединение составляющих ее подмножеств также является выпуклым подмножеством множества Q, то совокупность всех выпуклых подмножеств, принадлежащих непустому множеству Q, индуктивно упорядочена по возрастанию в смысле отношения включения. Следовательно, в силу леммы Цорна семейство максимальных выпуклых подмножеств (выпуклых компонент) множества Q непусто и, более того, для любого выпуклого подмножества из Q существует содержащее его максимальное выпуклое подмножество (выпуклая компонента) множества Q. Совокупность всех выпуклых компонент множества Q обозначим через $\sigma(Q)$.

Сказанное выше сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 1.1. *Семейство выпуклых компонент $\sigma(Q)$ произвольного непустого множества $Q \subset X$ непусто, при этом для любого выпуклого подмножества C, принадлежащего Q, существует выпуклая компонента $S \in \sigma(Q)$ множества Q такая, что $C \subset S$. Более того, справедливо равенство*

$$Q = \bigcup \{S \mid S \in \sigma(Q)\}, \tag{1.1}$$

т. е. семейство выпуклых компонент $\sigma(Q)$ является покрытием множества Q.

Доказательство. Справедливость равенства (1.1) вытекает из того, что любое одноточечное множество выпукло и, следовательно, содержится в некоторой выпуклой компоненте. □

В случае, когда множество $Q \subset X$ является *конусом*, т. е. множество Q таково, что из $x \in Q$ следует $\lambda x \in Q$ для любого $\lambda > 0$, то любая его выпуклая компонента также есть (выпуклый) конус.

Если X является отделимым (хаусдорфовым) топологическим векторным пространством, а Q — замкнутое подмножество из X, то любая выпуклая компонента множества Q также является замкнутым множеством.

По-видимому, впервые семейства максимальных выпуклых подмножеств множества использовались для глобального анализа данного множества еще в тридцатые годы прошлого века Ф. А. Валентайном в монографии [12]. Равенство (1.1) было установлено ранее С. Р. Смитом в небольшой заметке [13]. Выпуклыми компонентами максимальные выпуклые подмножества названы в статье [14], посвященной невыпуклым полиэдральным множествам.

Покажем, что рецессивный конус любого множества есть пересечение рецессивных конусов всех его выпуклых компонент.

Напомним, что вектор $y \in X$ определяет рецессивное направление для подмножества Q векторного пространства X, если $x + ty \in Q$ для всех $x \in Q$ и всех $t \in [0, +\infty)$.

Совокупность всех векторов, которые определяют рецессивные направления для множества Q, будем обозначать символом Q^∞. Нетрудно проверить, что Q^∞ является заостренным ($0 \in Q^\infty$) выпуклым конусом, причем для любого собственного подмножества $Q \subset X$ справедливо равенство $Q^\infty = \{y \in X \mid -y \in (X \setminus Q)^\infty\}$, т. е. $Q^\infty = -(X \setminus Q)^\infty$. Распространяя это равенство на несобственные подмножества, полагаем $\varnothing^\infty = X$.

Теорема 1.2. *Для любого непустого множества Q вещественного векторного пространства X справедливо равенство*

$$Q^\infty = \bigcap \{S^\infty \mid S \in \sigma(Q)\}.$$

Доказательство. Пусть $y \in Q^\infty$ и пусть $S \in \sigma(Q)$. Рассмотрим множество $S_1 := \{z = x + ty \mid x \in S, t \in [0, +\infty)\}$. Нетрудно проверить, что множество S_1 является выпуклым, принадлежит Q и, кроме того, $S \subset S_1$. Вследствие максимальности S заключаем, что $S = S_1$ и, значит, $x + ty \in S$ для всех $x \in S$ и всех $t \in [0, +\infty)$. Таким образом, $y \in S^\infty$ для всех $S \in \sigma(Q)$.

Обратно, если $y \in \bigcap \{S^\infty \mid S \in \sigma(Q)\}$, то из равенства $Q = \bigcup \{S \mid S \in \sigma(Q)\}$ легко следует, что $x + ty \in Q$ для всех $x \in Q$ и всех $t \in [0, +\infty)$, т. е. $y \in Q^\infty$. Теорема доказана.

Следует отметить, что в качестве объекта, характеризующего строение неограниченных множеств на бесконечности, рецессивный конус Q^∞ часто используется в выпуклом и нелинейном анализе (см., например, [6; 15]).

2. Минимальные выпуклые мажоранты и максимальные вогнутые миноранты функций

Пусть X — вещественное векторное пространство и пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — функция, определенная на X и принимающая значения в расширенной вещественной прямой $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Множества $\operatorname{epi} f := \{(x,\alpha) \in X \times \mathbb{R} \,|\, f(x) \le \alpha\}$ и $\operatorname{hypo} f := \{(x,\alpha) \in X \times \mathbb{R} \,|\, f(x) \ge \alpha\}$ называются соответственно *надграфиком* и *подграфиком* функции f.

Функцию $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ будем называть *l-собственной*, если $f(x) > -\infty$ для всех $x \in X$ и ее надграфик $\operatorname{epi} f$ есть непустое множество в $X \times \mathbb{R}$. Если же $f(x) < +\infty$ для всех $x \in X$ и подграфик $\operatorname{hypo} f$ есть непустое множество в $X \times \mathbb{R}$, то функцию $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ будем называть *u-собственной*.

Функция $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *выпуклой*, если она является l-собственной и

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) \text{ для всех } x,\, y \in X \text{ и всех } \lambda \in [0,\,1],$$

или, эквивалентно, φ выпукла, если $\varphi(x) > -\infty$ для всех $x \in X$ и ее надграфик $\operatorname{epi}\varphi$ есть непустое выпуклое множество в $X \times \mathbb{R}$.

Функция $\psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *вогнутой*, если $-\psi$ является выпуклой функцией или, эквивалентно, если $\psi(x) < +\infty$ для всех $x \in X$ и ее подграфик $\operatorname{hypo}\psi$ является непустым выпуклым множеством в $X \times \mathbb{R}$.

Выпуклая функция $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *выпуклой мажорантой* функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, если $\operatorname{epi}\varphi \subset \operatorname{epi} f$ или, эквивалентно, если $f(x) \le \varphi(x)$ для всех $x \in X$.

Минимальной выпуклой мажорантой функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ будем называть такую ее выпуклую мажоранту $\varphi_0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$, которая является минимальной (в смысле поточечного упорядочения функций, определенных на X и принимающих значения в $\overline{\mathbb{R}}$) в семействе всех выпуклых мажорант функции f, т. е. такую выпуклую мажоранту φ_0 функции f, для которой не существует другой выпуклой мажоранты φ функции f, отличной от φ_0 и удовлетворяющей неравенству $\varphi(x) \le \varphi_0(x)$ для всех $x \in X$.

Семейство всех минимальных выпуклых мажорант функции f будем обозначать ниже символом $\Sigma(f)$.

Теорема 2.1. *Для любой l-собственной функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, определенной на векторном пространстве X, семейство ее минимальных выпуклых мажорант $\Sigma(f)$ является непустым, при этом*

$$f(x) = \min_{\varphi\in\Sigma(f)} \varphi(x) \text{ для всех } x \in X. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим семейство $\sigma(\operatorname{epi} f)$, состоящее из выпуклых компонент надграфика функции f. Так как вектор $(0_X,\, 1) \in X \times \mathbb{R}$ (0_X — нулевой вектор пространства X) принадлежит рецессивному конусу $(\operatorname{epi} f)^\infty$ надграфика f, то в силу теоремы 1.2 $(0_X,\, 1) \in T^\infty$ для любого $T \in \sigma(\operatorname{epi} f)$. Поскольку функция f является l-собственной и $T \subset \operatorname{epi} f$, то для любой точки $x \in X$ либо прямая $\{x\} \times \mathbb{R} := \{(x,\,\gamma)\} \,|\, \gamma \in \mathbb{R}\}$ не пересекается с T, либо их пересечение есть непустой бесконечный полуинтервал, который неограничен сверху и такой, что $f(x) \le \inf\{\gamma \,|\, (x,\,\gamma) \in T\}$. Следовательно, каждая выпуклая компонента $T \in \sigma(\operatorname{epi} f)$ надграфика функции f определяет на X выпуклую функцию $\varphi_T : x \to \varphi_T(x) := \inf\{\gamma \,|\, (x,\,\gamma) \in T\}$ (по общепринятому соглашению $\inf\varnothing = +\infty$). Из включения $T \subset \operatorname{epi} f$ заключаем, что $f(x) \le \varphi_T(x)$ для всех $x \in X$, т. е. функция φ_T является выпуклой мажорантой функции f, причем, вследствие того что T есть выпуклая компонента надграфика f, φ_T есть минимальная (по отношению поточечного упорядочения) выпуклая мажоранта функции f. Таким образом, семейство минимальных выпуклых мажорант функции f является непустым.

Из того что в силу теоремы 1.1 семейство выпуклых компонент $\sigma(\operatorname{epi} f)$ образует покрытие надграфика $\operatorname{epi} f$, вытекает, что для каждой точки $x \in X$ найдется выпуклая компонента $T_x \in \sigma(\operatorname{epi} f)$, содержащая $(x,\, f(x))$. Следовательно, для каждой точки $x \in X$ имеем $f(x) = \varphi_{T_x}(x)$. Из этого заключаем, что $f(x) = \min\limits_{T\in\sigma(\operatorname{epi} f)} \varphi_T(x)$ для всех $x \in X$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. Из доказательства теоремы 2.1 следует, что выпуклая функция $\varphi_0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ является минимальной выпуклой мажорантой l-собственной функции f в том и только том случае, когда ее надграфик $\operatorname{epi}\varphi_0$ является выпуклой компонентой надграфика $\operatorname{epi} f$ функции f.

Заметим также, что даже в том случае, когда функция $f : X \to \mathbb{R}$ принимает всюду на X конечные вещественные значения, среди ее минимальных выпуклых мажорант могут быть и такие, которые принимают на некоторой части пространства X значение $+\infty$. Например, функции

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 = 0, \\ +\infty, & \text{если } x_1 \neq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \varphi_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_2 = 0, \\ +\infty, & \text{если } x_2 \neq 0, \end{cases}$$

принимающие значение $+\infty$, являются минимальными выпуклыми мажорантами функции $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|}$. Нетрудно видеть, что если их удалить из $\Sigma(f)$, то равенство (2.1) не будет выполняться на прямых $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.

Теорема 2.2. *Пусть X — нормированное пространство и пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на X и принимающая значения в $\mathbb{R}$. Для того чтобы функция f удовлетворяла на всем пространстве X условию Липшица с константой $L > 0$, необходимо и достаточно, чтобы все минимальные выпуклые мажоранты функции f также принимали конечные вещественные значения для всех $x \in X$ и удовлетворяли на X условию Липшица с константой, не превосходящей L.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что функция $f : X \to \mathbb{R}$ удовлетворяет на X условию Липшица с константой $L > 0$ в том и только том случае, когда выпуклый конус $E_L := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid L\|x\| \leq \alpha\}$ принадлежит рецессивному конусу $(\operatorname{epi} f)^\infty$ ее надграфика $\operatorname{epi} f$. Так как в силу теоремы 1.2 $(\operatorname{epi} f)^\infty = \bigcap\{T^\infty \mid T \in \sigma(\operatorname{epi} f)\}$, где $\sigma(\operatorname{epi} f)$ — семейство выпуклых компонент надграфика $\operatorname{epi} f$, то включение $E_L \subset (\operatorname{epi} f)^\infty$ эквивалентно условию, что $E_L \subset T^\infty$ для всех $T \in \sigma(\operatorname{epi} f)$. Поскольку (см. замечание 2.1) выпуклые компоненты надграфика $\operatorname{epi} f$ и только они являются надграфиками минимальных выпуклых мажорант функции f, то последнее условие равносильно тому, что $E_L \subset (\operatorname{epi}\varphi)^\infty$ для всех $\varphi \in \Sigma(f)$, а это, в свою очередь, равносильно тому, что каждая минимальная выпуклая мажоранта функции f удовлетворяет на X условию Липшица с константой Липшица, не превосходящей L. Теорема доказана.

Двойственным по отношению к минимальным выпуклым мажорантам является понятие максимальных вогнутых минорант функции.

Вогнутая функция $\psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *вогнутой минорантой* функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, если $\operatorname{hypo}\psi \subset \operatorname{hypo} f$ или, эквивалентно, если $\psi(x) \leq f(x)$ для всех $x \in X$.

Максимальной вогнутой минорантой функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ будем называть такую ее вогнутую миноранту, которая является максимальной (в смысле поточечного упорядочения функций, определенных на X и принимающих значения в $\overline{\mathbb{R}}$) в семействе всех вогнутых минорант функции f, т.е. такую вогнутую миноранту ψ_0 функции f, для которой не существует другой вогнутой миноранты ψ функции f, отличной от ψ_0 и удовлетворяющей неравенству $\psi(x) \geq \psi_0(x)$ для всех $x \in X$.

В качестве следствия теорем 2.1 и 2.2 получаем аналогичные утверждения для *u*-собственных функций.

Теорема 2.3. *Любая u-собственная функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, определенная на векторном пространстве X, может быть представлена в виде*

$$f(x) = \max_{\varphi \in \Xi(f)} \varphi(x) \ \text{\textit{для всех}}\ x \in X,$$

где $\Xi(f)$ — семейство всех максимальных вогнутых минорант функции f.

Если X — нормированное пространство, то вещественнозначная функция $f : X \to \mathbb{R}$ удовлетворяет на всем пространстве X условию Липшица с константой $L > 0$ в том и *только том случае, когда все максимальные вогнутые миноранты функции f принимают конечные вещественные значения для всех $x \in X$ и удовлетворяют на X условию Липшица с константой, не превосходящей L.*

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательства теорем 2.1 и 2.2, с заменой в рассуждениях надграфика функции f на ее подграфик. □

3. Представление полунепрерывных сверху (снизу) функций в виде огибающих семейств вещественнозначных выпуклых мажорант (вогнутых минорант), удовлетворяющих условию Липшица

Как следует из теорем 2.1 и 2.3, любая l-собственная функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ является точной нижней огибающей семейства всех ее минимальных выпуклых мажорант, а любая u-собственная функция — точной верхней огибающей всех ее максимальных вогнутых минорант. Как показывает пример функции $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|}$, даже в том случае, когда рассматриваемая функция f принимает только конечные вещественные значения, среди ее минимальных выпуклых мажорант, а также среди ее максимальных вогнутых минорант могут быть такие, которые принимают бесконечные значения. В то же время если функция вещественнозначна и удовлетворяет на всем пространстве условию Липшица, то в силу теоремы 2.3 все ее минимальные выпуклые мажоранты и все максимальные вогнутые миноранты также принимают только вещественные значения и удовлетворяют на всем пространстве условию Липшица.

Основная цель настоящего раздела — выделить класс таких вещественнозначных функций $f : X \to \mathbb{R}$, определенных на нормированном векторном пространстве X, которые являются нижней (не обязательно точной) огибающей некоторого семейства Φ, состоящего из выпуклых функций, принимающих на X конечные значения и удовлетворяющих условию Липшица, т. е. класс таких функций f, для которых найдется описанное выше семейство Φ такое, что

$$f(x) = \inf_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Ключевую роль при этом будут играть теоремы 2.1–2.3, а также следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть X — метрическое пространство и пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — ограниченная сверху (снизу) вещественнозначная функция, определенная на X. Для того чтобы f была полунепрерывной сверху (снизу) на X, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде поточечного предела невозрастающей (неубывающей) последовательности вещественнозначных функций, удовлетворяющих на X условию Липшица.*

Доказательство. Докажем утверждение для полунепрерывных сверху функций.

Достаточность. Предположим, что функция $f : X \to \mathbb{R}$ представима в виде $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\forall\, x \in X$, где $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}$ — невозрастающая последовательность функций, удовлетворяющих условию Липшица на X и, следовательно, непрерывных на X. Вследствие того что для каждого x числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ является невозрастающей, ее предел равен точной нижней грани, т. е. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ $\forall\, x \in X$. Как нижняя огибающая семейства непрерывных функций, функция f является полунепрерывной сверху (см., например, [16]).

Необходимость. Так как функция f ограничена сверху на X, то для некоторого вещественного числа M имеем $f(x) \le M$ $\forall\, x \in X$.

Для каждого вещественного числа $k > 0$ определим функцию

$$f_k(x) = \sup_{y \in X} \left(f(y) - kd(y, x) \right), \tag{3.1}$$

где $d : X \times X \to \mathbb{R}$ — функция расстояния на X.

Непосредственно из определения функции f_k видим, что $M \geq f_k(x) \geq f(x)\ \forall\ x \in X$ (второе неравенство получим, положив в (3.1) $y = x$.)

Для любых точек $x_1, x_2, y \in X$ имеем $f(y) - kd(y, x_1) \geq f(y) - kd(y, x_2) - kd(x_2, x_1)$. Переходя в обеих частях последнего неравенства к точной верхней грани по y и умножая на -1, выводим $f_k(x_2) - f_k(x_1) \leq kd(x_1, x_2)$. Меняя x_1 и x_2 местами, окончательно получаем

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| \leq kd(x_1, x_2).$$

Следовательно, при каждом $k > 0$ функция f_k удовлетворяет на X условию Липшица с константой Липшица $L = k$.

Нетрудно видеть также, что если $0 < k_1 \leq k_2$, то $f_{k_2}(x) \leq f_{k_1}(x)\ \forall\ x \in X$. Следовательно, семейство функций $\{f_k, k > 0\}$ является невозрастающим по k.

Поскольку $f_k(x) \geq f(x)\ \forall\ x \in X$, то $\lim\limits_{k \to +\infty} f_k(x) = \inf\limits_{k>0} f_k(x) \geq f(x)\ \forall\ x \in X$. Покажем, что верно и обратное неравенство $f(x) \geq \inf\limits_{k>0} f_k(x)\ \forall\ x \in X$, и, таким образом, установим равенство $f(x) = \inf\limits_{k>0} f_k(x)\ \forall\ x \in X$.

Зафиксируем $\bar{x} \in X$ и положим, что k принимает значения из множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. Для каждого $k = n \in \mathbb{N}$ выберем точку $y_n \in X$ такую, что

$$f(y_n) - nd(y_n, \bar{x}) \geq f_n(\bar{x}) - \frac{1}{n}.$$

Так как $M \geq f(x)\ \forall\ x \in X$ и $f_n(x) \geq f(x)\ \forall\ x \in X$, то $nd(y_n, \bar{x}) \leq M - f_n(\bar{x}) + \dfrac{1}{n} \leq M - f(\bar{x}) + 1$, откуда следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} d(y_n, \bar{x}) = 0$ и, значит, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \bar{x}$.

Воспользуемся далее неравенством

$$f(y_n) \geq f(y_n) - nd(y_n, \bar{x}) \geq f_n(\bar{x}) - \frac{1}{n}.$$

Так как функция f полунепрерывна сверху на X, то

$$f(\bar{x}) \geq \limsup_{y \to \bar{x}} f(y) \geq \limsup_{n \to +\infty} f(y_n) \geq \lim_{n \to \infty} f_n(\bar{x}) - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(\bar{x}) = \inf_{k>0} f_k(\bar{x}).$$

В силу произвольного выбора $\bar{x} \in X$ заключаем, что $f(x) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)\ \forall\ x \in X$.

Таким образом, необходимая часть критерия полунепрерывности сверху ограниченных сверху функций, а следовательно, и критерий в целом доказаны.

Если $f : X \to \mathbb{R}$ — ограниченная снизу функция, то, применив к $-f$ доказанный критерий полунепрерывности сверху, придем к сформулированному в теореме критерию полунепрерывности снизу ограниченных снизу функций. Теорема доказана.

Как оказалось, данное здесь доказательство необходимой части теоремы 3.1 содержится, фактически, в книге [17, с. 238].[2] Однако там оно приводится как доказательство того, что всякая полунепрерывная снизу функция, которая, кроме того, ограничена снизу, принадлежат первому классу Бэра, т. е. является поточечным пределом (неубывающей) последовательности непрерывных функций. Данное доказательство воспроизводится здесь, чтобы показать, что на самом деле сходящаяся последовательность может быть выбрана так, что каждая входящая в нее функция не просто непрерывна, а удовлетворяет условию Липшица.

Теорема 3.2. *Пусть X — нормированное векторное пространство и пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция, определенная на X.*

[2]Автор благодарен В. А. Мильману, который обратил его (автора) внимание на русский перевод книги Ф. Хаусдорфа [17].

(i) Если функция f ограничена сверху, то для того чтобы f была полунепрерывной сверху на всем пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде

$$f(x) = \inf_{\varphi \in \Phi(f)} \varphi(x) \text{ для всех } x \in X, \tag{3.2}$$

где $\Phi(f)$ – некоторое семейство выпуклых мажорант функции f, принимающих конечные вещественные значения для всех $x \in X$ и удовлетворяющих на X условию Липшица.

(ii) Если функция f ограничена снизу, то для того чтобы f была полунепрерывной снизу на всем пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде

$$f(x) = \sup_{\psi \in \Psi(f)} \psi(x) \text{ для всех } x \in X,$$

где $\Psi(f)$ – некоторое семейство вогнутых мажорант функции f, принимающих конечные вещественные значения для всех $x \in X$ и удовлетворяющих на X условию Липшица.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся только доказательством утверждения (i), поскольку утверждение (ii) может быть получено как следствие (i) или же доказано по той же схеме.

Достаточность. Так как функции семейства $\Phi(f)$ непрерывны, то из представления функции f в виде (3.2) следует, что f полунепрерывна сверху.

Необходимость. Если ограниченная сверху функция f является, кроме того, полунепрерывной сверху, то в силу теоремы 3.1 для нее можно указать невозрастающую последовательность вещественнозначных функций $\{f_n\}$, удовлетворяющих на X условию Липшшица и такую, что

$$f(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \ \forall \ x \in X. \tag{3.3}$$

Воспользовавшись далее теоремой 2.1, представим каждую функцию f_n данной последовательности в виде

$$f_n(x) = \min_{\varphi \in \Sigma(f_n)} \varphi(x) \text{ для всех } x \in X, \tag{3.4}$$

где $\Sigma(f_n)$ — семейство минимальных выпуклых мажорант функции f_n, которые в силу теоремы 2.2 принимают на X конечные вещественные значения и удовлетворяют на всем пространстве X условию Липшица.

Положим $\Phi(f) := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Sigma(f_n)$. Так как $f \leq f_n \ \forall \ n$ и $f_n \leq \varphi \ \forall \ \varphi \in \Sigma(f_n)$, то любая функция $\varphi \in \Phi(f)$ является выпуклой мажорантой функции f, удовлетворяющей условию Липшица. Кроме того, из (3.3) и (3.4) получаем требуемое для f представление

$$f(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \min_{\varphi \in \Sigma(f_n)} \varphi(x) = \inf_{\varphi \in \Phi(f)} \varphi(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Необходимость доказана.

4. Полунепрерывные сверху (снизу) положительно однородные функции как огибающие семейств непрерывных сублинейных мажорант (суперлинейных минорант)

Напомним, что функция $p : X \to \overline{\mathbb{R}}$, определенная на векторном пространстве X и принимающая значения в расширенной вещественной прямой $\overline{\mathbb{R}}$, называется *положительно однородной*, если

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \text{ для всех } x \in X \text{ и всех } \lambda > 0. \tag{4.1}$$

Из (4.1) следует, что в точке $x = 0$ положительно однородная функция может принимать одно из следующих трех значений: либо 0, либо $+\infty$, либо $-\infty$. Условимся, что ниже мы будем рассматривать только такие положительно однородные функции $p : X \to \mathbb{R}$, для которых $p(0) = 0$.

Выпуклая положительно однородная функция $p : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *сублинейной*, а вогнутая положительно однородная функция $p : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — *суперлинейной*.

Напомним, что в соответствии с определением выпуклые, и, следовательно, сублинейные функции являются l-собственными, а суперлинейные — u-собственными.

Теорема 4.1. *Любая минимальная выпуклая мажоранта l-собственной положительно однородной функции является сублинейной функцией, а любая максимальная вогнутая миноранта u-собственной положительно однородной функции — суперлинейной функцией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем утверждение только для минимальных выпуклых мажорант l-собственной положительно однородной функции. Поскольку надграфик $\operatorname{epi} p$ l-собственной положительно однородной функции p есть конус, не содержащий вертикальных прямых, то каждая выпуклая компонента надграфика p является выпуклым конусом, не содержащим вертикальных прямых, и, следовательно, соответствующая ей (выпуклой компоненте) минимальная выпуклая мажоранта, является выпуклой положительно однородной функцией, т. е. сублинейной. Теорема доказана.

Из теорем 2.1 и 4.1 следует, что *для любой l-собственной положительно однородной функции $p : X \to \overline{\mathbb{R}}$ существует такое семейство Φ, состоящее из сублинейных функций, определенных на X и принимающих значения в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, что*

$$p(x) = \min_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Этот факт ранее был установлен другим методом М. Кастеллани [18; 19].

Вместе с тем В. Ф. Демьянов и А. М. Рубинов [1; 2] доказали, что для любой полунепрерывной сверху положительно однородной функции $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенной на конечномерном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ и принимающей конечные вещественные значения при всех $x \in \mathbb{R}^n$, можно указать такое семейство Φ сублинейных мажорант, что

$$p(x) = \inf_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) \text{ для всех } x \in X,$$

при этом Φ состоит только из таких сублинейных функций $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которые также принимают конечные значения на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. А. Удерзо [9] распространил этот результат на случай, когда областью определения вещественнозначной полунепрерывной снизу функции $p : X \to \mathbb{R}$ является равномерно выпуклое банахово пространство X.

В настоящем разделе будет показано, что данное утверждение справедливо также для вещественнозначных полунепрерывных сверху положительно однородных функций, определенных на произвольном нормированном пространстве X.

Начнем со следующей теоремы.

Теорема 4.2. *Пусть X — нормированное векторное пространство. Для того чтобы вещественнозначная положительно однородная функция $p : X \to \mathbb{R}$ была полунепрерывной сверху (снизу) на X, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде поточечного предела невозрастающей (неубывающей) последовательности вещественнозначных положительно однородных функций, удовлетворяющих на X условию Липшица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что данная теорема, хотя и похожа по формулировке на теорему 3.1, не является ее прямым следствием, поскольку, во-первых, положительно однородная функция p не предполагается ограниченной сверху (снизу) и, во-вторых, из теоремы 3.1 следует только то, что полунепрерывная сверху (снизу) положительно однородная функция является поточечным пределом невозрастающей (неубывающей) последовательности липшицевых функций, которые, вообще говоря, могут не быть положительно однородными. Покажем, какие дополнения следует внести в доказательство теоремы 3.1, чтобы убедиться в справедливости теоремы 4.2. Заметим, что такие дополнения требуются лишь в доказательстве необходимой части теоремы. Рассмотрим случай полунепрерывной сверху положительно однородной функции $p : X \to \mathbb{R}$.

Если вещественнозначная функция $p : X \to \mathbb{R}$ является полунепрерывной сверху на всем пространстве X, то она полунепрерывна сверху в точке $x = 0$ и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $p(x) \leq p(0) + \varepsilon = \varepsilon$ для всех $x \in B_\delta(0)$. Откуда получаем, что $p(x) \leq \dfrac{\varepsilon}{\delta}\|x\|$ для все $x \in X$. Значит, $p(x) \leq M\|x\|$ для всех $x \in X$, где M — некоторое положительное вещественное число.

Так же, как и при доказательстве теоремы 3.1, для каждого вещественного числа $k > 0$ по функции p определим на X функцию

$$p_k : x \to p_k(x) := \sup_{y \in Y}(p(y) - k\|y - x\|).$$

Поскольку p положительно однородна, то для всех $x \in X$ и всех $\lambda > 0$ справедливо равенство

$$p_k(\lambda x) = \sup_{y \in X}(p(y) - k\|y - \lambda x\|) = \lambda \sup_{y \in X}(p(\lambda^{-1}y) - k\|\lambda^{-1}y - x\|) = \lambda p_k(x),$$

из которого следует, что p_k также положительно однородная функция. Кроме того, как было показано при доказательстве теоремы 3.1, при любом $k > 0$ функция p_k является липшицевой на X и удовлетворяет для всех $x \in X$ неравенству $p(x) \leq p_k(x)$. Если же $k > M$, то справедливо и неравенство $p_k(x) \leq M\|x\|$ для всех $x \in X$. Следовательно, при каждом $k > M$ функция p_k принимает конечные вещественные значения. При доказательстве теоремы 3.1 было показано также то, что построенное семейство функций $\{p_k,\, k > 0\}$ является невозрастающим по k на $(0, +\infty)$.

В связи с тем, что для любого $x \in X$ числовая функция $k \to p_k(x)$ ограничена снизу числом $p(x)$, существует предел $\lim\limits_{k \to \infty} p_k(x)$, причем

$$\lim_{k \to \infty} p_k(x) = \inf_{k > 0} p_k(x) \geq p(x) \text{ для всех } x \in X. \tag{4.2}$$

Покажем, что неравенство в (4.2) выполняется на самом деле при всех $x \in X$ как равенство.

Докажем сначала, что для любого заданного $x \in X$ и любого числа $k > M$ множество

$$\mathcal{L}_\alpha(x, k) = \{y \in X \mid p(y) - k\|y - x\| \geq \alpha\}$$

является непустым, замкнутым и ограниченным при любом $\alpha \leq p(x)$. Непосредственно из определения множества $\mathcal{L}_\alpha(x, k)$ видно, что при любом $\alpha \leq p(x)$ оно содержит точку x и, соответственно, является непустым. Замкнутость множества $\mathcal{L}_\alpha(x, k)$ следует из полунепрерывности сверху функции $y \to p(y) - k\|y - x\|$.

Для доказательства ограниченности $\mathcal{L}_\alpha(x, k)$ предположим противное. Тогда найдется последовательность $\{y_n\} \subset \mathcal{L}_\alpha(x, k)$ такая, что $\|y_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$. Без ограничения общности мы можем считать, что $y_n \neq 0 \ \forall\, n$. Из неравенства $\alpha \leq p(y_n) - k\|y_n - x\| \leq M\|y_n\| - k\|y_n - x\|$ имеем

$$\frac{\alpha}{\|y_n\|} \leq M - k\Big\|\frac{y_n}{\|y_n\|} - \frac{x}{\|y_n\|}\Big\|,$$

откуда получаем

$$\frac{\alpha}{\|y_n\|} \leq M - k\Big(1 - \frac{\|x\|}{\|y_n\|}\Big).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, выводим неравенство $0 \leq M - k$, которое противоречит выбору k.

Полученное противоречие доказывает ограниченность множества $\mathcal{L}_\alpha(x, k)$.

Зафиксируем $k^* > M$ и рассмотрим произвольную точку $\bar{x} \in X$. Поскольку $p_k(\bar{x}) = \sup\limits_{y \in X}(p(y) - k\|y - \bar{x}\|)$, то для любого k существует точка $y_k := y_k(\bar{x}) \in X$ такая, что

$$p(y_k) - k\|y_k - \bar{x}\| > p_k(\bar{x}) - \frac{1}{k}. \tag{4.3}$$

Из этого неравенства для любого $k \geq k^*$ имеем

$$p(y_k) - k^*\|y_k - \bar{x}\| \geq p(y_k) - k\|y_k - \bar{x}\| \geq p_k(\bar{x}) - \frac{1}{k} \geq p(\bar{x}) - 1. \tag{4.4}$$

Последнее неравенство показывает, что при $k \geq k^*$ точка y_k принадлежит множеству $\mathcal{L}_{p(\bar{x})-1}(\bar{x}, k^*)$, которое, как это было установлено выше, является замкнутым и ограниченным, и, следовательно, последовательность $\{y_k\}$ также является ограниченной. Покажем, что последовательность $\{y_k\}$ сходится при $k \to \infty$ к точке $\bar{x}$.

Из неравенств (4.4) имеем $p(y_k) - k\|y_k - \bar{x}\| \geq p(\bar{x}) - 1$, откуда, учитывая, что $p(x) \leq p_k(x) \leq p_{k^*}(x)$ для всех $x \in X$, получаем

$$k\|y_k - \bar{x}\| \leq p_{k^*}(y_k) - p(\bar{x}) + 1. \tag{4.5}$$

Поскольку функция p_{k^*} является липшицевой и, следовательно, непрерывной, то из ограниченности последовательности $\{y_k\}$ вытекает ограниченность последовательности $\{p_{k^*}(y_k)\}$. Из (4.5) заключаем, что последовательность $\{k\|y_k - \bar{x}\|\}$ также является ограниченной, а это, в свою очередь, влечет $y_k \to \bar{x}$ при $k \to \infty$.

Воспользуемся далее неравенством $p(y_k) \geq p_k(\bar{x}) - \dfrac{1}{k}$, которое следует из (4.3). Учитывая равенство $\inf\limits_{k \geq k^*} p_k(x) = \lim\limits_{k \to \infty} p_k(x)$ и то, что функция p полунепрерывна сверху на X, получаем

$$p(\bar{x}) \geq \limsup_{y \to \bar{x}} p(y) \geq \limsup_{k \to \infty} p(y_k) \geq \lim_{k \to \infty}\left(p_k(\bar{x}) - \frac{1}{k}\right) = \inf_{k \geq k^*} p_k(\bar{x}).$$

В силу произвольного выбора точки $\bar{x} \in X$ из последнего неравенства и неравенства (4.2) заключаем, что $p(x) = \lim\limits_{k \to \infty} p_k(x) = \inf\limits_{k > 0} p_k(x)$ для всех $x \in X$. Теорема доказана.

Теорема 4.3. *Пусть X — произвольное нормированное пространство. Для того чтобы вещественнозначная положительно однородная функция $p : X \to \mathbb{R}$ была полунепрерывной сверху (снизу) на X, необходимо и достаточно, чтобы она была нижней (верхней) огибающей некоторого семейства ее непрерывных сублинейных мажорант (суперлинейных минорант), принимающих конечные значения на всем X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 3.2, но на первом этапе доказательства необходимости вместо теоремы 3.1 надо воспользоваться теоремой 4.2 и учесть в окончательной формулировке, что липшицевость сублинейных функций на всем пространстве X эквивалентна их непрерывности на X. □

В заключение отметим, что теорема 4.3 позволяет распространить понятие экзостера, введенное В. Ф. Демьяновым [3] в конечномерных пространствах, не только на полунепрерывные положительно однородные функции, определенные на равномерно выпуклых банаховых пространствах, как это сделал А. Удерзо в [9], но и на полунепрерывные положительно однородные функции, определенные на любом нормированном пространстве. Для этого надо воспользоваться тем, что каждой непрерывной сублинейной функции $\varphi : X \to \mathbb{R}$, определенной на нормированном пространстве X, в силу классической двойственности Минковского соответствует w^*-слабо компактное выпуклое подмножество $\partial\varphi \subset X^*$ (X^* — пространство непрерывных линейных функционалов на X) такое, что

$$\varphi(x) = \max_{x^* \in \partial\varphi} \langle x,\, x^* \rangle \text{ для всех } x \in X,$$

где $\langle \cdot,\, \cdot \rangle$ — билинейная форма, приводящая X и X^* в двойственность.

Используя эту двойственность и теорему 4.3, каждой полунепрерывной сверху положительно однородной функции $p : X \to \mathbb{R}$, определенной на произвольном нормированном пространстве X, может быть поставлено в соответствие семейство $E^*(p)$, состоящее из w^*-слабо компактных выпуклых подмножеств пространства X^*, такое, что

$$p(x) = \inf_{A \in E^*(p)} \max_{x^* \in A} \langle x,\, x^* \rangle \text{ для всех } x \in X.$$

Данное семейство $E^*(p)$ является, если следовать терминологии В. Ф. Демьянова, верхним экзостером функции p.

Подобным образом, используя классическую двойственность Минковского и теорему 4.3, для каждой полунепрерывной снизу положительно однородной функции, определенной на нормированном пространстве, может быть определен нижний экзостер Демьянова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.** Элементы квазидифференциального исчисления // Негладкие задачи теории оптимизации и управления. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. С. 5–127.
2. **Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.
3. **Demyanov V.F.** Exhausters of a positively homogeneous function // Optimization. 1999. Vol. 45, no. 1. P. 13–29.
4. **Demyanov V.F.** Exhausters and convexificators — new tools in nonsmooth analysis // Quasidifferentiability and Related Topics / eds. V. F. Demyanov, A. M. Rubinov. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. P. 85–137. (Nonconvex Optim. Appl.; vol. 43). doi: 10.1007/978-1-4757-3137-8_4.
5. **Пшеничный Б.Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
6. **Рокафеллар Р.Т.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
7. **Гороховик В.В.** Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации. Минск: Наука и техника, 1990. 239 с.; 2-е изд.: Москва: УРСС, 2012. 256 с.
8. **Gorokhovik V.V., Trafimovich M.F.** Positively homogeneous functions revisited // J. Optim. Theory Appl. 2016. Vol. 171, no. 2. P. 481–503. doi: 10.1007/s10957-016-0891-4.
9. **Uderzo A.** Convex approximators, convexificators and exhausters: applications to constrained extremum problems // Quasidifferentiability and Related Topics / eds. V. F. Demyanov, A. M. Rubinov. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. P. 297–327. (Nonconvex Optim. Appl.; vol. 43). doi: 10.1007/978-1-4757-3137-8_12.
10. **Гороховик В.В., Гороховик С.Я.** Критерий глобальной эпилипшицевости множеств // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1995. № 1. С. 118–120.
11. **Келли Дж.Л.** Общая топология. М.: Наука, 1981. 432 с.
12. **Valentine A.F.** Convex Sets. New York: McGraw-Hill Book Company, 1964. 238 p.
13. **Smith C.R.** A characterization of star-shaped sets // American Math. Monthly. 1968. Vol. 75, no. 4. P. 386.
14. **Gorokhovik V.V., Zorko O.I.** Piecewise affine functions and polyhedral sets // Optimization. 1994. Vol. 31, no. 2. P. 209–221. doi: 10.1080/02331939408844018.
15. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкий, В. Я. Стеценко. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. 456 с.
16. **Бурбаки Н.** Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства: Сводка результатов: Словарь. М.: Наука, 1975. 408 с.
17. **Хаусдорф Ф.** Теория множеств. М.; Л.: Объединен. науч.-техн. изд-во НКТП СССР. Гл. ред. техн.-теорет. лит., 1937. 304 с.

18. **Castellani M.** A dual representation for proper positively homogeneous functions // J. Global Optim. 2000. Vol. 16, no. 4. P. 393–400. doi: 10.1023/A:1008394516838.
19. **Castellani M.** Dual representation of classes of positively homogeneous functions // Quasidifferentiability and Related Topics / eds. V. F. Demyanov, A. M. Rubinov. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. P. 73–84. (Nonconvex Optim. Appl.; vol. 43). doi: 10.1007/978-1-4757-3137-8_3.

Гороховик Валентин Викентьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор,
чл.-корр. НАН Беларуси
зав. отделом
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: gorokh@im.bas-net.by

Поступила 28.10.2016

REFERENCES

1. Dem'yanov V.F., Rubinov A.M. *Elementy kvazidifferentsial'nogo ischisleniya* [Elements of quasidifferential calculus]. In: Negladkie zadachi teorii optimizatsii i upravleniya [Nonsmooth problems of optimization theory and control], Leningrad: Leningrad University Press, 1982, pp. 5–127.
2. Dem'yanov V.F., Rubinov A.M. *Osnovy negladkogo analiza i kvazidifferentsial'noe ischislenie* [Foundations of nonsmooth analysis and quasidifferential calculus]. Moscow: Nauka Publ., 1990, 432 p.
3. Demyanov V.F. Exhausters of a positively homogeneous function. *Optimization*, 1999, vol. 45, no. 1, pp. 13–29.
4. Demyanov V.F. Exhausters and convexificators — new tools in nonsmooth analysis. *Quasidifferentiability and Related Topics*, eds. V. F. Demyanov, A. M. Rubinov, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000, Ser. Nonconvex Optim. Appl., vol. 43, pp. 85–137. doi: 10.1007/978-1-4757-3137-8_4.
5. Pshenichny B.N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex analysis and extremal problems]. Moscow : Nauka Publ., 1980, 320 p.
6. Rockafellar R.T. *Convex analysis.* Princeton: Princeton University Press, 1970, 260 p. Translated under the title *Vypuklyi analiz*, Moskow: Mir Publ., 1973, 469 p.
7. Gorokhovik V.V. *Vypuklye i negladkie zadachi vektornoi optimizatsii* [Convex and nonsmooth vector optimization problems]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1990, 239 p.; 2nd ed.: Moscow: URSS Publ., 2012, 256 p.
8. Gorokhovik V.V., Trafimovich M.F. Positively homogeneous functions revisited *J. Optim. Theory Appl.*, 2016, vol. 171, no. 2, pp. 481–503. doi: 10.1007/s10957-016-0891-4.
9. Uderzo A. Convex approximators, convexificators and exhausters: applications to constrained extremum problems. *Quasidifferentiability and Related Topics*, eds. V. F. Demyanov, A. M. Rubinov, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000, Ser. Nonconvex Optim. Appl., vol. 43, pp. 297–327. doi: 10.1007/978-1-4757-3137-8_12.
10. Gorokhovik V.V., Gorokhovik S.Ya. The global criterion of epilipschitzness of sets. *Proc. AS of Belarus, Ser. Fiz.-Mat. Nauk.*, 1995, no. 1, pp. 118–120 (in Russian).
11. Kelley J.L. *General topology.* New York: Springer-Verlag, 2nd printing 1975, Ser. Graduate Texts in Mathematics, vol. 27, 298 p. Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moskow, Nauka Publ., 1984, 432 p.
12. Valentine A.F. Convex Sets. New York: McGraw-Hill Book Company, 1964, 238 p.
13. Smith C.R. A characterization of star-shaped sets. *American Math. Monthly*, 1968, vol. 75, no. 4, p. 386.
14. Gorokhovik V.V., Zorko O.I. Piecewise affine functions and polyhedral sets. *Optimization*, 1994, vol. 31, no. 2, pp. 209–221. doi: 10.1080/02331939408844018.
15. Krasnosel'skii M.A., Vainikko G.M., Zabreiko P.P., Rutitskii Ya.B., Stetsenko V.Ya. *Approximate solution of operator equations.* Groningen: Wolters-Noordhoff, 1972, 484 p. doi: 10.1007/978-94-010-2715-1. Original Russian text published in *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenii*, Moskow: Nauka Publ., 1969, 456 p.
16. Bourbaki N. *Éléments de Mathématique, Premièr partie, Livre III, volume Topologie Générale.* HERMANN, troisième édition. 1960. Translated under the title *Obshchaya topologiya. Ispol'zovanie veshchestvennykh chisel v obshchei topologii. Funktsional'nye prostranstva. Svodka rezul'tatov. Slovar'.* Moskow: Nauka Publ., 1975, 408 p.

17. Hausdorff F. *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig: von Veit, 1914. *Mengenlehre. 2nd ed.* Berlin, Leipzig: Walter de Gruyter, 1927, 285 p. Translated under the title *Teorija mnozhestv.* Moskow, Leningrad: Gl. red. tehn.-teoret. lit., 1937, 304 p.
18. Castellani M. A dual representation for proper positively homogeneous functions. *J. Global Optim*, 2000, vol. 16, no. 4, pp. 393–400. doi: 10.1023/A:1008394516838.
19. Castellani M. Dual representation of classes of positively homogeneous functions. *Quasidifferentiability and Related Topics*, eds. V. F. Demyanov, A. M. Rubinov, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000, Ser. Nonconvex Optim. Appl., vol. 43, pp. 73–84. doi: 10.1007/978-1-4757-3137-8_3.

V. V. Gorokhovik, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of NAS of Belarus, Prof., Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, 220072 Minsk,
e-mail: gorokh@im.bas-net.by