ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

ВЕРХНЯЯ И НИЖНЯЯ РАЗРЕШАЮЩИЕ ФУНКЦИИ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

А. А. Чикрий

Рассматриваются игровые задачи о сближении траекторий нестационарной квазилинейной системы с переменным цилиндрическим терминальным множеством. Исследуется ситуация, когда не имеет места классическое условие Понтрягина. С помощью введения верхних и нижних разрешающих функций как селекторов специальных многозначных отображений получены достаточные условия разрешимости задач, которые отличаются от уже известных. Результаты иллюстрируются на модельном примере.

Ключевые слова: конфликтно-управляемый процесс, многозначное отображение, условие Понтрягина, интеграл Ауманна, разрешающая функция.

A. A. Chikrii. Upper and lower resolving functions in dynamic game problems.

The paper deals with game problems on the approach of trajectories of a nonstationary quasilinear system to a variable cylindrical terminal set. The case is studied when Pontryagin's classical condition fails. The notions of upper and lower resolving functions are introduced in the form of selections of special set-valued mappings. These functions are used to derive sufficient solvability conditions, which differ from the known ones. The results are illustrated with a model example.

Keywords: conflict-controlled process, set-valued mapping, Pontryagin's condition, Aumann's integral, resolving function.

MSC: 49N70, 91A25, 49N90, 91A23

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-293-305

Введение

Математическая теория управления и теория динамических игр располагают широким спектром фундаментальных методов исследования управляемых эволюционных процессов различной природы. Ключевая роль в этой системе знаний принадлежит уральской научной школе, основанной Н. Н. Красовским [1–3], создавшим ряд классических методов в данной области. Сегодня его ученики [4–9] возглавляют авторитетные научные коллективы, работают в различных уголках мира и продолжают удерживать ведущие позиции.

Крупный вклад в становление и развитие указанного научного направления внесли, в частности, Н. Н. Субботина [10; 11] и В. Н. Ушаков [12; 13]. Их труды, посвященные изучению вязкостных решений уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса, построению стабильных мостов, и связанные с этими проблемами аналитические результаты вошли в сокровищницу мировой науки.

Данная работа примыкает к упомянутым исследованиям. Она посвящена изучению нестационарных игровых задач динамики на основе первого прямого метода Понтрягина [14; 15] и метода разрешающих функций [16–19]. Рассматривается случай, когда условие Понтрягина не имеет места. В этой ситуации вместо селектора Понтрягина, которого не существует, рассматривается некоторая функция сдвига, а с ее помощью вводятся специальные многозначные отображения. Они порождают верхние и нижние разрешающие функции двух типов, через которые формулируются достаточные условия завершения игры за некоторое гарантированное время. Дается сравнение уже упомянутых методов. Результаты иллюстрируются на модельном примере с простыми движениями игроков.

1. Постановка задачи

Динамика конфликтно-управляемого процесса в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ задается системой квазилинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi\,(t, u, v)\,, \quad z\,(t_0) = z_0, \quad t \geq t_0 \geq 0. \tag{1.1}$$

Здесь $A(t)$ — матричная функция порядка n, элементы которой являются измеримыми функциями; они к тому же суммируемы на любом конечном интервале $[t_0, T]$, $t_0 < T < +\infty$. Управляющие параметры игроков u и v в каждый момент времени выбираются из областей управления $U(t)$ и $V(t)$ соответственно, которые являются измеримыми компактнозначными отображениями с образами в $\mathbb{R}^n$ при $t \in [t_0, +\infty)$. Вектор-функция $\varphi\,(t, u, v)$ — блок управления — удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по t и непрерывна по совокупности (u, v) на соответствующих областях определения. Кроме того, будем предполагать, что

$$\|\varphi(t, u, v)\| \leq c(t) \ \text{ при } \ u \in U(t), \quad v \in V(t), \quad t \in [t_0, +\infty), \tag{1.2}$$

где $c(t)$ — некоторая локально суммируемая функция.

Вместе с нестационарной динамической системой (1.1) задано цилиндрическое терминальное множество

$$M^*(t) = M_0 + M(t), \quad t \in [t_0, +\infty)\,, \tag{1.3}$$

где M_0 — линейное подпространство из $\mathbb{R}^n$, а $M(t)$ — измеримое компактнозначное отображение, образы которого принадлежат ортогональному дополнению L к M_0 в $\mathbb{R}^n$.

Определим информированность обоих игроков в процессе игры. Второй игрок в качестве допустимого управления выбирает произвольные измеримые селекторы многозначного отображения $V(t)$. Поскольку это отображение измеримо и замкнутозначно, то в силу теоремы об измеримом выборе [20, p. 308] такие селекторы существуют; их совокупность обозначим через Ω_E. Если первый игрок в момент t, $t \geq t_0$, имеет информацию о начальном состоянии процесса (t_0, z_0) и предыстории управления второго игрока

$$v_t(\cdot) = \{v(s)\colon v(s) \in V(s), \quad s \in [t_0, t]\}\,,$$

т. е. $u(t) = u\,(t_0, z_0, t, v_t(\cdot))$, то будем говорить, что его управление предписано квазистратегией [2]. При этом допустимое управление $u(t)$ обязано быть измеримым селектором отображения $U(t)$.

В случае, когда первый игрок принимает решение в момент t лишь на основе информации о начальном состоянии (t_0, z_0) и мгновенном значении управления второго игрока, т. е. $u(t) = u\,(t_0, z_0, t, v(t))$, то говорят о контруправлении по Н. Н. Красовскому [1], которое предписывается стробоскопической стратегией О. Хайека [21]. Конечно же, и в этом случае $u(t)$ должно быть измеримым селектором отображения $U(t)$. Цель первого игрока — вывести траекторию процесса (1.1) на терминальное множество (1.3), второй игрок этому препятствует. При сделанных предположениях необходимо найти достаточные условия завершения игры (1.1)–(1.3) в пользу первого игрока за некоторое гарантированное время, указав управление первого игрока, которое обеспечивает ему этот результат.

2. Условие Понтрягина. Первый прямой метод

Обозначим через π ортопроектор, который действует из $\mathbb{R}^n$ в L, и введем многозначное отображение

$$\varphi\,(t, U(t), v) = \{\varphi(t, u, v)\colon u \in U(t)\}\,, \quad v \in V(t), \quad t \geq t_0.$$

В силу предположений о параметрах конфликтно-управляемого процесса (1.1)–(1.3) и теоремы о прямом образе [20, p. 314] это отображение измеримо по t и непрерывно по v в метрике Хаусдорфа.

Положим

$$W(t,\tau,v) = \pi\,\Phi(t,\tau)\varphi(\tau,U(\tau),v), \quad W(t,\tau) = \bigcap_{v\in V(\tau)} W(t,\tau,v), \quad t \geq \tau \geq t_0,$$

где $\Phi(t,\tau)$ — переходная матрица однородной системы (1.1) — матрица Коши или матрицант.

Многозначное отображение $W(t,\tau,v)$ является измеримым по τ и непрерывным по v, а отображение $W(t,\tau)$ измеримо по τ и замкнутозначно [20]. Измеримость по τ $W(t,\tau)$ следует из свойств пересечения счетного числа измеримых отображений, а также теоремы Кастена о существовании у измеримого отображения счетного всюду плотного апроксимирующего семейства измеримых селекторов [22, с. 119–121].

У с л о в и е Понтрягина. Многозначное отображение $W(t,\tau)$ имеет непустые образы при $t_0 \leq \tau < t < +\infty$.

В силу условия Понтрягина и свойств многозначного отображения $W(t,\tau)$ в нем существует хотя бы один измеримый по τ селектор — селектор Понтрягина, что позволяет ввести интеграл Ауманна [20] от $W(t,\tau)$.

Положим

$$P\left(t_0,z_0\right) = \left\{t \geq t_0 \colon \pi\Phi(t,t_0)z_0 \in M(t) - \int\limits_{t_0}^{t} W(t,\tau)d\tau\right\} \tag{2.1}$$

и введем функцию

$$p\left(t_0,z_0\right) = \inf\left\{t\colon t\in P\left(t_0,z_0\right)\right\},$$

определяющую наименьшее гарантированное время схемы первого прямого метода Понтрягина [14; 15].

Теорема 1. *Пусть для игровой задачи* (1.1)–(1.3) *выполнено условие Понтрягина,* $P\left(t_0,z_0\right) \neq \varnothing$ *и* $P \in P\left(t_0,z_0\right)$.

Тогда траектория процесса (1.1) *может быть приведена на множество* (1.3) *в момент* P *с помощью некоторого контруправления.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предположений теоремы и включения в соотношении (2.1) имеем

$$\pi\Phi\left(P,t_0\right)z_0 \in M(P) - \int\limits_{t_0}^{P} W(P,\tau)d\tau.$$

Это означает, что существуют такая точка $m \in M(P)$ и, по определению интеграла Ауманна, такой измеримый селектор Понтрягина $\gamma(P,\tau)$, $\tau\in[t_0,P]$, что

$$\pi\Phi\left(P,t_0\right)z_0 = m - \int\limits_{t_0}^{P} \gamma(P,\tau)d\tau. \tag{2.2}$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$U_0(\tau,v) = \left\{u\in U(\tau)\colon \pi\Phi\left(P,t_0\right)\varphi\left(\tau,u,v\right) - \gamma(P,\tau) = 0\right\}, \quad v\in V(\tau), \quad \tau\in[t_0,P]. \tag{2.3}$$

При произвольном допустимом управлении $v(\tau)$, $\tau\in[t_0,P]$, в силу теоремы Филиппова — Кастена [15, с. 375] в нем существует измеримый селектор $u_0(\tau) = u_0\left(\tau,v(\tau)\right)$, $\tau\in[t_0,P]$. Его и выберем в качестве управления первого игрока.

Тогда из формулы Коши для представления проекции решения уравнения (1.1)

$$\pi z(P) = \pi\Phi\,(P, t_0)\, z_0 + \int\limits_{t_0}^{P} \pi\Phi\,(P,\tau)\,\varphi\,(\tau, u_0(\tau), v(\tau))\, d\tau$$

с учетом соотношения (2.2) и равенства в (2.3) получим $\pi z(P) = m \in M(P)$, что и завершает доказательство. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Отметим отдельно, что селектор Понтрягина $\gamma(P,\tau)$ определяется в схеме доказательства и связан соотношением (2.2).

3. Верхние и нижние разрешающие функции

Далее условие Понтрягина не предполагается выполненным и, следовательно, селектор Понтрягина не существует. Его роль будет выполнять некоторая специальная функция. Обозначим

$$\Delta(t_0) = \{(t,\tau)\colon t_0 \le \tau \le t < +\infty\}\,.$$

Пусть $\gamma(t,\tau)$, $\gamma : \Delta(t_0) \to L$, — почти везде ограниченная измеримая по t функция, суммируемая по τ, $\tau \in [t_0, t]$, для каждого t, $t \ge t_0$. Назовем ее *функцией сдвига* и зафиксируем в дальнейшем. Обозначим

$$\xi(t) = \xi\,(t, t_0, z_0, \gamma(t,\cdot)) = \pi\Phi(t,t_0)z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \gamma(t,\tau)d\tau$$

и рассмотрим многозначное отображение

$$\begin{gathered}\mathfrak{A}\,(t,\tau,v) = \big\{\alpha \ge 0\colon\ [\pi\,\Phi\,(t,\tau)\,\varphi\,(\tau, U(\tau), v) - \gamma\,(t,\tau)] \cap \alpha\,[M(t) - \xi(t)] \ne \varnothing\big\},\\ v \in V(\tau), \quad (t,\tau) \in \Delta(t_0).\end{gathered} \tag{3.1}$$

Поскольку условие Понтрягина не имеет места, то сдвинутое многозначное отображение $W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau)$ в выражении (3.1) при некоторых значениях переменных не содержит нуля. Если бы это было не так, то функция сдвига $\gamma(t,\tau)$ была бы селектором Понтрягина, а само условие Понтрягина было бы выполненным.

Сказанное выше означает, что для некоторых элементов $v \in V(\tau)$, $(t,\tau) \in \Delta(t_0)$, $0 \notin \mathfrak{A}\,(t,\tau,v)$, в то время как в традиционной схеме метода разрешающих функций [16; 17] с условием Понтрягина автоматически $0 \in \mathfrak{A}\,(t,\tau,v)$ для всех (t,τ,v), $v \in V(\tau)$, $(t,\tau) \in \Delta(t_0)$.

Взамен условия Понтрягина потребуем более слабое предположение.

У с л о в и е 1. Многозначное отображение $\mathfrak{A}\,(t,\tau,v)$ имеет непустые образы при $v \in V(\tau)$, $(t,\tau) \in \Delta(t_0)$.

При этом условии многозначное отображение $\mathfrak{A}\,(t,\tau,v)$ порождает верхнюю и нижнюю скалярные разрешающие функции первого типа

$$\alpha^*\,(t,\tau,v) = \sup\left\{\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\,(t,\tau,v)\right\}, \quad \alpha_*\,(t,\tau,v) = \inf\left\{\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\,(t,\tau,v)\right\},$$

зависящие от мгновенного значения управления второго игрока v, $v \in V(\tau)$.

Так как образы отображения $\mathfrak{A}\,(t,\tau,v)$ являются числовыми множествами положительной полуоси $\mathbb{R}_+$, то верхняя разрешающая функция $\alpha^*\,(t,\tau,v)$ является опорной функцией этого отображения в направлении $+1$. Учитывая свойства конфликтно-управляемого процесса (1.1)–(1.3), условие 1, теоремы о характеризации и обратном образе [20, p. 310, 315], можно показать [17], что замкнутозначное отображение $\mathfrak{A}\,(t,\tau,v)$ при фиксировании $t \in \mathbb{R}_+$ является измеримым по τ при произвольном допустимом селекторе $v(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, а верхняя и нижняя разрешающие функции суперпозиционно измеримы по совокупности (τ, v) в силу теоремы об опорной функции [20, p. 317]; следовательно, функция $\alpha^*(t, \tau, v(\tau))$ измерима по τ, $\tau \in [t_0, t]$, и интегрируема по Лебегу при любой измеримой функции $v(\cdot) \in \Omega_E$.

Поставим в соответствие верхней разрешающей функции множество

$$T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \left\{ t \ge t_0 \colon \inf_{v(\cdot)\in\Omega_E} \int_{t_0}^{t} \alpha^*(t, \tau, v(\tau))\, d\tau \ \ge 1 \right\} \tag{3.2}$$

и его наименьший элемент $t(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \inf\{t \colon t \in T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot))\}$, здесь $\gamma(\cdot,\cdot)$ — зафиксированная ранее функция сдвига.

Если для некоторого t, $t > t_0$, $\alpha^*(t, \tau, v) \equiv +\infty$ для $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, то значение интеграла в соотношении (3.2) положим равным $+\infty$; соответствующее неравенство выполнено автоматически и $t \in T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot))$. В случае, когда неравенство в (3.2) не имеет места при всех $t > t_0$, положим $T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$ соответственно, $t(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) = +\infty$.

Введем многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t, \tau) = \bigcap_{v\in V(\tau)} \mathfrak{A}(t, \tau, v), \quad (t, \tau) \in \Delta(t_0).$$

По аналогии с предыдущей ситуацией для $W(t, \tau)$ оно измеримо по τ, $\tau \in [t_0, t]$.

Обозначив, следуя [23], $\operatorname{dom}\mathfrak{A} = \{(t, \tau) \in \Delta(t_0) \colon \mathfrak{A}(t, \tau) \ne \varnothing\}$, сделаем более жесткое по сравнению с условием 1 предположение.

У с л о в и е 2. $\operatorname{dom}\mathfrak{A} = \Delta(t_0)$.

Многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau)$ порождает верхнюю и нижнюю разрешающие функции второго типа

$$\alpha^*(t, \tau) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau)\}, \quad \alpha_*(t, \tau) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau)\},$$

но уже не зависящие от мгновенного значения управления второго игрока.

По теореме об опорной функции [20] она измерима по τ, $\tau \in [t_0, t]$.

Установим связь между разрешающими функциями обоих типов.

Лемма. *Пусть для конфликтно-управляемого процесса* (1.1)–(1.3) *с фиксированной функцией сдвига* $\gamma(t, \tau)$ *отображение* $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ *компактнозначно и выполнено условие* 2.

Тогда имеет место неравенство

$$\inf_{v\in V(\tau)} \alpha^*(t, \tau, v) \ge \alpha^*(t, \tau), \quad (t, \tau) \in \Delta(t_0). \tag{3.3}$$

Если к тому же отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$, $v \in V(\tau)$, $(t, \tau) \in \Delta(t_0)$, *выпуклозначно, то в* (3.3) *имеет место равенство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По построению рассматриваемые функции имеют вид

$$\inf_{v\in V(\tau)} \alpha^*(t, \tau, v) = \inf_{v\in V(\tau)} \sup\big\{\alpha \colon \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)\big\},$$

$$\alpha^*(t, \tau) = \sup\Big\{\alpha \colon \alpha \in \bigcap_{v\in V(\tau)} \mathfrak{A}(t, \tau, v)\Big\}, \quad t_0 \le \tau \le t < +\infty.$$

Обозначим $\alpha^* = \alpha^*(t, \tau)$. Поскольку отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ компактнозначно, то и $\mathfrak{A}(t, \tau)$ является компактнозначным. К тому же $\alpha^* \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)$ при любом $v \in V(\tau)$. Отсюда следует, что $\alpha^* \le \sup\{\alpha \colon \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)\}, v \in V(\tau)$, поэтому,

$$\alpha^* \le \inf_{v\in V(\tau)} \sup\{\alpha \colon \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)\} = \inf_{v\in V(\tau)} \alpha^*(t, \tau, v).$$

Из предположений о выпуклозначности и компактнозначности отображения $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ вытекает, что $\mathfrak{A}(t,\tau,v)=[\alpha_*(t,\tau,v),\alpha^*(t,\tau,v)]$, $v\in V(\tau),(t,\tau)\in\Delta(t_0)$, а непустота образов отображения $\mathfrak{A}(t,\tau)$, $(t,\tau)\in\Delta(t_0)$, при этом означает, что $\mathfrak{A}(t,\tau)=[\alpha_*(t,\tau),\alpha^*(t,\tau)]$, причем

$$\alpha_*(t,\tau)=\sup_{v\in V(\tau)}\alpha_*(t,\tau,v)\le\inf_{v\in V(\tau)}\alpha^*(t,\tau,v)=\alpha^*(t,\tau),\quad (t,\tau)\in\Delta(t_0). \qquad \square$$

Введем в рассмотрение числовые функции

$$\alpha^*(t)=\int_{t_0}^{t}\alpha^*(t,\tau)d\tau,\quad \alpha_*(t)=\int_{t_0}^{t}\alpha_*(t,\tau)d\tau.$$

Верхняя разрешающая функция второго типа порождает множество

$$\Theta\,(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))=\{t\ge t_0\colon \alpha^*(t)\ge 1\},$$

его наименьший элемент $\delta\,(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))=\inf\{t\colon t\in\Theta\,(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))\}$.

З а м е ч а н и е 2. Чтобы сравнивать предложенные схемы отметим, что из условия Понтрягина следует условие 2, а из него вытекает условие 1.

4. Достаточные условия завершения игры

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть для игровой задачи* (1.1)–(1.3) *существует такая функция сдвига* $\gamma(t,\tau)$, $(t,\tau)\in\Delta(t_0)$, *что выполнено условие* 2, *а отображение* $M(t)$ *является выпуклозначным. Кроме того,* $T\,(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))\ne\varnothing$ *и*

$$T\in T\,(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))\,.$$

Тогда при $\alpha_*(T)<1$ *траектория процесса* (1.1) *может быть приведена на терминальное множество* (1.3) *в момент* T *с использованием некоторой квазистратегии, а если к тому же* $\alpha^*(T)\ge 1$, *то — в классе контруправлений при любых допустимых управлениях второго игрока.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор отображения $V(\tau)$, $\tau\in[t_0,T]$. Предположим, что $\alpha^*(T,\tau,v)\ne+\infty$ для $v\in V(\tau)$, $\tau\in[t_0,T]$.

Рассмотрим контрольную функцию

$$h(t)=1-\int_{t_0}^{t}\alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau-\int_{t}^{T}\alpha_*(T,\tau)d\tau,\quad t\in[t_0,T].$$

Функция $\alpha^*(T,\tau,v(\tau))$, как отмечалось ранее, измерима по τ, $\tau\in[t_0,T]$; этим же свойством обладает и нижняя разрешающая функция второго типа $\alpha_*(T,\tau)$. Таким образом, функция $h(t)$ является абсолютно непрерывной на интервале $[t_0,T]$. Так как

$$h(t_0)=1-\int_{t_0}^{T}\alpha_*(T,\tau)d\tau=1-\alpha_*(T)>0,$$

а по определению момента T $h(T)=1-\int_{t_0}^{T}\alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau\le 0$, то по известной теореме анализа существует такой момент времени t_*, $t_*\in[t_0,T]$, что $h(t_*)=0$. Отметим при этом, что момент переключения t_* зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot)$. Промежутки времени $[t_0, t_*)$ и $[t_*, T]$ будем называть *активным* и *пассивным* соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них. Для этого рассмотрим компактнозначные отображения

$$\begin{aligned} U_1(\tau, v) \ &= \ \big\{u \in U(\tau)\colon \pi\Phi(T,\tau)\varphi(\tau,u,v) - \gamma(T,\tau) \in \alpha^*(T,\tau,v)[M(T)-\xi(T)]\big\}, \\ &\qquad\qquad v \in V(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_*), \\ U_2(\tau, v) \ &= \ \big\{u \in U(\tau)\colon \pi\Phi(T,\tau)\varphi(\tau,u,v) - \gamma(T,\tau) \in \alpha_*(T,\tau)[M(T)-\xi(T)]\big\}, \\ &\qquad\qquad v \in V(\tau), \quad \tau \in [t_*, T]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Из условия 2 и выражений для многозначных отображений $\mathfrak{A}(T,\tau,v)$ и $\mathfrak{A}(T,\tau)$ следует, что отображения $U_i(\tau, v)$, $i = 1, 2$, имеют непустые образы.

В силу теоремы об обратном образе многозначные отображения $U_1(\tau, v)$, $U_2(\tau, v)$ при допустимых селекторах $v(\tau)$ являются измеримыми [17] для $\tau \in [t_0, T]$, а согласно теореме Филиппова — Кастена в каждом из них существует хотя бы по одному селектору $u_1(\tau, v)$ и $u_2(\tau, v)$, которые являются суперпозиционно измеримыми функциями.

Обозначим $u_1(\tau) = u_1(\tau, v(\tau))$, $u_2(\tau) = u_2(\tau, v(\tau))$, где $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор отображения $V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$.

Положим управление первого игрока на активном промежутке равным $u_1(\tau)$, а на пассивном — $u_2(\tau)$. Таким образом, несмотря на то что на каждом из промежутков первый игрок использует не предысторию управления второго, а лишь его мгновенное управление, для определения момента переключения t_* предыстория все же необходима.

Из формулы Коши для представления решения системы (1.1) получим

$$\pi z(T) = \pi\Phi(T, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t^*} \pi\Phi(T,\tau)\varphi\left(\tau, u_1(\tau), v(\tau)\right) d\tau + \int_{t_*}^{T} \pi\Phi(T,\tau)\varphi\left(\tau, u_2(\tau), v(\tau)\right) d\tau. \tag{4.2}$$

Прибавив и вычтя в правой части (4.2) выражение $\int_{t_0}^{T} \gamma(T,\tau)d\tau$ и учитывая включения в (4.1), получим

$$\pi z(T) \in \pi\Phi(T,t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t^*} \alpha^*(T,\tau,v(\tau))[M(T)-\xi(T)]d\tau + \int_{t_*}^{T} \alpha_*(T,\tau)[M(T)-\xi(T)]d\tau + \int_{t_0}^{T} \gamma(T,\tau)d\tau$$

$$= \xi(T)\left(1 - \int_{t_0}^{t^*} \alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau - \int_{t_*}^{T} \alpha_*(T,\tau)d\tau\right) + \int_{t_0}^{t^*} \alpha^*(T,\tau,v(\tau))M(T)d\tau + \int_{t_*}^{T} \alpha_*(T,\tau)M(T)d\tau$$

$$= \left[\int_{t_0}^{t^*} \alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau + \int_{t_*}^{T} \alpha_*(T,\tau)d\tau\right] M(T) = M(T).$$

При этом учтено равенство $h(t_*) = 0$, а соотношения при интегрировании многозначных отображений с множеством $M(T)$ могут быть подверждены применением аппарата опорных функций [23]. Случай $\alpha^*(T,\tau,v) = +\infty$ для некоторых $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, как следует из выражения (3.1), возможен лишь при условиях $0 \in M(T) - \xi(T)$, $0 \in \pi\Phi(T,\tau)\varphi\left(\tau, U(\tau), v\right) - \gamma(T,\tau)$ для этих переменных, а в этом случае для них, очевидно,

$$\mathfrak{A}(T,\tau,v) = [0,+\infty), \quad \mathfrak{A}(T,\tau) = [0,+\infty).$$

Это дает возможность выбирать в качестве разрешающей функции в тех точках $\tau \in [t_0, T]$, где $\alpha^*(T,\tau,v(\tau)) = +\infty$, произвольную конечную суперпозиционно измеримую функцию, принимающую значения на полубесконечном интервале с одним лишь условием, чтобы итоговая разрешающая функция обеспечивала равенство $h(t_*)=0$ для некоторого момента переключения t_*, $t_*\in[t_0,T]$. Тем самым построение управления сведено к предыдущему случаю.

Если же $\alpha^*(T,\tau,v)=+\infty$ для всех $v\in V(\tau)$, $\tau\in[t_0,T]$, то этот случай соответствует первому методу Понтрягина [14]. Действительно, включение

$$0\in\pi\Phi(T,\tau)\varphi(\tau,U(\tau),v)-\gamma(T,\tau)\ \ \forall\, v\in V(\tau),\ \tau\in[t_0,T],$$

обеспечивает выполнение условия Понтрягина на $[t_0,T]$, а функция сдвига $\gamma(T,\tau)$ является селектором Понтрягина. Из другого включения $0\in M(T)-\xi(T)$ вытекает соотношение

$$\pi\Phi(T,t_0)z_0\in M(T)-\int\limits_{t_0}^{T}W(T,\tau)d\tau,$$

из которого в силу теоремы 1 следует возможность закончить игру (1.1)–(1.3) в момент T в классе стробоскопических стратегий.

Отдельно рассмотрим случай $\alpha^*(T)\geq 1$, а $\alpha_*(T)<1$. Введем контрольную функцию

$$h_1(t)=1-\int\limits_{t_0}^{t}\alpha^*(T,\tau)d\tau-\int\limits_{t}^{T}\alpha_*(T,\tau)d\tau.$$

Естественно рассмотреть лишь случай $\alpha^*(T,\tau)\neq+\infty$, $\tau\in[t_0,T]$. Тогда

$$h_1(t_0)=1-\alpha_*(T)>0,\quad h_1(T)=1-\alpha^*(T)\leq 0,$$

и в силу непрерывности функции $h_1(t)$ существует такой момент t_*^1, $t_*^1\in[t_0,T]$, что $h_1(t_*^1)=0$. Заметим, что момент t_*^1 уже не зависит от $v(\cdot)$. На обоих участках $[t_0,t_*^1)$ и $[t_*^1,T]$ рассмотрим многозначные отображения (4.1), причем в выражении для $U_1^1(\tau,v)$ вместо $\alpha^*(T,\tau,v)$ фигурирует функция $\alpha^*(T,\tau)$. Используя свойство компактнозначности отображений $U_1^1(\tau,v)$, $U_2(\tau,v)$ при допустимых селекторах $v(\tau)$, $\tau\in[t_0,T]$, выберем в них измеримые селекторы на основании теоремы Филиппова — Кастена, которые и определяют допустимые управления на обоих участках. Заключительные рассуждения аналогичны выводам в предыдущей ситуации. □

З а м е ч а н и е 3. Из утверждения леммы вытекает включение

$$\Theta\left(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot)\right)\subset T\left(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot)\right).$$

При этом вторая часть теоремы 2, соответствующая случаю $\alpha_*(T)<1$, $\alpha^*(T)\geq 1$, по существу, использует лишь разрешающие функции второго типа и характеризует те начальные состояния, из которых игра может быть закончена в классе контруправлений в момент T, причем $T\in\Theta\left(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot)\right)$. Приведем еще один тип достаточных условий завершения игры в классе контруправлений, основанный на свойстве выпуклозначности отображения $\mathfrak{A}\left(t,\tau,v\right)$, $v\in V(\tau)$, $(t,\tau)\in\Delta(t_0)$.

Введем в рассмотрение функции

$$\alpha(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\inf_{v\in V(\tau)}\alpha^*\left(t,\tau,v\right)d\tau,\quad \alpha(t,\tau)=1/\alpha(t)\bullet\inf_{v\in V(\tau)}\alpha^*(t,\tau,v).$$

При этом предполагается выполненным следующее требование.

У с л о в и е 3. Для выбранной функции сдвига $\gamma(t,\tau)$, $(t,\tau)\in\Delta(t_0)$, функция

$$\inf_{v\in V(\tau)}\alpha^*(t,\tau,v)$$

измерима по τ, $\tau \in [t_0, t]$ и

$$\inf_{v(\cdot)\in\Omega_E} \int_{t_0}^{t} \alpha^*\left(t,\tau,v(\tau)\right)d\tau = \int_{t_0}^{t} \inf_{v\in V(\tau)} \alpha^*(t,\tau,v)d\tau, \quad t > t_0.$$

Теорема 3. *Пусть для конфликтно-управляемого процесса* (1.1)–(1.3) *с некоторой функцией сдвига $\gamma(t,\tau)$, $t,\tau \in \Delta(t_0)$, выполнены условия 2 и 3, отображения $\mathfrak{A}\,(t,\tau,v)$ и $M(t)$, $v \in V(\tau)$, $(t,\tau) \in \Delta(t_0)$ выпуклозначны, для $T \in T\,(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) \neq \varnothing$ имеет место неравенство*

$$\alpha(T,\tau) \geq \sup_{v\in V(\tau)} \alpha_*(T,\tau,v), \quad \tau \in [t_0, T]. \tag{4.3}$$

Тогда траектория процесса (1.1) *может быть приведена на терминальное множество в момент T с помощью подходящего контруправления.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай $\alpha^*(T,\tau,v) < +\infty$, $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$. Поскольку в силу неравенства в (3.2) $\alpha(T) \geq 1$, то

$$\alpha(T,\tau) = 1/\alpha(T) \bullet \inf_{v\in V(\tau)} \alpha^*(T,\tau,v) \leq \inf_{v\in V(\tau)} \alpha^*(T,\tau,v), \quad \tau \in [t_0, T].$$

Учитывая неравенство (4.3), можно сделать вывод, что $\alpha(T,\tau) \in \mathfrak{A}\,(T,\tau,v)$ для $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, а значит, $\alpha(T,\tau) \in \mathfrak{A}\,(T,\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$U(\tau,v) = \big\{u \in U(\tau) : \pi\Phi(T,\tau)\varphi\,(\tau,u,v) - \gamma(T,\tau) \in \alpha(T,\tau)[M(T) - \xi(T)]\big\}, \\ v \in V(\tau), \quad \tau \in [t_0, T]. \tag{4.4}$$

Отображение $U(\tau,v)$ компактнозначно, и поэтому при $v(\cdot) \in \Omega_E$ согласно теореме Филиппова — Кастена в нем существует измеримый селектор $u(\tau) = u\,(\tau, v(\tau))\,,\, \tau \in [t_0, T]$. Положим управление первого игрока равным $u(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$. Из формулы Коши с учетом включения в (4.4) получим

$$\pi z(T) \in \xi(T)\left[1 - \int_{t_0}^{T} \alpha(T,\tau)d\tau\right] + \int_{t_0}^{T} \alpha(T,\tau)M(T)d\tau.$$

Так как $M(T)$ — выпуклый компакт, а $\alpha(T,\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, — неотрицательная функция, причем $\int_{t_0}^{T} \alpha(T,\tau)d\tau = 1$, то $\int_{t_0}^{T} \alpha(T,\tau)M(T)d\tau = M$, а, следовательно, $\pi z(T) \in M(T)$. □

5. Связь первого прямого метода Понтрягина и метода разрешающих функций

Установим некоторые связи между уже упомянутыми методами.

Утверждение 1. *Пусть задан конфликтно-управляемый процесс* (1.1)–(1.3). *Тогда для выполнения условия Понтрягина необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция сдвига $\gamma(t,\tau)$, $(t,\tau) \in \Delta(t_0)$, что*

$$0 \in \mathfrak{A}\,(t,\tau,v) \quad \forall\; v \in V(\tau), \quad (t,\tau) \in \Delta(t_0). \tag{5.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $W(t,\tau) \neq \varnothing$, $(t,\tau) \in \Delta(t_0)$. Тогда в силу замкнутозначности и измеримости по τ отображения $W(t,\tau)$ в нем существует измеримый по τ селектор $\gamma(t,\tau)$. Отсюда следует, что $0 \in W(t,\tau) - \gamma(t,\tau) \;\; \forall\, (t,\tau) \in \Delta(t_0)$ или

$$0 \in W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau) \;\; \forall\, v \in V(\tau),\; (t,\tau) \in \Delta(t_0).$$

Тем самым нулевое значение α в выражении (3.1) обеспечивает непустоту пересечения, а значит, справедливо включение (5.1).

Рассуждая в обратном порядке, придем к нужному выводу. □

Таким образом, в условиях утверждения 1 функция сдвига $\gamma(t,\tau)$ является селектором Понтрягина. При этом $0 \in \mathfrak{A}\,(t,\tau)\,,\ (t,\tau) \in \Delta(t_0)$, а соответствующие нижние разрешающие функции $\alpha_*\,(t,\tau,v) = \alpha_*\,(t,\tau) = 0\;\forall\; v \in V(\tau),\ (t,\tau) \in \Delta(t_0)$.

Утверждение 2. *Пусть для некоторого* t, $t > t_0$, $W(t,\tau) \neq \varnothing$, $\tau \in [t_0, t.]$ *Тогда включение*

$$\pi\Phi\,(t,t_0)\,z_0 \in M(t) - \int\limits_{t_0}^{t} W(t,\tau)d\tau \tag{5.2}$$

имеет место тогда и только тогда, когда существует такой измеримый по τ *селектор Понтрягина, что*

$$\xi\,(t,t_0,z_0,\gamma(t,\cdot)) \in M(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено включение (5.2). Тогда по определению интеграла Ауманна существует такой селектор Понтрягина, что

$$\pi\Phi\,(t,t_0)\,z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \gamma(t,\tau)d\tau = \xi\,(t,t_0,z_0,\gamma(t,\cdot)) \in M(t). \tag{5.3}$$

Обратно, если для некоторого селектора Понтрягина имеет место включение (5.3), то, перенеся интеграл от селектора в правую часть, тем более получим включение (5.2). □

Таким образом, если для некоторого t, $t \geq t_0$, и некоторого селектора Понтрягина выполнено включение (5.3), то $\mathfrak{A}\,(t,\tau,v) = [0+\infty)\;\forall\; v \in V(\tau),(t,\tau) \in \Delta(t_0)$. Тем самым $\mathfrak{A}\,(t,\tau) = [0+\infty),\ (t,\tau) \in \Delta(t_0)$. Следовательно, в этом случае верхние разрешающие функции — обоих типов

$$\alpha^*\,(t,\tau,v) = \alpha^*\,(t,\tau) = +\infty, \quad v \in V(\tau), \quad (t,\tau) \in \Delta(t_0),$$

а соответствующие нижние разрешающие функции — нулевые.

Из приведенных схем сближения вытекают неравенства для соответствующих гарантированных времен

$$\inf_{\gamma(\cdot,\cdot)} t\,(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot)) \leq \inf_{\gamma(\cdot,\cdot)} \delta\,(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot)) \leq p\,(t_0,z_0)\,.$$

Случаи равенства изучены в работе [17].

В заключение приведем иллюстративный пример стационарной игры с простыми движениями с целью получить в явном виде верхние и нижние разрешающие функции, позволяющие сделать вывод о возможности окончания игры.

6. Пример

Рассмотрим простые движения

$$\dot{z} = u - v, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad z(0) = z_0, \quad v \in S, \quad u \in aS^\circ, \quad a > 1, \quad M^* = M = \varepsilon S, \quad M_\circ = 0.$$

Здесь S — единичный шар с центром в нуле, S° — его граница. Условие Понтрягина не имеет места, поскольку $aS^{\circ} \overset{*}{-} S = \varnothing$, $\overset{*}{-}$ — геометрическая разность Минковского.

Выберем функцию сдвига $\gamma(t,\tau) \equiv 0$. Поскольку $\Phi(t,\tau) = E$ и $\pi = E$, E — единичная матрица, то $\xi(t) = z_0$. Тогда многозначное отображение $\mathfrak{A}\,(t,\tau,v)$ не зависит от t и τ и имеет вид

$$\mathfrak{A}\,(t,\tau,v) = \{\alpha \geq 0 \colon [aS^{\circ} - v] \cap \alpha[\varepsilon S - z_0] \neq \varnothing\}.$$

Оно обладает непустыми образами и условие 1 выполнено.

Верхняя разрешающая функция

$$\alpha^*\,(t,\tau,v) = \alpha^*\,(v,z_0) = \sup\{\alpha \geq 0 \colon [aS^{\circ} - v] \cap \alpha[\varepsilon S - z_0] \neq \varnothing\}$$
$$= \sup\{\alpha > 0 \colon \alpha z_0 - v \in (a+\alpha\varepsilon)S\} = \sup\{\alpha > 0 \colon \|v - \alpha z_0\| = (a+\alpha\varepsilon)\}.$$

Тем самым она является большим положительным корнем квадратного уравнения

$$\big(\|z_0\|^2 - \varepsilon^2\big)\alpha^2 - 2[(v,z_0) + a\varepsilon]\alpha - \big(a^2 - \|v\|^2\big) = 0$$

и, следовательно,

$$\alpha^*\,(v,z_0) = \frac{(v,z_0) + a\varepsilon + \sqrt{[(v,z_0)+a\varepsilon]^2 + \big(\|z_0\|^2 - \varepsilon^2\big)\big(a^2 - \|v\|^2\big)}}{\|z_0\|^2 - \varepsilon^2}.$$

Тогда

$$\min_{v\in S} \alpha^*\,(v,z_0) = \frac{a-1}{\|z_0\| - \varepsilon} \text{ достигается при } v = -\frac{z_0}{\|z_0\|}.$$

Отсюда следует, что $T = t\,(t_0, z_0, 0) = \dfrac{\|z_0\| - \varepsilon}{a-1}$.

Нижняя разрешающая функция определяется из соотношения

$$\alpha_*\,(t,\tau,v) = \alpha_*\,(v,z_0) = \inf\{\alpha \geq 0 \colon [aS^{\circ} - v] \cap \alpha[\varepsilon S - z_0] \neq \varnothing\}$$
$$= \sup\{\alpha \geq 0 \colon \alpha\,(\varepsilon S - z_0) \subset aS - v\} = \sup\{\alpha \geq 0 \colon \|v - \alpha z_0\| = a - \alpha\varepsilon\}.$$

Больший положительный корень соответствующего квадратного уравнения

$$\big(\|z_0\|^2 - \varepsilon^2\big)\alpha^2 - 2[(v,z_0) - a\varepsilon]\alpha - \big(a^2 - \|v\|^2\big) = 0$$

имеет вид

$$\alpha_*\,(v,z_0) = \frac{(v,z_0) - a\varepsilon + \sqrt{[(v,z_0)-a\varepsilon]^2 + \big(\|z_0\|^2 - \varepsilon^2\big)\big(a^2 - \|v\|^2\big)}}{\|z_0\|^2 - \varepsilon^2}.$$

Далее получим $\sup\limits_{v\in S} \alpha_*\,(v,z_0) = a + 1/\|z_0\| + \varepsilon$ при $v = z_0/\|z_0\|$. Очевидно,

$$\alpha^*(t,\tau) = \inf_{v\in S} \alpha^*\,(t,\tau,v) = a - 1/\|z_0\| - \varepsilon, \quad \alpha_*(t,\tau) = \sup_{v\in S} \alpha_*\,(t,\tau,v) = a + 1/\|z_0\| + \varepsilon,$$

и многозначное отображение $\mathfrak{A}\,(t,\tau) \neq \varnothing$, если $\dfrac{a-1}{\|z_0\| - \varepsilon} \geq \dfrac{a+1}{\|z_0\| + \varepsilon}$, что приводит к неравенству $a\varepsilon \geq \|z_0\|$.

В данном примере $\alpha^*(t) = \dfrac{a-1}{\|z_0\| - \varepsilon} \bullet t$, $\quad \alpha_*(t) = \dfrac{a+1}{\|z_0\| + \varepsilon} \bullet t$. В момент T $\alpha^*(T) = 1$, а $\alpha_*(T) = \dfrac{a+1}{\|z_0\| + \varepsilon} \bullet \dfrac{\|z_0\| - \varepsilon}{a-1}$ и $\alpha_*(T) < 1$ при $a\varepsilon > \|z_0\|$, и в этом случае заключение теоремы 2 остается в силе.

Отметим, что при $\varepsilon = 0$ возможность закончить данную игру в момент T из каких-либо точек z_0 в рассматриваемой схеме не следует, хотя окончание игры не позже чем за время T из любых начальных положений z_0 без каких-либо условий с любым ε следует из того факта, что функция $\alpha^*\,(t,\tau,v)$ не зависит от t [16, p. 99].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Boston: Birkhauser, 1995. 322 p.
4. **Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю.** Уравнения типа Гамильтона — Якоби в наследственных системах: минимаксные решения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6, № 1–2. С. 110–130.
5. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
6. **Куржанский А.Б., Мельников Н.Б.** О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона — Якоби // Мат. сб. 2000. Vol. 191, № 6. С. 69–100.
7. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
8. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
9. **Chentsov A.G.** Asymptotic attainability. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 322 p.
10. **Субботина Н.Н., Шагалова А.Г.** О непрерывном продолжении обобщенного решения уравнения Гамильтона — Якоби характеристиками, образующими центральное поле экстремалей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, no. 2. С. 220–234.
11. **Subbotina N.N.** The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization // J. Math. Sci (N.Y.). 2006. Vol. 135, no. 3. P. 2955–3091. doi: 10.1007/s10958-006-0146-2.
12. **Тарасьев А.Н., Ушаков В. Н.** О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения–уклонения. Деп. в ВИНИТИ № 2454–83. Свердловск, 1983. 61 с.
13. **Ушаков В. Н., Малев А.Г.** К вопросу о дефекте стабильности в игровой задаче о сближении // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 199–222.
14. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
15. **Никольский М.С.** Стробоскопические стратегии и первый прямой метод Л. С. Понтрягина в квазилинейных нестационарных дифференциальных играх преследования-убегания // Probl. Control Inform. Theory. 1982. Vol. 11, no. 5. P. 373–377.
16. **Chikrii A.A.** Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Busines Media, 2013. 424 p.
17. **Чикрий А.А.** Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Тр. МИАН. 2010. Vol. 271. С. 76–92.
18. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1980. 198 с.
19. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.
20. **Aubin J.-P., Frankowska H.** Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
21. **Hajek O.** Pursuit games. An introduction to the theory and applications of differential games of pursuit and evasion. New York: Acad. Press, 1975. 266 p. (Math. Science and Engineering; vol. 120).
22. **Половинкин Е.С.** Элементы теории многозначных отображений. М.: Изд-во МФТИ, 1982. 127 с.
23. **Пшеничный Б.Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.

Чикрий Аркадий Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. НАН Украины
зав. отделом
Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины
e-mail: g.chikrii@gmail.com

Поступила 30.08.2016

REFERENCES

1. Krasovskii, N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* [Game problems on the encounter of motions]. Moscow: Nauka Publ., 1970. 420 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-Theoretical Control Problems.* New York: Springer, 1987, 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under lack of information. Boston: Birkhauser, 1995, 322 p.
4. Krasovskii N.N., Lukoyanov N.Yu. Equations of Hamilton–Jacobi type in hereditary systems: minimax solutions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2000, suppl. 1, pp. S136–S153.
5. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995, 625 p.
6. Kurzhanskii A.B., Melnikov N.B. On the problem of control synthesis: the Pontryagin alternating integral and the Hamilton–Jacobi equation. *Sbornik: Mathematics*, 2000, Vol. 191, no. 6, pp. 849–881. doi: 10.4213/sm484.
7. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Optimization of a guarantee in control problems]. Moscow: Nauka Publ., 1981, 288 p.
8. Subbotin A.I. *Minimaksnye neravenstva i uravneniya Gamil'tona — Yakobi* [Minimax inequalities and Hamilton–Jacobi equations]. Moscow: Nauka Publ., 1991, 216 p.
9. Chentsov A.G. Asymptotic attainability. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997, 322 p.
10. Subbotina N.N., Shagalova L.G. On the continuous extension of a generalized solution of the Hamilton–Jacobi equation by characteristics that form a central field of extremals. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 293, suppl. 1, pp. 183–198. doi: 10.1134/S0081543816050175.
11. Subbotina N.N. The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2006., vol. 135, no. 3, pp. 2955–3091. doi: 10.1007/s10958-006-0146-2.
12. Tarasyev A.M., Ushakov V.N. *O postroenii stabil'nykh mostov v minimaksnoi igre sblizheniya–ukloneniya* [Construction of stable bridges in the minimax game of pursuit-evasion]. Available from VINITI, 1983, Sverdlovsk, no. 2454–83, 61 p.
13. Ushakov V.N., Malev A.G. On the question of the stability defect of sets in an approach game problem. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 272, suppl. 1, pp. S229–S254. doi: 10.1134/S0081543811020179.
14. Pontryagin L.S. *Izbrannye nauchnye trudy. T.* 2 [Selected Scientific Works, vol. 2]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 576 p.
15. Nikol'skij, M.S. Stroboscopic strategies and the first direct Pontryagin method in quasilinear nonstationary differential pursuit-evasion games. *Problems Control Inform. Theory / Problemy Upravlen. Teor. Inform.*, vol. 11, no. 5, 1982, pp. 373–377 (in Russian).
16. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Busines Media, 2013, 424 p.
17. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 271, pp. 69–85. doi: 10.1134/S0081543810040073.
18. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* [Mathematical methods of control of several dynamic processes]. Moscow: Mosk. Gos. Univ. Publ., 1990, 198 p.
19. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob'ektov* [Conflict interaction of groups of controlled objects]. Izhevsk: Udmurt. State Univ. Publ., 2009, 266 p.
20. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990, 461 p.
21. Hajek O. Pursuit games. New York: Acad. Press, 1975, Ser. Math. in Science and Engineering, vol. 120, 266 p.
22. Polovinkin E.S. *Elementy teorii mnogoznachnykh otobrazhenii* [Elements of the theory of multivalued mappings]. Moscow, MFTI Publ., 1982, 127 p.
23. Pshenichny B.N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex analysis and extremal problems]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 320 p.

A. A. Chikrii, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of NAS of Ukraine, Prof., Glushkov Institute of Cybernetic of NAS of Ukraine, Kyiv, 03187 Ukraine,
e-mail: g.chikrii@gmail.com .