ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ФАКТОРОВ РИСКА[1]

С. М. Асеев

Рассматривается задача оптимизации динамики управляемой системы в ситуации, когда в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ задано некоторое множество M ("зона риска") нахождение в котором возможно, но нежелательно с точки зрения безопасности системы или в силу неустойчивости ее функционирования. В классической теории оптимального управления наличие такого нежелательного множества M обычно моделируется при помощи задания дополнительного фазового ограничения, что означает запрет на нахождение траекторий системы в зоне риска M. В случае, когда динамика системы описывается автономным дифференциальным включением, а зона риска M — открытое множество, для соответствующей задачи оптимального управления при помощи метода аппроксимаций получены необходимые условия оптимальности первого порядка в форме гамильтонова включения Кларка. Основная новизна полученного результата состоит в том, что он доказан для наиболее важного случая, когда множество M открыто. В этом случае имеется естественная связь рассматриваемой задачи с классической задачей оптимального управления с фазовым ограничением. Полученные необходимые условия оптимальности включают нестандартное дополнительное условие стационарности гамильтониана.

Ключевые слова: зона риска, фазовые ограничения, оптимальное управление, дифференциальное включение, гамильтоново включение, принцип максимума Понтрягина.

S. M. Aseev. Optimization of dynamics of a control system in the presence of risk factors.

The paper is concerned with the problem of optimization of dynamics of a control system in the situation when there is a set M ("risk zone") in the state space $\mathbb{R}^n$ which is unfavorable due to reasons of safety or instability of the system. In the classical setting the presence of such unfavorable set M is modeled usually via introducing an additional state constraint in the problem that means the ban on the presence of the trajectories in the risk zone M. Necessary optimality conditions in the form of Clarke's Hamiltonian inclusion are developed for the corresponding optimal control problem in the case when the system's dynamics is described by an autonomous differential inclusion and the risk zone M is an open set. The main novelty of the result is that it is proved in the most important case when the risk zone M is an open set. There is a natural relation of the problem under consideration to the classical optimal control problem with state constraints in this case. The result obtained involves an additional nonstandard stationarity condition for the Hamiltonian.

Keywords: risk zone, state constraints, optimal control, differential inclusion, Hamiltonian inclusion, Pontryagin maximum principle.

MSC: 49KXX

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-27-42

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Стандартная задача оптимального управления (Q) имеет следующий вид (см. [16]):

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \int\limits_0^T g(x(t),u(t))\,dt \to \min\,, \tag{1.1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)), \quad u(t)\in U, \tag{1.2}$$

$$x(0)\in M_0, \quad x(T)\in M_1. \tag{1.3}$$

Здесь $x(t)=(x^1(t),\dots,x^n(t))\in\mathbb{R}^n$ и $u(t)=(u^1(t),\dots,u^m(t))\in\mathbb{R}^m$ — значения фазового вектора системы (1.2) и вектора управления в момент времени $t\ge 0$; U — непустой компакт из $\mathbb{R}^m$;

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

M_0, M_1 — непустые замкнутые множества из $\mathbb{R}^n$. Функции $f\colon \mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^n$ и $g\colon \mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^1$ предполагаются непрерывными вместе со своими частными производными $f_x\colon \mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^{n\times n}$ и $g_x\colon \mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^n$. Момент времени окончания процесса управления $T>0$ будем считать фиксированным, а в качестве допустимых управлений $u(\cdot)$ будем рассматривать все измеримые (по Лебегу) вектор-функции $u\colon [0,T]\to U$. Если $u(\cdot)$ — допустимое управление, то соответствующая ему допустимая траектория — это абсолютно непрерывное решение $x(\cdot)$ дифференциального уравнения (1.2) на интервале $[0,T]$, удовлетворяющее краевым условиям (1.3). Допустимая пара $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ называется *оптимальной*, если функционал (1.1) принимает на ней свое минимальное возможное значение.

Как известно, основные необходимые условия оптимальности первого порядка классической теории оптимального управления (принцип максимума Понтрягина) получены при стандартных предположениях о непрерывной дифференцируемости функций $f(\cdot,\cdot)$ и $g(\cdot,\cdot)$ по фазовой переменной x (см. [16]). При этом общий вид негладких концевых ограничений (1.3) каких либо существенных трудностей не вызывает. Как показано в [13], задачи с общими негладкими концевыми ограничениями вида (1.3) сводятся к случаю задач без ограничений при помощи метода метрических аппроксимаций (см. также [14]).

В дальнейшем эти результаты были распространены на случай, когда непрерывные функции $f(\cdot,\cdot)$ и $g(\cdot,\cdot)$ удовлетворяют по фазовой переменной x более слабому условию Липшица. Заметим, что рассмотрение случая липшицевых по фазовой переменной x функций $f(\cdot,\cdot)$ и $g(\cdot,\cdot)$ было связано с большими трудностями, что дало толчок развитию методов негладкого анализа (см. [12]).

Однако в задачах экологии и экономики, а также при рассмотрении процессов управления техническими системами часто возникает ситуация, когда обе функции $f(\cdot,\cdot)$ и $g(\cdot,\cdot)$ (или одна из них) не обязательно липшицевы (или даже не обязательно непрерывны) по фазовой переменной x. В частности, задачи с разрывной по фазовой переменной x функцией $g(\cdot,\cdot)$, характеризующей качество процесса управления в каждый момент времени $t\ge 0$, естественно возникают в случае, когда нахождение управляемой системы в некотором заданном множестве M фазового пространства $\mathbb{R}^n$ физически возможно, но нежелательно, например, с точки зрения безопасности системы или в силу неустойчивости ее функционирования в этом множестве. В дальнейшем такое множество $M\subset\mathbb{R}^n$ будем называть *зоной риска*. Если управляемая система (1.2) описывает динамику экологической системы, то зона риска M может соответствовать множеству состояний системы с высокой вероятностью ее деградации. В случае, когда система (1.2) описывает динамику экономической системы, зона риска M может соответствовать состояниям с высокой вероятностью наступления кризиса или банкротства (примеры различных разрывных функций мгновенной полезности, возникающих в теории управления рисками, см. в [23]). В случае задачи управления технической системой зона риска M может соответствовать состояниям перегрузки системы.

В классической теории оптимального управления наличие заданного нежелательного множества состояний системы M обычно моделируется включением в постановку задачи дополнительного *фазового ограничения* вида (см. [16, гл. 6])

$$x(t)\in G=\mathbb{R}^n\setminus M,\quad t\in[0,T]. \tag{1.4}$$

Содержательно задание фазового ограничения (1.4) означает запрет на нахождение допустимой траектории $x(\cdot)$ в зоне риска M. При этом наибольший интерес представляет случай, когда задающее фазовое ограничение множество G (“зона безопасности”) является замкнутым (в этом случае зона риска M — открытое множество). Действительно, в случае открытого множества G каждая оптимальная траектория $x_*(\cdot)$ (если такая существует) является внутренней и поэтому автоматически удовлетворяет принципу максимума Понтрягина для задачи без фазового ограничения. С другой стороны, замкнутость множества, задающего фазовое ограничение, важна для доказательства различных теорем существования решения (см. [24]).

Задание фазовых ограничения вносит в динамику системы разрывы. Это приводит к качественно новым эффектам, которые необходимо учитывать в соответствующих необходимых условиях оптимальности. В частности, соотношения общего варианта принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями [10; 11] могут вырождаться, выполняясь на любой допустимой траектории. Исследованию задач с фазовыми ограничениями посвящена обширная библиография (см. например, обзор [26]). Эффект вырождения принципа максимума изучался в работах [1–4; 7–9; 21; 25] и ряде других.

Заметим также, что в исследованиях, связанных с анализом рисков (см., например, [23]), понятие риска обычно ассоциируется с некоторыми неопределенными исходами, ведущими к потерям различного рода. Каждому исходу (потерям) приписывается некоторая вероятность; используется понятие рисковых предпочтений. В случае задачи с фазовым ограничением зона риска M содержательно соответствует состояниям системы с высокой вероятностью крупных потерь, т. е. зоне критического риска. Предполагается, что этих потерь следует избегать, поэтому в случае задачи с фазовым ограничением процесс характеризуется несклонностью к риску или неприятием риска. Основное отличие рассматриваемой здесь задачи от задачи с фазовым ограничением состоит в том, что она допускает нахождение траекторий системы в зоне риска M.

Впервые задача оптимального управления, включающая в свою постановку множество возможных, но нежелательных состояний системы, как задача об оптимальном прохождении через заданное множество была рассмотрена в работе [17] в случае линейной управляемой системы, выпуклого замкнутого множества M и при априорных предположениях регулярности относительно оптимальной траектории $x_*(\cdot)$. Именно в [17] предполагается, что число моментов времени, в которых рассматриваемая оптимальная траектория $x_*(\cdot)$ пересекает границу множества M, конечно. В статье [18] при тех же предположениях линейности управляемой системы изучается случай, когда выпуклое замкнутое множество $M = M(t)$ зависит от времени. В [5; 6] при помощи метода аппроксимаций (см. [3; 21; 22]) была рассмотрена задача об оптимальном прохождении через заданное замкнутое множество M в случае аффинной по управлению системы, причем без каких-либо априорных предположений о характере пересечения оптимальной траекторией границы множества M. В статье [19] эти результаты (для замкнутого множества M) были обобщены на случай более общего интегрального функционала, характеризующего качество процесса управления.

Основное отличие настоящей работы от предыдущих публикаций в этом направлении состоит в том, что рассматриваемое нежелательное множество M (зона риска) предполагается открытым. В этом случае рассматриваемая задача является естественным обобщением стандартной задачи оптимального управления с фазовым ограничением. В дальнейшем для упрощения изложения изучается случай, когда управляемая система описывается автономным дифференциальным включением, а момент времени окончания процесса управления $T > 0$ фиксирован.

Рассмотрим следующую задачу (P):

$$J(x(\cdot)) = \varphi(x(0), x(T)) + \lambda \int\limits_0^T \delta_M(x)\, dt \to \min\,, \tag{1.5}$$

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \tag{1.6}$$

$$x(0) \in M_0, \quad x(T) \in M_1. \tag{1.7}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, M_0, M_1 — непустые замкнутые множества из $\mathbb{R}^n$, λ — положительное число, $F\colon \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ — локально липшицевое (относительно хаусдорфовой метрики) многозначное отображение с непустыми выпуклыми компактными значениями, $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$ — локально липшицевая функция, а $\delta_M(\cdot)$ — характеристическая функция заданного множества M (зоны риска) из $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$\delta_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M, \\ 0, & x \notin M. \end{cases} \tag{1.8}$$

Предполагается, что множество M открытое, не совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$ и, кроме того, касательный конус Кларка $T_G(x)$ к замкнутому множеству $G = \mathbb{R}^n \setminus M$ в любой точке $x \in G$ (см. [12]) имеет непустую внутренность, т. е. $\operatorname{int} T_G(x) \neq \varnothing$.

Момент окончания процесса управления $T > 0$ в задаче (P) будем считать фиксированным, а в качестве допустимых траекторий будем рассматривать все абсолютно непрерывные решения $x(\cdot)$ дифференциального включения (1.6) на интервале времени $[0, T]$, удовлетворяющие краевым условиям (1.7). Допустимая траектория $x_*(\cdot)$ является оптимальной в задаче (P), если функционал (1.5) достигает на ней своего наименьшего возможного значения.

Заметим, что основное отличие задачи (P) от стандартной задачи оптимального управления (Q) состоит в наличии в функционале (1.5) "штрафующего" интегрального члена с разрывным интегрантом $\delta_M(\cdot)$.

В дальнейшем будем обозначать через $N_G(x) = T_G^*(x)$ нормальный конус Кларка [12] к замкнутому множеству $G = \mathbb{R}^n \setminus M$ в точке $x \in G$, через $\hat{N}_A(a)$ — конус обобщенных нормалей [14] к замкнутому множеству $A \subset \mathbb{R}^n$ в точке $a \in A$, а через ∂A — границу множества A. Далее, через $H(F(x), \psi) = \max_{f \in F(x)} \langle f, \psi \rangle$ будем обозначать значение гамильтониана $H(F(\cdot), \cdot)$ дифференциального включения (1.6) в точке $(x, \psi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, через $\partial H(F(x), \psi)$ — субдифференциал Кларка локально липшицевой функции $H(F(\cdot), \cdot)$ в точке $(x, \psi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ [12], а через $\hat{\partial}\varphi(x_1, x_2)$ — обобщенный градиент локально липшицевой функции $\varphi(\cdot, \cdot)$ в точке $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ [14].

Пусть $\xi(\cdot)$ — заданная на сегменте $[0, T]$ скалярная функция. Следуя [15, гл. 9, § 6], точку $\tau \in [0, T)$ будем называть *точкой правой аппроксимативной непрерывности функции* $\xi(\cdot)$, если существует такое измеримое множество $E \subset [\tau, T]$, имеющее τ точкой правой плотности, что функция $\xi(\cdot)$ непрерывна справа вдоль E в точке τ.

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть $x_*(\cdot)$ — оптимальная допустимая траектория в задаче (P). Тогда существуют такие постоянная $\psi^0 \geq 0$, абсолютно непрерывная функция $\psi\colon [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$ и ограниченная регулярная борелевская мера η на $[0, T]$, что выполняются следующие условия:*

1) *мера η сосредоточена на множестве $\mathfrak{M} = \{t \in [0, T]\colon x_*(t) \in \partial G\}$ и неположительна на множестве непрерывных функций $y\colon \mathfrak{M} \mapsto \mathbb{R}^n$, принимающих значения $y(t) \in T_G(x_*(t))$ при $t \in \mathfrak{M}$, т. е.* $\displaystyle\int_{\mathfrak{M}} y(t)\, d\eta \leq 0$;

2) *при п.в. $t \in [0, T]$ выполняется гамильтоново включение*

$$(-\dot{\psi}(t), \dot{x}_*(t)) \in \partial H\left(x_*(t), \psi(t) + \lambda \int_0^t d\eta\right);$$

3) *для $t = T$, а также для каждой точки $t \in (0, T)$, являющейся точкой правой аппроксимативной непрерывности функции $\delta_M(x_*(\cdot))$, выполняется равенство (условие стационарности гамильтониана)*

$$H\left(x_*(t), \psi(t) + \lambda \int_0^t d\eta\right) - \psi^0 \lambda \delta_M(x_*(t)) = H(x_*(0), \psi(0)) - \psi^0 \lambda \delta_M(x_*(0));$$

4) *выполняется условие трансверсальности*

$$\left(\psi(0), -\psi(T) - \lambda\int_0^T d\eta\right) \in \psi^0\hat{\partial}\phi(x_*(0), x_*(T)) + \hat{N}_{\tilde{M}_0} \times \hat{N}_{\tilde{M}_1};$$

5) *выполняется условие нетривиальности*

$$\psi^0 + \|\psi(0)\| + \|\eta\| \neq 0.$$

Здесь множества $\tilde{M}_0$ и $\tilde{M}_1$ определяются равенствами

$$\tilde{M}_0 = \begin{cases} M_0, & x_*(0) \in M, \\ M_0 \bigcap G, & x_*(0) \in G \end{cases} \quad \text{и} \quad \tilde{M}_1 = \begin{cases} M_1, & x_*(0) \in M, \\ M_1 \bigcap G, & x_*(0) \in G. \end{cases} \tag{1.9}$$

Доказательство теоремы 1, приведенное ниже в разд. 3, так же, как и доказательство аналогичного результата для задачи оптимального управления с фазовым ограничением, основано на использовании метода аппроксимаций (см. [3; 21; 22]). Основное отличие теоремы 1 от варианта принципа максимума Понтрягина для задачи с фазовым ограничением, полученного в [3; 21], состоит в форме условия стационарности 3). При этом в случае, когда $x_*(t) \in G$ при всех $t \in [0, T]$, условие 3) влечет следующее известное для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями условие на скачок меры η:

$$H\left(x_*(t), \psi(t) + \lambda\int_0^t d\eta\right) = H\left(x_*(t), \psi(t) + \lambda\int_0^t d\eta - \lambda\eta(t)\right), \quad t \in [0, T].$$

Как и в случае задач оптимального управления с фазовыми ограничениями, условие 3) может быть использовано при исследовании невырожденности соотношений принципа максимума (теоремы 1).

Заметим, что аналогично [3; 21] данный результат с небольшими изменениями может быть перенесен на случай задач со свободным временем $T > 0$, а также на случай, когда управляемая система описывается неавтономным (липшицевым по совокупности переменных (t, x)) дифференциальным включением.

2. Построение последовательности аппроксимирующих задач

Для $i = 1, 2, \ldots$ и $x \in \mathbb{R}^n$ положим $\tilde{\delta}_i(x) = \min\{i\rho(x, G), \delta_M(x)\}$, где $\rho(x, G) = \min\{\|x - \xi\| \colon \xi \in G\}$ — расстояние от точки x до непустого замкнутого множества $G = \mathbb{R}^n \backslash M$, а функция $\delta_M(\cdot)$ определена равенством (1.8).

Далее, для $i = 1, 2, \ldots$ определим функцию $\delta_i \colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$ следующим образом:

$$\delta_i(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\delta}_i(x + y)\omega_i(y)\, dy. \tag{2.1}$$

Здесь $\omega_i(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — гладкая вероятностная плотность с носителем $\operatorname{supp}\omega_i(\cdot) \subset 1/2^i B$, где B — замкнутый единичный шар из $\mathbb{R}^n$ с центром в 0. Для любого $i = 1, 2, \ldots$ так определенная функция $\delta_i \colon \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1]$ является гладкой (класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$), как свертка с гладкой функцией.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеем*

$$\delta_i(x) \leq \delta_M(x) + \frac{i}{2^i}, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если $x \in M$, то $\delta_M(x) = 1$. Поскольку $\delta_i(x) \leq 1$, $i = 1, 2, \dots$, то неравенство (2.2) в этом случае очевидно выполняется. Пусть $x \notin M$. Тогда $x \in G$, $\delta_M(x) = 0$ и $\tilde{\delta}_i(x+y) \leq i\rho(x+y, G) \leq iy \leq i/2^i$ для любого $y \in \operatorname{supp}\omega_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots$. Согласно определению функции $\delta_i(\cdot)$ (см. (2.1)) в этом случае

$$\delta_i(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{\delta}_i(x+y)\omega_i(y)\,dy \leq \frac{i}{2^i}, \quad i = 1, 2, \dots .$$

Поскольку $\delta_M(x) = 0$, то неравенство (2.2) в данном случае также выполняется. □

Лемма 2. *Пусть последовательность* $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ *непрерывных функций* $x_i\colon [0,T] \mapsto \mathbb{R}^n$ *сходится равномерно на интервале* $[0,T]$ *к непрерывной функции* $\tilde{x}\colon [0,T] \mapsto \mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$\liminf_{i\to\infty} \int\limits_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt \geq \int\limits_0^T \delta_M(\tilde{x}(t))\,dt. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для $t \in [0,T]$ выполняется включение $\tilde{x}(t) \in M$. Тогда $\delta_M(\tilde{x}(t)) = 1$ и в силу открытости множества M и сходимости последовательности $\{x_i(t)\}_{k=1}^{\infty}$ к $\tilde{x}(t)$ существуют такие число $\varepsilon_0 > 0$ и номер $i_0 \geq 1/\varepsilon_0$, что для всех $i \geq i_0$ выполняется включение $x_i(t) + \varepsilon_0 B \subset M$. Тогда для всех $i \geq i_0$ согласно определению функции $\delta_i(\cdot)$ (см. (2.1)) справедливо равенство $\delta_i(x_i(t)) = 1$. Следовательно, в этом случае $\lim_{i\to\infty} \delta_i(x_i(t)) = \delta_M(\tilde{x}(t)) = 1$. Пусть теперь для $t \in [0,T]$ имеем $\tilde{x}(t) \notin M$. Тогда $\delta_M(\tilde{x}(t)) = 0$. Поскольку $\delta_i(x_i(t)) \geq 0$ для любого $t \in [0,T]$ и всех $i = 1, 2, \dots$ (см. (2.1)), то в этом случае получаем $\liminf_{i\to\infty} \delta_i(x_i(t)) \geq \delta_M(\tilde{x}(t))$.

Таким образом, для любого $t \in [0,T]$ выполняется неравенство

$$\liminf_{i\to\infty} \delta_i(x_i(t)) \geq \delta_M(\tilde{x}(t)).$$

Отсюда в силу леммы Фату (см. [24, Lemma 8.7.i.]) вытекает неравенство (2.3). □

Теорема 2. *Интегральный функционал* $J_M\colon C([0,T], \mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}^1$, *определенный равенством*

$$J_M(x(\cdot)) = \int\limits_0^T \delta_M(x(t))\,dt,$$

полунепрерывен снизу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть последовательность $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ непрерывных функций $x_i\colon [0,T] \mapsto \mathbb{R}^n$ сходится равномерно на интервале $[0,T]$ к непрерывной функции $\tilde{x}(\cdot)$. Тогда в силу леммы 1 имеем

$$J_M(x_i(\cdot)) = \int\limits_0^T \delta_M(x_i(t))\,dt \geq \int\limits_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt - \frac{i}{2^i}, \quad i = 1, 2, \dots .$$

Откуда согласно лемме 2, переходя к пределу при $i \to \infty$, получаем

$$\liminf_{i\to\infty} J_M(x_i(\cdot)) \geq \liminf_{i\to\infty} \int\limits_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt \geq \int\limits_0^T \delta_M(\tilde{x}(t))\,dt = J_M(\tilde{x}(\cdot)). \qquad □$$

Следствие 1. *Пусть хотя бы одно из множеств* M_0 *или* M_1 *— компакт и существует по крайней мере одна допустимая траектория* $x(\cdot)$ *системы* (1.6) *на интервале* $[0,T]$. *Тогда существует оптимальная допустимая траектория* $x_*(\cdot)$ *в задаче* (P).

Доказательство немедленно вытекает из компактности в этом случае множества допустимых траекторий (см. [20]), теоремы 2 и теоремы Вейерштрасса (см. [11, § 0.1]). □

Пусть теперь $x_*(\cdot)$ — произвольная оптимальная траектория в задаче (P). Для $i = 1, 2, \dots$ определим задачу (P_i) следующим образом:

$$J_i(x(\cdot)) = \varphi(x(0), x(T)) + \int\limits_0^T \left[\lambda\delta_i(x(t)) + \|x(t) - x_*(t)\|^2\right] dt \to \min\,, \tag{2.4}$$

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \tag{2.5}$$

$$\|x(t) - x_*(t)\| \le 1, \quad t \in [0, T], \tag{2.6}$$

$$x(0) \in \tilde{M}_0, \quad x(T) \in \tilde{M}_1. \tag{2.7}$$

Здесь функция $\varphi(\cdot,\cdot)$, многозначное отображение $F(\cdot)$, число $\lambda > 0$, а также момент времени T — те же самые, что и в задаче (P). Множества $\tilde{M}_0$ и $\tilde{M}_1$ определятся равенствами (1.9). Так же, как и в задаче (P), в качестве допустимых траекторий в задаче (P_i), $i = 1, 2, \dots$, рассматриваются все абсолютно непрерывные решения $x(\cdot)$ дифференциального включения (2.5) на интервале времени $[0, T]$, удовлетворяющие краевым условиям (2.7). Заметим, что задача (P_i) содержит дополнительное фазовое ограничение (2.6).

Для любого $i = 1, 2, \dots$ задача (P_i) является стандартной задачей оптимального управления для дифференциального включения с фазовым ограничением и фиксированным временем окончания процесса управлениям $T > 0$. Поскольку оптимальная в задаче (P) траектория $x_*(\cdot)$ является допустимой в задаче (P_i), то в силу теоремы существования Филиппова (см. [24, теорема 9.3.i]) для любого $i = 1, 2, \dots$ в задаче (P_i) существует оптимальная траектория $x_i(\cdot)$.

Так построенную последовательность $\{(P_i)\}_{k=1}^{\infty}$ будем называть *последовательностью аппроксимирующих задач* (соответствующей оптимальной траектории $x_*(\cdot)$).

Теорема 3. *Пусть $x_*(\cdot)$ — оптимальная допустимая траектория в задаче (P), $\{(P_i)\}_{i=1}^{\infty}$ — соответствующая последовательность аппроксимирующих задач, а $x_i(\cdot)$ — оптимальная траектория в задаче (P_i), $i = 1, 2, \dots$. Тогда*

$$\lim_{i\to\infty} x_i(\cdot) = x_*(\cdot) \quad \textit{в} \quad C([0, T], \mathbb{R}^n), \tag{2.8}$$

$$\lim_{i\to\infty} \dot{x}_i(\cdot) = \dot{x}_*(\cdot) \quad \textit{слабо в} \quad L^1([0, T], \mathbb{R}^n), \tag{2.9}$$

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_0^T \delta_i(x_i(t))\, dt = \int\limits_0^T \delta_M(x_*(t))\, dt. \tag{2.10}$$

Доказательство. Так как $x_i(\cdot)$ — оптимальная траектория в задаче (P_i), $i = 1, 2, \dots$, а $x_*(\cdot)$ — допустимая траектория системы (2.5), то в силу леммы 1 выполняются следующие неравенства (см. (2.4) и (2.2)):

$$\varphi(x_i(0), x_i(T)) + \int\limits_0^T \left[\lambda\delta_i(x_i(t)) + \|x_i(t) - x_*(t)\|^2\right] dt \le \varphi(x_*(0), x_*(T)) + \lambda \int\limits_0^T \delta_i(x_*(t))\, dt$$

$$\le \varphi(x_*(0), x_*(T)) + \lambda \int\limits_0^T \delta_M(x_*(t))\, dt + \frac{i\lambda T}{2^i}. \tag{2.11}$$

Далее, множество всех допустимых траекторий в задаче (P), удовлетворяющих фазовому ограничению (2.6), является компактом в пространстве $C([0, T], \mathbb{R}^n)$. Пусть $\tilde{x}(\cdot)$ — предельная точка последовательности $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ в $C([0, T], \mathbb{R}^n)$. Тогда $\tilde{x}(\cdot)$ — допустимая траектория системы (2.5) и, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что

$\lim_{i\to\infty} x_i(\cdot) = \tilde{x}(\cdot)$ в $C([0,T],\mathbb{R}^n)$. Далее, траектория $x_*(\cdot)$ — оптимальная в задаче (P), а траектория $\tilde{x}(\cdot)$ — допустимая в этой задаче. Поэтому

$$\varphi(x_*(0),x_*(T)) + \lambda\int_0^T \delta_M(x_*(t))\,dt \le \varphi(\tilde{x}(0),\tilde{x}(T)) + \lambda\int_0^T \delta_M(\tilde{x}(t))\,dt.$$

Откуда согласно (2.11) для $i = 1,2,\dots$ получаем

$$\varphi(x_i(0),x_i(T)) - \varphi(\tilde{x}(0),\tilde{x}(T)) + \lambda\int_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt - \lambda\int_0^T \delta_M(\tilde{x}(t))\,dt$$

$$+\int_0^T \|x_i(t)-x_*(t)\|^2\,dt \le \frac{i\lambda T}{2^i}. \tag{2.12}$$

Поскольку $\lim_{i\to\infty} x_i(\cdot) = \tilde{x}(\cdot)$ в $C([0,T],\mathbb{R}^n)$, то исходя из леммы 2 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число i_0, что для всех $i \ge i_0$ выполняются неравенства

$$\varphi(x_i(0),x_i(T)) - \varphi(\tilde{x}(0),\tilde{x}(T)) \ge -\varepsilon, \quad \int_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt - \int_0^T \delta_M(\tilde{x}(t))\,dt \ge -\varepsilon.$$

Откуда в силу (2.12) получаем, что для любого $i \ge i_0$

$$\int_0^T \|x_i(t)-x_*(t)\|^2\,dt \le \varepsilon(1+\lambda) + \frac{i\lambda T}{2^i}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $i\to\infty$, получаем

$$\limsup_{i\to\infty}\int_0^T \|x_i(t)-x_*(t)\|^2\,dt \le \varepsilon(1+\lambda).$$

С учетом произвольности $\varepsilon > 0$ из последнего неравенства вытекает, что

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^T \|x_i(t)-x_*(t)\|^2\,dt = 0,$$

откуда в силу произвольности выбора предельной точки $\tilde{x}(\cdot)$ последовательности $\{x(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ следует равенство (2.8). Равенство (2.9) выводим из (2.8) и того факта, что последовательность $\{\dot{x}_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ ограничена в $L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Докажем условие (2.10). В силу неравенства (2.11) для $i = 1,2,\dots$ имеем

$$\int_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt \le \int_0^T \delta_M(x_*(t))\,dt + \frac{\varphi(x_*(0),x_*(T)) - \varphi(x_i(0),x_i(T))}{\lambda}$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^T \|x_i(t)-x_*(t)\|^2\,dt + \frac{iT}{2^i}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $i \to \infty$ в силу (2.8), (2.9) и леммы 2, получаем

$$\int_0^T \delta_M(x_*(t))\,dt \le \liminf_{i\to\infty} \int_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt \le \lim_{i\to\infty} \int_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt$$

$$\le \limsup_{i\to\infty} \int_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt \le \int_0^T \delta_M(x_*(t))\,dt.$$

Следовательно,

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt = \int_0^T \delta_M(x_*(t))\,dt. \qquad \square$$

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы* 3, *переходя, если нужно, в последовательности* $\{\delta_i(x_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ *к подпоследовательности, можно считать, что*

$$\lim_{i\to\infty} \delta_i(x_i(t)) = \lim_{i\to\infty} \delta_M(x_*(t)) \quad \textit{при п.в.} \quad t \in [0,T].$$

Доказательство. В силу открытости множества M для всех $t \in [0,T]$, для которых $x_*(t) \in M$, из определения функций $\delta_M(\cdot)$ и $\delta_i(\cdot)$, $i = 1,2,\dots$, (см. (1.8) и (2.1)) и условия (2.8) вытекает $\lim_{i\to\infty} \delta_i(x_i(t)) = \lim_{i\to\infty} \delta_M(x_*(t)) = 1$. Рассмотрим теперь множество тех $t \in [0,T]$, для которых $x_*(t) \in G$. В этом случае $\delta_M(x_*(t)) = 0$ и согласно (2.10)

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_{t\in[0,T]\colon x_*(t)\in G} \delta_i(x_i(t))\; dt = 0.$$

Откуда с учетом неотрицательности функций $\delta_i(x_i(\cdot))$, $i = 1,2,\dots$, для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{meas}\{t \in [0,T]\colon x_*(t) \in G,\, \delta_i(x_i(t)) > \varepsilon\} = 0,$$

т. е. последовательность $\{\delta_i(x_i(\cdot))\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к 0 на множестве $\{t \in [0,T]\colon x_*(t) \in G\}$ по мере. Значит, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $\{\delta_i(x_i(\cdot))\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к 0 при п.в. $t \in [0,T]$, для которых $x_*(t) \in G$, и, следовательно, для п.в. $t \in [0,T]$. $\square$

3. Доказательство основного результата

Пусть $x_*(\cdot)$ — оптимальная траектория в задаче (P), а $\{(P_i)\}_{i=1}^{\infty}$ — соответствующая последовательность аппроксимирующих задач (см. (2.4)–(2.7)).

Пусть $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность оптимальных траекторий в задачах (P_i), $i = 1,2,\dots$. В силу теоремы 3 справедливы равенства (2.8) и (2.9). Исходя из (2.8), не ограничивая общности, можно считать, что все траектории $x_i(\cdot)$ являются для фазового ограничения (2.6) внутренними. Отсюда вытекает, что для любого $i = 1,2,\dots$ траектория $x_i(\cdot)$ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в форме гамильтонового включения Кларка (см. [12, теорема 5.2.1]) для задач без фазовых ограничений и с негладкими концевыми ограничениями [13]. Именно существуют такие число $\psi_i^0 \ge 0$ и абсолютно непрерывная функция $\tilde{\psi}_i\colon [0,T] \mapsto \mathbb{R}^n$, что выполняются следующие условия:

$$(-\dot{\tilde{\psi}}_i(t), \dot{x}_i(t)) \overset{\text{п.в.}}{\in} \partial H(x_i(t), \tilde{\psi}_i(t)) - \psi_i^0\Big(\lambda \frac{\partial \delta_i(x_i(t))}{\partial x} + 2(x_i(t) - x_*(t)), 0\Big), \tag{3.1}$$

$$(\tilde{\psi}_i(0), -\tilde{\psi}_i(T)) \in \hat{\partial}\varphi(x_i(0), x_i(T)) + \hat{N}_{\tilde{M}_1}(x_i(0)) \times \hat{N}_{\tilde{M}_2}(x_i(T)), \tag{3.2}$$

$$\dot{h}_i(t) \overset{\text{п.в.}}{=} -2\psi_i^0 \langle x_i(t) - x_*(t), \dot{x}_*(t)\rangle, \tag{3.3}$$

$$\psi_i^0 + \|\tilde{\psi}_i(0)\| \neq 0, \tag{3.4}$$

где абсолютно непрерывная функция $h_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots$, определяется равенством

$$h_i(t) = H(x_i(t), \tilde{\psi}_i(t)) - \psi_i^0 \left(\lambda \delta_i(x_i(t)) + \|x_i(t) - x_*(t)\|^2\right), \quad t \in [0, T]. \tag{3.5}$$

Нормируем (в силу (3.4)) сопряженные переменные ψ_i^0, $\tilde{\psi}_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots$, следующим образом:

$$\psi_i^0 + \|\tilde{\psi}_i(0)\| + \psi_i^0 \int\limits_0^T \left\| \frac{\partial \delta_i(x_i(t))}{\partial x} \right\| dt = 1 \tag{3.6}$$

и введем новые переменные

$$\eta_i(t) = \psi_i^0 \frac{\partial \delta_i(x_i(t))}{\partial x}, \quad \psi_i(t) = \tilde{\psi}_i(t) - \lambda \int\limits_0^t \eta_i(s)\, ds, \quad t \in [0, T].$$

В терминах этих новых переменных гамильтоново включение (3.1) запишется в виде

$$(-\dot{\psi}_i(t), \dot{x}_i(t)) \overset{\text{п.в.}}{\in} \partial H\left(x_i(t), \psi_i(t) + \lambda \int\limits_0^t \eta_i(s)\, ds \right) - 2\psi_i^0 (x_i(t) - x_*(t), 0). \tag{3.7}$$

В силу условия (3.6), переходя, если нужно, к подпоследовательности и не ограничивая общности, можно считать, что $\psi_i^0 \to \psi^0 \geq 0$, $\psi_i(0) = \tilde{\psi}_i(0) \to \psi_0$, $\|\psi_0\| \leq 1$ при $i \to \infty$, а согласно теореме Хелли (см., например, [24, Theorem 15.1.i.]) последовательность $\{\eta_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ сходится слабо при $i \to \infty$ к регулярной борелевской мере η на $[0, T]$.

С учетом включения (3.7) и предложения 3.2.4 из [12] имеем $\|\dot{\psi}_i(t)\| \leq k(\|\psi_i(t)\| + 1)$, где $k \geq 0$ — некоторая постоянная. Следовательно, в силу леммы Гронуолла (см., например, [24, Lemma 18.1.i]), не ограничивая общности, можно считать, что $\psi_i(\cdot) \to \psi(\cdot)$ в $C([0, T], \mathbb{R}^n)$, $\dot{\psi}_i(\cdot) \to \dot{\psi}(\cdot)$ слабо в $L^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ при $i \to \infty$, где $\psi\colon [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$ — липшицевая функция.

Докажем утверждение 1) теоремы 1. Прежде всего заметим, что если $x_*(\tau) \in M$ (или $x_*(\tau) \in \operatorname{int} G$), то согласно определению функций $\delta_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots$, (см. (2.1)) и равномерной сходимости последовательности $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ к функции $x_*(\cdot)$ существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что $x_*(\tau) + \varepsilon B \subset M$ (или $x_*(\tau) + \varepsilon B \subset G$) и для всех достаточно больших номеров i имеем $\delta_i(x_i(t)) \equiv 1$ (или $\delta_i(x_i(t)) \equiv 0$) при всех t, лежащих в δ-окрестности точки τ в $[0, T]$. Отсюда получаем, что мера η сосредоточена на множестве $\mathfrak{M} = \{t \in [0, T]\colon x_*(t) \in \partial G\}$.

Очевидно, множество $\mathfrak{M}$ замкнуто. Если $\mathfrak{M} = \varnothing$, то условие 1) выполняется. Пусть $\mathfrak{M} \neq \varnothing$ и $y(\cdot)\colon \mathfrak{M} \mapsto \mathbb{R}^n$ — такая непрерывная функция, что $y(t) \in T_G(x_*(t))$, $t \in \mathfrak{M}$. В силу условия $\operatorname{int} T_G(x) \neq \varnothing$, $x \in G$, и полунепрерывности сверху (в этом случае) нормального конуса Кларка (см. [12]) можно показать, что существует такое $\delta > 0$, что $y(t) \in N_\delta^*(t)$ для всех $t \in \mathfrak{M}$ (см. [21, Section 3]). Здесь

$$N_\delta(t) = \left\{\gamma y\colon \|y - x\| \leq \delta,\, x \in N_G(x_*(t)),\, \|x\| = 1,\, \gamma \geq 0\right\}$$

— коническая δ-окрестность нормального конуса Кларка $N_G(x_*(t))$ и $N_\delta^*(t)$ — конус, сопряженный к $N_\delta(t)$.

Выберем произвольную точку $\tau \in \mathfrak{M}$ и покажем, что существует такое $\varepsilon(\tau) > 0$, что

$$\frac{\delta_i(x_i(t))}{\partial x} \in N_{\delta/2}(\tau) \tag{3.8}$$

для всех достаточно больших номеров i и всех $t \in \mathfrak{M} \bigcap [\tau - \varepsilon(\tau), \tau + \varepsilon(\tau)]$.

Если $x_*(\tau) \in \operatorname{int} G$, то $N_G(x_*(\tau)) = \{0\}$ и условие (3.8) очевидно выполняется. Пусть $x_*(\tau) \in \partial G$ и условие (3.8) нарушается. Тогда существует такая последовательность $t_i \to \tau$, $i \to \infty$, $t_i \in \mathfrak{M}$, что

$$\frac{\delta_i(x_i(t_i))}{\partial x} \notin N_{\delta/2}(\tau).$$

Согласно определению

$$\frac{\delta_i(x_i(t_i))}{\partial x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial\tilde{\delta}_i(x_i(t_i)+y)}{\partial x}\omega_i(y)\,dy$$

$$= \int\limits_{\{y\colon i\rho(x_i(t_i)+y,G)\le 1\}} \frac{\partial\tilde{\delta}_i(x_i(t_i)+y)}{\partial x}\omega_i(y)\,dy = i \int\limits_{\{y\colon i\rho(x_i(t_i)+y,G)\le 1\}} \frac{\partial\rho(x_i(t_i)+y,G)}{\partial x}\omega_i(y)\,dy.$$

Тогда существует такая последовательность $y_i \to 0$, $i \to \infty$, что

$$v_i = \frac{\partial\rho_i(x_i(t_i)+y_i,G)}{\partial x} \notin N_{\delta/2}(\tau), \quad i = 1,2,\dots\,. \tag{3.9}$$

В силу свойств функции расстояния $\|v_i\| = 1$ и $v_i \in N_G(z_i)$, где $z_i \in G$ — ближайшая точка из G к $x_i(t_i) + y_i$, $i = 1,2,\dots$. Поскольку $x_i(t_i) \to x_*(\tau)$ и $y_i \to 0$ при $i \to \infty$, то $z_i \to x_*(\tau)$ при $i \to \infty$.

Переходя к подпоследовательности, получаем $v_i \to v$ при $i \to \infty$, где $\|v\| = 1$. В силу полунепрерывности сверху нормального конуса Кларка в случае $\operatorname{int} T_G(x) \ne \varnothing$ получаем включение $v \in N_G(x_*(\tau))$, что противоречит условию (3.9). Таким образом, условие (3.8) доказано. Оставшаяся часть доказательства условия 1) теоремы 1 практически дословно совпадает с аналогичным доказательством, приведенным в [21].

Доказательство условия нетривиальности 5) теоремы 1 с небольшими изменениями совпадает с доказательством аналогичного условия (f) в [21, Theorem 1] и проводится методом от противного. Действительно, предположим противное. Тогда $\psi^0 = 0$, $\|\psi(0)\| = 0$ и $\|\eta\| = 0$. В этом случае из условия (3.6) получаем

$$\lim_{i\to\infty} \psi_i^0 \int\limits_0^T \left\|\frac{\partial\delta_i(x_i(t))}{\partial x}\right\| dt = 1. \tag{3.10}$$

Снова рассмотрим замкнутое множество $\mathfrak{M} = \{t \in [0,T]\colon x_*(t) \in G\}$. Если $\mathfrak{M} = \varnothing$, то для всех достаточно больших номеров i имеем $\partial\delta_i(x_i(t))/\partial x \equiv 0$, $t \in [0,T]$, что противоречит равенству (3.10). Следовательно, в этом случае условие 5) выполняется.

Предположим, что $\mathfrak{M} \ne \varnothing$. Тогда в силу условия $\operatorname{int} T_G(x_*(t)) \ne \varnothing$, $t \in \mathfrak{M}$, существуют такая непрерывная функция $q\colon \mathfrak{M} \mapsto \mathbb{R}^n$ и число $\delta > 0$, что $\|q(t)\| = 1$ и $\{y \in \mathbb{R}^n\colon \|y - q(t)\| \le 2\delta\} \subset T_G(x_*(t))$ при всех $t \in \mathfrak{M}$. Тогда, очевидно, имеем

$$\langle q(t), y\rangle \le -2\delta\|y\|, \quad y \in N_G(x_*(t)), \quad t \in \mathfrak{M}.$$

Покажем, что отсюда вытекает неравенство

$$\int\limits_0^T q(t)\,d\eta \le -\frac{\delta}{2}.$$

Действительно, в силу (3.8) для любого $\tau \in \mathfrak{M}$ существует такое $\varepsilon(\tau) > 0$, что для всех достаточно больших номеров i имеем

$$\frac{\partial\delta_i(x_i(t))}{\partial x} \in N_{\delta/2}(\tau), \quad t \in \mathfrak{M} \bigcap [\tau - \varepsilon(\tau), \tau + \varepsilon(\tau)].$$

Следовательно, для любого $t \in \mathfrak{M} \bigcap [\tau - \varepsilon(\tau), \tau - \varepsilon(\tau)]$ существуют такие $z(t) \in N_G(x_*(t))$, $\|z(t)\| = 1$, и $\xi(t)$, $\|\xi(t)\| \le \delta/2$, что

$$\frac{\partial \delta_i(x_i(t))}{\partial x} = (z(t) + \xi(t)) \Big\| \frac{\partial \delta_i(x_i(t))}{\partial x} \Big\|. \tag{3.11}$$

В силу непрерывности функции $q(\cdot)$, уменьшая, если необходимо, $\varepsilon(\tau) > 0$, получаем

$$\langle q(t), z \rangle \le -\delta \|z\| \quad \text{для всех} \quad z \in N_G(x_*(t)) \quad \text{и} \quad t \in \mathfrak{M} \bigcap [\tau - \varepsilon(\tau), \tau + \varepsilon(\tau)].$$

Откуда согласно (3.11) вытекает справедливость для всех достаточно больших номеров i неравенства

$$\int\limits_{\mathfrak{M} \bigcap [\tau - \varepsilon(\tau), \tau + \varepsilon(\tau)]} \Big\langle q(s), \frac{\partial \delta_i(x_i(s))}{\partial x} \Big\rangle \, ds \le -\frac{\delta}{2} \int\limits_{\mathfrak{M} \bigcap [\tau - \varepsilon(\tau), \tau + \varepsilon(\tau)]} \Big\| \frac{\partial \delta_i(x_i(s))}{\partial x} \Big\| \, ds.$$

В силу компактности множества $\mathfrak{M}$ существует такой конечный набор непересекающихся полуинтервалов $\{I_j\}_{j=1}^N$, что $\mathfrak{M} \subset \bigcup_{j=1}^N I_j$, и для всех достаточно больших номеров i имеем

$$\int\limits_{I_j \bigcap \mathfrak{M}} \Big\langle q(s), \frac{\partial \delta_i(x_i(s))}{\partial x} \Big\rangle \, ds \le -\frac{\delta}{2} \int\limits_{I_j \bigcap \mathfrak{M}} \Big\| \frac{\partial \delta_i(x_i(s))}{\partial x} \Big\| \, ds, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} \Big\langle q(s), \frac{\partial \delta_i(x_i(s))}{\partial x} \Big\rangle \, ds \le -\frac{\delta}{2} \int\limits_{\mathfrak{M}} \Big\| \frac{\partial \delta_i(x_i(s))}{\partial x} \Big\| \, ds.$$

Из последнего неравенства с учетом определения меры η и условия (3.10) получаем

$$\int\limits_0^T q(s) \, d\eta \le -\frac{\delta}{2} < 0.$$

Следовательно, мера η ненулевая. Условие 5) доказано.

Докажем условие 3) теоремы 1. Определим функции $p_i \colon [0, T] \mapsto \mathbb{R}^1$ и $q_i \colon [0, T] \mapsto \mathbb{R}^1$, $i = 1, 2, \dots$, следующим образом:

$$p_i(t) = H\bigg(x_i(t), \psi_i(t) + \lambda \int\limits_0^t \eta_i(s) \, ds\bigg), \quad q_i(t) = \psi_i^0 \left(\lambda \delta_i(x_i(t)) + \|x_i(t) - x_*(t)\|^2\right), \quad t \in [0, T].$$

Тогда для любого $i = 1, 2, \dots$ справедливо равенство $h_i(t) = p_i(t) - q_i(t)$, $t \in [0, T]$ (см. (3.5)). В силу леммы 1 и концевого ограничения в момент 0 (см. (2.7)) имеем

$$p_i(0) = H(x_i(0), \psi_i(0)) \to H(x_*(0), \psi_0) \quad \text{при} \quad i \to \infty,$$

$$q_i(0) = \psi_i^0 \left(\lambda \delta_i(x_i(0)) + \|x_i(0) - x_*(0)\|^2\right) \to \psi^0 \lambda \delta_M(x_*(0)) \quad \text{при} \quad i \to \infty.$$

Значит, последовательность $\{|h_i(0)|\}_{i=1}^\infty$ ограничена, а исходя из (3.3) последовательность $\{\dot{h}_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ сходится к 0 в $L^\infty([0, T], \mathbb{R}^1)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что

$$\lim_{i \to \infty} h_i(t) = h(t) \equiv H(x_*(0), \psi_0) - \psi^0 \lambda \delta_M(x_*(0)), \quad t \in [0, T]. \tag{3.12}$$

С другой стороны, для $t = T$ согласно определению меры η и концевого ограничения в момент T (см. (2.7)) имеем

$$h(T) = \lim_{i \to \infty} h_i(T) = \lim_{i \to \infty} \bigg\{ H\bigg(x_i(T), \psi_i(T) + \lambda \int\limits_0^T \eta_i(s) \, ds\bigg) - \psi_i^0 \big(\lambda \delta_i(x_i(T)) + \|x_i(T) - x_*(T)\|^2\big) \bigg\}$$

$$= H\left(x_*(T), \psi(T) + \lambda \int_0^T d\eta\right) - \psi_i^0 \lambda \delta_M(x_*(T)).$$

Откуда в силу условия (3.12) вытекает выполнение условия 3) теоремы 1 в момент T.

Пусть теперь $\tau \in (0, T)$ — точка правой аппроксимативной непрерывности функции $\delta_M(x_*(\cdot))$. Тогда функция $\delta_M(x_*(\cdot))$ непрерывна справа в точке τ вдоль некоторого измеримого множества E, имеющего точку τ точкой правой плотности. В силу следствия 2, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $\lim_{i\to\infty} \delta_i(x_i(t)) = \delta_M(x_*(t))$ для п.в. всех $t \in E$. Поэтому существует такая последовательность $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\tau_i \in E$, $i = 1, 2, \dots$, что $\tau_i \to \tau$ при $i \to \infty$ и $\lim_{j\to\infty} \delta_j(x_j(\tau_i)) = \delta_M(x_*(\tau_i))$ для любого $i = 1, 2, \dots$. Следовательно, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $\delta_i(x_i(\tau_i)) \to \delta_M(x_*(\tau))$ при $i \to \infty$. Поскольку

$$\int_0^{\tau} d\eta = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{i\to\infty} \int_0^{\tau+\varepsilon} \eta_i(s)\, ds,$$

то снова, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что

$$\int_0^{\tau} d\eta = \lim_{i\to\infty} \int_0^{\tau_i} \eta_i(s)\, ds.$$

Значит,

$$h(\tau) = \lim_{i\to\infty} h_i(\tau_i) = \lim_{i\to\infty} \left[H\left(x_i(\tau_i), \psi_i(\tau_i) + \lambda \int_0^{\tau_i} \eta_i(s)\, ds\right) - \psi_i^0 \big(\lambda \delta_i(x_i(\tau_i)) + \|x_i(\tau_i) - x_*(\tau)\|^2\big) \right]$$

$$= H\left(x_*(\tau), \psi(\tau) + \lambda \int_0^{\tau} \eta(s)\, ds\right) - \psi^0 \lambda \delta_M(x_*(\tau)).$$

Откуда в силу (3.12) для п.в. $t \in (0, T)$ получаем

$$H\left(x_*(t), \psi(t) + \lambda \int_0^{t} \eta(s)\, ds\right) - \psi^0 \lambda \delta_M(x_*(t)) = H(x_*(0), \psi_0) - \psi^0 \lambda \delta_M(x_*(0)).$$

Таким образом, условие 3) теоремы 1 доказано.

Докажем условие 2) теоремы 1. Действительно, как показано выше, не ограничивая общности, можно считать, что $\psi_i(\cdot) \to \psi(\cdot)$ в $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ и $\dot{\psi}_i(\cdot) \to \dot{\psi}(\cdot)$ слабо в $L^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ при $i \to \infty$. В силу определения меры η имеем

$$\int_0^t d\eta = \lim_{i\to\infty} \int_0^t \eta_i(s)\, ds \quad \text{при} \quad \text{п.в.} \quad t \in [0, T].$$

В силу полунепрерывности сверху субдифференциала Кларка [12] получаем:

$$\limsup_{i\to\infty} \partial H\left(x_i(t), \psi_i(t) + \lambda \int_0^t \eta_i(s)\, ds\right) \subset \partial H\left(x_*(t), \psi(t) + \lambda \int_0^t d\eta\right) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0, T].$$

Согласно теореме Мазура [11] из последнего включения и включения (3.7) следует справедливость утверждения 2) теоремы 1.

Условие 4) теоремы 1 вытекает из включения (3.2) в силу полунепрерывности сверху конуса обобщенных нормалей $\hat{N}_{\tilde{M}_i}(\cdot)$ к замкнутому множеству $\tilde{M}_i$, $i = 1, 2$, и полунепрерывности сверху обобщенного градиента $\hat{\partial}\varphi(\cdot, \cdot)$ локально липшицевой функции $\varphi(\cdot, \cdot)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арутюнов А.В.** Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности // Математический анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 27. С. 147–235.
2. **Арутюнов А.В.** Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997. 254 p.
3. **Арутюнов А.В., Асеев С.М.** Принцип максимума в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями. Невырожденность и устойчивость // Докл. РАН. 1994. Т. 334, № 2. С. 134–137.
4. **Арутюнов А.В., Тынянский Н.Т.** О принципе максимума в задаче с фазовыми ограничениями // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1984. № 4. С. 60–68.
5. **Асеев С.М., Смирнов А.И.** Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального прохождения через заданную область // Докл. РАН. 2004. Т. 395, № 5. С. 583–585.
6. **Асеев С.М., Смирнов А.И.** Необходимые условия оптимальности первого порядка для задачи оптимального прохождения через заданную область // Нелинейная динамика и управление: сб. ст. М.: Физматлит, 2004. Т. 4. С. 179–204.
7. **Дубовицкий А.Я., Дубовицкий В.А.** Необходимые условия сильного минимума в задачах оптимального управления с вырождением концевых и фазовых ограничений // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, вып. 2. С. 175–176.
8. **Дубовицкий А.Я., Дубовицкий В.А.** Принцип максимума в регулярных задачах оптимального управления, у которых концы фазовой траектории лежат на границе фазового ограничения // Автоматика и телемеханика. 1987. № 12. С. 25–33.
9. **Дубовицкий А.Я., Дубовицкий В.А.** Критерий существования содержательного принципа максимума в задаче с фазовыми ограничениями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 10. С. 1611–1616.
10. **Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.** Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, № 3. С. 395–453.
11. **Иоффе А.Д., Тихомиров В. М.**, Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 481 с.
12. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
13. **Мордухович Б.Ш.** Принцип макисмума в задачах оптимального быстродействия с негладкими ограничениями // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40, вып. 6. С. 1014–1023.
14. **Мордухович Б.Ш.** Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988. 360 с.
15. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. 3-е изд. М.: Наука, 1974. 480 с.
16. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
17. **Пшеничный Б.Н., Очилов С.** О задаче оптимального прохождения через заданную область // Кибернетика и вычисл. техника. 1993. Т. 99. С. 3–8.
18. **Пшеничный Б.Н., Очилов С.** Об одной специальной задаче оптимального быстродействия // Кибернетика и вычисл. техника. 1994. Т. 101. С. 11–15.
19. **Смирнов А.И.** Необходимые условия оптимальности для одного класса задач оптимального управления с разрывным интегрантом // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 222–239.
20. **Филиппов А.Ф.** О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. Московск. ун-та. № 2. С. 25–32.
21. **Arutyunov A.V., Aseev S.M.** Investigation of the degeneracy phenomenon of the maximum principle for optimal control problems with state constraints // SIAM J. Control Optim. 1997. Vol. 35, no. 3. P. 930–952.
22. **Aseev S.M.** Methods of regularization in nonsmooth problems of dynamic optimization // J. Math. Sci. 1999. Vol. 94, no. 3. P. 1366–1393.
23. **Ermoliev Yu., Norkin V.**, Risk and extended utility functions: optimization approaches. IIASA Interim Report: IIASA IR-03-033. Laxenburg, 2003. 25 p.
24. **Cesari L.** Optimization – theory and applications. problems with ordinary differential equations. New York: Springer-Verlag, 1983. 542 p. (Appl. Math.; vol. 17.)

25. **Fontes F.A.C.C., Frankowska H.** Normality and nondegeneracy for optimal control problems with state constraints // J. Optim. Theory Appl. 2015. Vol. 166, iss. 1. P. 115–136. doi:10.1007/s10957-015-0704-1 .
26. **Hartl R.F., Sethi S.P., Vickson R.G.** A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints // SIAM Review. 1995. Vol. 37, no. 2. P. 181–218. doi: 10.1137/1037043 .

Асеев Сергей Миронович
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. отделом дифференциальных уранений
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: aseev@mi.ras.ru

Поступила 30.11.2016

REFERENCES

1. Arutyunov A.V. Perturbations of extremal problems with constraints and necessary optimality conditions. *J. Soviet Math.*, 1991, vol. 54, no. 6, pp. 1342–1400. doi: 10.1007/BF01373649 .
2. Arutyunov A.V. *Optimality conditions: abnormal and degenerate problems.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000, Ser. Math. Its Appl., vol. 526, 299 p. Original Russian text published in *Usloviya ekstremuma. Anormal'nye i vyrozhdennye zadachi*, Moscow: Faktorial Publ., 1997, 254 p.
3. Arutyunov A.V., Aseev S.M. The maximum principle in optimal control problems with phase constraints. Nondegeneracy and stability. *Russ. Acad. Sci., Dokl. Math.*, 1994, vol. 49, no. 1, pp. 38–42.
4. Arutyunov A.V., Tynyanskij, N.T. The maximum principle in a problem with phase constraints. *Sov. J. Comput. Syst. Sci.*, 1985, vol. 23, no. 1, pp. 28–35.
5. Aseev S.M., Smirnov A.I. The Pontryagin maximum principle for the problem of optimally crossing a given domain. *Dokl. Math.*, 2004, vol. 69, no. 2, pp. 243–245.
6. Aseev S.M., Smirnov A.I. Necessary first-order conditions for optimal crossing of a given region. *Comput. Math. Model.*, 2007, vol. 18, pp. 397–419. doi:10.1007/s10598-007-0034-8 .
7. Dubovitskii A.Ya., Dubovitskii V.A. Necessary conditions for a strong minimum in optimal control problems with degeneracy of the end-point and phase constraints. *Russian Math. Surveys*, 1985, vol. 40, no. 2, pp. 209–210. doi: 10.1070/RM1985v040n02ABEH003563 .
8. Dubovitskii A.Ya., Dubovitskii V.A. The maximum principle in regular optimal control problems where the ends of the phase path are on the boundary of the phase constraint. *Avtomatika i Telemekhanika*, 1987, no. 12, pp. 25–33 (in Russian).
9. Dubovitskii A.Ya., Dubovitskii V.A. A criterion for the existence of a meaningful maximum principle in a problem with phase constraints. *Diff. Equat.*, 1995, vol. 31, no. 10, pp. 1595–1602.
10. Dubovitskii A.Ya., Milyutin A.A. Extremum problems in the presence of restrictions. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1965, vol. 5, no. 3, pp. 1–80. doi: 10.1016/0041-5553(65)90148-5 .
11. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Theory of extremal problems.* Amsterdam: Elsevier North-Holland, 1979, 460 p. Original Russian text published in *Teoriya ekstremal'nykh zadach*, Moscow: Nauka Publ., 1974, 481 p.
12. Clarke H. *Optimization and nonsmooth analysis.* New York, Wiley, 1983, 308 p. Translated under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow, Nauka Publ., 1988, 280 p.
13. Mordukhovich B.Sh. Maximum principle in the problem of time optimal response with nonsmooth constraints. *J. Appl. Math. Mech.* 1976, vol. 40, iss. 6, pp. 960–969. doi: 10.1016/0021-8928(76)90136-2 .
14. Mordukhovich, B.Sh. *Metody approksimatsij v zadachakh optimizatsii i upravleniya* [Approximation methods in problems of optimization and control]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 360 p.
15. Natanson I.P. *Teoriya funktsii veshchestvennoi peremennoi* [Theory of functions of a real variable], 3-e izd., Moscow: Nauka Publ., 1974, 480 p.
16. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt, New York; London: Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. Original Russian text published in *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
17. Pshenichnyi B.N., Ochilov S. On the problem of the optimal passage through a given domain. *Kibernetika i Vychisl. Tekhnika*, 1993, no. 99, pp. 3–8 (in Russian).

18. Pshenichnyi B.N., Ochilov S. On a special time-optimality problem. *Kibernetika i Vychisl. Tekhnika*, 1994, no. 101, pp. 11–15 (in Russian).
19. Smirnov A.I. Necessary optimality conditions for a class of optimal control problems with discontinuous integrand. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2008, vol. 262, pp. 213-230. doi: 10.1134/S0081543808030176 .
20. Filippov A.F. On some questions in the theory of optimal regulation. *J. SIAM Control. Ser A.*, 1962, vol. 1, pp. 76–84.
21. Arutyunov A.V., Aseev S.M. Investigation of the degeneracy phenomenon of the maximum principle for optimal control problems with state constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 1997, vol. 35, no. 3, pp. 930–952.
22. Aseev S.M. Methods of regularization in nonsmooth problems of dynamic optimization. *J. Math. Sci.*, 1999, vol. 94, no. 3, pp. 1366–1393.
23. Ermoliev Yu., Norkin V. Risk and extended utility functions: optimization approaches. *IIASA Interim Report: IIASA IR-03-033*, Laxenburg, 2003, 25 p.
24. Cesari L. Optimization – theory and applications. problems with ordinary differential equations. New York: Springer-Verlag, 1983, Ser. Appl. Math., vol. 17, 542 p.
25. Fontes F.A.C.C., Frankowska H. Normality and nondegeneracy for optimal control problems with state constraints. *J. Optim. Theory Appl.*, 2015, vol. 166, iss. 1, pp. 115–136. doi:10.1007/s10957-015-0704-1 .
26. Hartl R.F., Sethi S.P., Vickson R.G. A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints. *SIAM Review*, 1995, vol. 37, no. 2, pp. 181–218. doi: 10.1137/1037043 .

Aseev S.M. Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of RAS, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russian, e-mail: e-mail: aseev@mi.ras.ru .