ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

СЛАБАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА С ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ[1]

А. А. Успенский

Рассматривается проблема построения множеств, разрешающих дифференциальную игру или задачу оптимального управления, исходя из знания динамики системы, ресурсов управления и краевых условий. Построение таких множеств, причем наибольших из возможных (максимального стабильного моста — в дифференциальной игре, множества управляемости — в задаче управления), является нетривиальной задачей. Это обусловлено сложной геометрией множеств, которым свойственны невыпуклость и негладкость границ. На практике при решении инженерных задач, имеющих определенные допуски и отклонения, зачастую считается приемлемым построение разрешающего множества, не обладающего свойством максимальности. При этом конструируемое множество может быть наделено характеристиками, в дальнейшем облегчающими формирование управляющих воздействий. Например, множество может иметь выпуклые сечения, гладкую границу. В рамках означенной направленности работ в статье изучено свойство стабильности (слабой инвариантности) для одного класса множеств, рассматриваемых в пространстве позиций дифференциальной игры. На основе введенного В.Н. Ушаковым понятия дефекта стабильности множества получен критерий слабой инвариантности относительно конфликтно управляемой динамической системы для цилиндрических множеств. В частном случае линейной управляемой системы выявлены легко проверяемые достаточные условия слабой инвариантности для цилиндрических множеств, имеющих эллипсоидальные сечения. Обоснование условий опирается на конструкции и факты субдифференциального исчисления. Приведен иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: стабильное множество, слабая инвариантность, дифференциальная игра, гамильтониан, дефект стабильности, цилиндрическое множество, эллипсоид, субдифференциал.

A. A. Uspenskii. Weak invariance of a cylindrical set with smooth boundary with respect to a control system.

We consider the problem of constructing resolving sets for a differential game or an optimal control problem based on information on the dynamics of the system, control resources, and boundary conditions. The construction of largest possible sets with such properties (the maximal stable bridge in a differential game or the controllability set in a control problem) is a nontrivial problem due to their complicated geometry; in particular, the boundaries may be nonconvex and nonsmooth. In practical engineering tasks, which permit some tolerance and deviations, it is often admissible to construct a resolving set that is not maximal. The constructed set may possess certain characteristics that would make the formation of control actions easier. For example, the set may have convex sections or a smooth boundary. In this context, we study the property of stability (weak invariance) for one class of sets in the space of positions of a differential game. Using the notion of stability defect of a set introduced by V.N. Ushakov, we derive a criterion of weak invariance with respect to a conflict-controlled dynamic system for cylindrical sets. In a particular case of a linear control system, we obtain easily verified sufficient conditions of weak invariance for cylindrical sets with ellipsoidal sections. The proof of the conditions is based on constructions and facts of subdifferential calculation. An illustrating example is given.

Keywords: stable set, weak invariance, differential game, Hamiltonian, stability defect, cylindrical set, ellipsoid, subdifferential.

MSC: 37C75

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-241-250

Введение

Стабильность множества относится к числу ключевых понятий теории позиционных дифференциальных игр [1, гл. 3]. В ранних работах Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [2;3] свойство стабильности формулировалось в терминах динамической системы и управлений игроков, а затем — в терминах соответствующих дифференциальных включений [4], тесно связанных с динамикой игры. Эволюция понятия привела к унификационной форме представления

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект № 15-16-1-13.

свойства стабильности [5], которая вовлекает понятие гамильтониана динамической системы. Унификационная форма записи свойства стабильности множества не включает явно управляющие воздействия, что делает возможным применение этого свойства при решении задач смежных разделов математики, например при построении минимаксных (обобщенных) решений краевых задач для уравнений в частных производных первого порядка и уравнений типа Гамильтона — Якоби — Беллмана [6; 7]. В середине 1980-х г. было получено инфинитезимальное представление свойства стабильности, выраженное в терминах конусов Булигана или правых производных множеств [8] и открывающее новые возможности для разработки процедур решения задач управления.

Согласно терминологии, получившей распространение в англоязычной литературе [9; 10], а затем и в отечественных исследованиях (например, [11]), свойство стабильности выражает свойство слабой инвариантности множества в пространстве позиций относительно дифференциального включения или некоторого семейства дифференциальных включений. Заметим, что слабая инвариантность необходима, в частности, при исследовании задач выживаемости решений управляемых систем при наличии фазовых ограничений [12; 13].

Следует подчеркнуть, что в общем случае крайне затруднительно, а порой невозможно, опираясь на то или иное представление свойства стабильности, найти в аналитической или же аппроксимационной форме множество, являющееся разрешающим элементом для задачи управления. Это замечание относится, например, к максимальному стабильному мосту — основному элементу разрешающей конструкции дифференциальной игры сближения-уклонения. Оно же справедливо для случая, когда речь идет о построении для управляемой динамической системы ядра выживаемости во множестве фазовых ограничений. Поскольку конструирование означенных множеств, являющихся максимальными по вложению с нужными свойствами, трудно реализуемо, естественным образом возникает задача выявления множеств, обладающих свойством стабильности, пусть даже при этом не являющихся максимальными из возможных. В рамках этого направления исследований в настоящей работе получены достаточные условия слабой инвариантности цилиндрических множеств с эллипсоидальными сечениями. Привлечение эллипсоидов при построении с той или иной степенью грубости решений задач управления не ново и активно используется представителями различных научных школ по теории математического управления (см., например, монографии [14–16]).

1. Постановка игровой задачи о сближении. Дефект стабильности множества

Рассматривается конфликтно-управляемая система, поведение которой на отрезке времени $[t_0, \vartheta],\ t_0 < \vartheta < \infty$, описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad x(t_0) = x_0, \quad u \in U, \quad v \in V. \tag{1.1}$$

Здесь x — m-мерный фазовый вектор системы, u — управление первого игрока, v — управление второго игрока, U и V — компакты в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно.

Предполагается, что выполнены стандартные для теории позиционных дифференциальных игр условия [1]. Игра происходит в ограниченной и замкнутой области D пространства переменных $t, x (t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, выполняется условие седловой точки в маленькой игре. Функция $f(t, x, u, v)$ непрерывна по совокупности переменных $(t, x, u, v) \in D \times U \times V$ и удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(t, x^{(1)}, u, v) - f(t, x^{(2)}, u, v)\| \leqslant L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \ \ (t, x^{(i)}, u, v) \in D \times U \times V, \ \ i = 1, 2, \ \ L \in (0, \infty).$$

Здесь символ $\|f\|$ означает норму вектора в евклидовом пространстве. Также предполагается, что движения $x[t]$ системы (1.1) продолжимы на $[t_0, \vartheta]$.

Дифференциальная игра сближения-уклонения складывается из задачи о сближении и задачи об уклонении. В задаче о сближении, стоящей перед первым игроком, требуется обеспечить попадание движения $x[t]$ системы (1.1) в момент ϑ на замкнутое терминальное множество M в пространстве $\mathbb{R}^m$. Решение задачи требуется обеспечить в классе позиционных процедур управления первого игрока. Задача об уклонении, стоящая перед вторым игроком, заключается в том, чтобы гарантировать уклонение движения системы (1.1) от M на промежутке $[t_0, \vartheta]$. Решение задачи требуется определить в классе контр-позиционных процедур управления второго игрока (подробнее см. [1, гл. 14]).

Теорема об альтернативе [1, гл. 3] гласит, что существует максимальный стабильный мост — замкнутое множество $W^0 \subset D$ такое, что для всех исходных позиций $(t, x) \in W^0$ разрешима задача о сближении, а для всех исходных позиций $(t, x) \in D \setminus W^0$ разрешима задача об уклонении. Построение моста осуществляется посредством оператора стабильного поглощения, реализующего свойство стабильности W^0, например в унификационной форме [17]. При этом выделение W^0 в аналитическом или аппроксимационном виде представляет серьезную математическую проблему, поскольку W^0 является очень часто невыпуклым множеством с негладкой границей. Подобная ситуация мотивирует исследователей на поиск классов множеств, которые сохраняют свойство стабильности, но при этом обладают более простыми и реализуемыми на практике конструктивными свойствами, такими, например, как гладкость границы и выпуклость временных слоев. Ясно, что в общем случае эти множества не совпадают с максимальным стабильным мостом W^0 и, стало быть, решают игровую задачу о сближении на более узком множестве, нежели W^0.

Удобный аппарат для исследования множеств на предмет наличия у них свойства слабой инвариантности основан на понятии дефекта стабильности множества, введенном В. Н. Ушаковым [18]. Ниже кратко приведем основные формальные соотношения, сопутствующие этому понятию, по возможности сохраняя принятые обозначения и терминологию. Подробное изложение конструкции дефекта стабильности множества содержатся, например, в [18; 19].

Пусть множество $W^* \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, причем сечение $W^*(\vartheta) = \{x \in \mathbb{R}^m \colon (\vartheta, x) \in W^*\} \subset M$. На многозначное отображение $t \to W^*(t) \colon [t_0, \vartheta] \to \mathbb{R}^m$ накладываются условия непрерываемости и условие типа Липшица. Каждой граничной точке $(t, x) \in \partial W^*$, $t \in [t_0, \vartheta)$, ставится в соответствие число

$$\varepsilon(t, x) = \sup_{l \in S} \rho\big(\overrightarrow{D} W^*(t, x), F_l(t, x)\big). \tag{1.2}$$

Здесь $\rho(W_1, W_2) = \inf\big\{\|w_1 - w_2\| : (w_1, w_2) \in W_1 \times W_2\big\}$ — расстояние между множествами $W_1 \subset \mathbb{R}^m$ и $W_2 \subset \mathbb{R}^m$,

$$\overrightarrow{D} W^*(t, x) = \Big\{d \in \mathbb{R}^m \colon d = \lim_{k \to \infty} (t_k - t)^{-1}(w_k - x),\ \big\{(t_k, w_k)\big\} \text{ — последовательность в } W^*,$$

$$\text{где } t_k \downarrow t \text{ при } k \to \infty, \lim_{k \to \infty} w_k = x\Big\}$$

— производное множество. Сегмент $F_l(t, x) = \Pi_l(t, x) \cap F(t, x)$ определяет правую часть дифференциального включения, отвечающего рассматриваемой игре; здесь

$$\Pi_l(t, x) = \{l \in \mathbb{R}^m \colon \langle l, f \rangle \leqslant H(t, x, l)\}$$

— полупространство в $\mathbb{R}^m$, $H(t, x, l) = \max\limits_{u \in P} \min\limits_{v \in Q} \langle l, f(t, x, u, v)\rangle$ — гамильтониан динамической системы (1.1), $(t, x, l) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов евклидова пространства. Множество $F(t, x)$ — компакт в $\mathbb{R}^m$, содержащий выпуклую оболочку вектограммы возможных скоростей динамической системы (1.1) в точке $(t, x) \in W^*$.

Величина $\varepsilon(t, x) \geqslant 0$ называется *дефектом стабильности множества* W^* *в точке* $(t, x) \in \partial W^*$, $t \in [t_0, \vartheta)$. Дефект стабильности (1.2) является числовой характеристикой, выражающей в зависимости от своего значения наличие или отсутствие в локальном смысле слабой инвариантности множества W^* относительно семейства дифференциальных включений $\dot{x} \in F_l(t, x)$, отвечающих выбранным векторам $l \in S$, где $S = \{s \in \mathbb{R}^m\colon \|s\| = 1\}$ — сфера единичного радиуса. А именно содержательно случай $\varepsilon(t,x) = 0$ свидетельствует о наличии свойства стабильности у множества в точке $(t,x) \in \partial W^*$, что означает существование стратегии первого игрока, которая гарантирует на достаточно малых временных интервалах сохранение на множестве W^* траектории управляемой системы, исходящей из точки $(t,x) \in \partial W^*$. Напротив, случай строгого неравенства $\varepsilon(t,x) > 0$ говорит о наличии стратегии второго игрока, которая вне зависимости от реализации допустимых значений управлений первого игрока выводит траекторию управляемой системы вовне множества W^*. Таким образом, множество $W^* \subset [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^m$ слабо инвариантно относительно семейства (по $l \in S$) дифференциальных включений $\dot{x} \in F_l(t,x)$, $(t,x) \in [t_0,\vartheta) \times \mathbb{R}^m$, тогда и только тогда, когда для всех точек $(t,x) \in \partial W^*$ дефект стабильности $\varepsilon(t,x) = 0$. Здесь по умолчанию при заданных допущениях считается, что $\varepsilon(\vartheta,x) = 0$, когда $x \in W^*(\vartheta)$, поскольку $x \in W^*(\vartheta) \subset M$.

2. О слабой инвариантности цилиндрических множеств с гладкой границей в терминах дефекта стабильности

Остановимся подробнее на случае, когда множество определяется непрерывно дифференцируемой функцией:
$$W^* = \bigl\{(t,x) \in \mathbb{R}^m\colon \varphi(t,x) \leqslant 0\bigr\}.$$
Здесь функция $\varphi(t,x)$ определена и непрерывна вместе с частными производными $\dfrac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_m}$ в $\mathbb{R}^{m+1}$. Обозначим градиент этой функции по фазовым переменным $\nabla\varphi(t,x) = \Bigl(\dfrac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_m}\Bigr)$. Предполагаем, что градиент не вырожден на границе множества, т. е. $\nabla\varphi(t,x) \neq 0$, $(t,x) \in \partial W^*$.

В рассматриваемом случае производное множество
$$\overrightarrow{D}W^*(t,x) = \Bigl\{d \in \mathbb{R}^m\colon \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + \langle\nabla\varphi(t,x), d\rangle \leqslant 0\Bigr\},$$
причем (см. [18, с. 182]) в точке $(t,x) \in \partial W^*$ дефект стабильности $\varepsilon(t,x) = 0$ тогда и только тогда, когда
$$\|\nabla\varphi(t,x)\|^{-1}\Bigl(\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + H^{(0)}\bigl(t,x,\nabla\varphi(t,x)\bigr)\Bigr) \leqslant 0. \tag{2.1}$$
Здесь $H^{(0)}(t,x,l) = \min\limits_{u\in P}\max\limits_{v\in Q}\langle l, f(t,x,u,v)\rangle$.

Располагая критерием локальной стабильности множества с гладкой границей (2.1), нетрудно его переформулировать для частных ситуаций. Пусть теперь множество рассмотрения является цилиндрическим по временной переменной:
$$W^* = \bigl\{(t,x) \in \mathbb{R}^m\colon h(x) \leqslant 0\bigr\}. \tag{2.2}$$
Здесь полагаем, что функция $h(x)$ определена и непрерывна вместе с частными производными $\dfrac{\partial h(x)}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial h(x)}{\partial x_m}$ в $\mathbb{R}^m$, причем градиент $\nabla h(x) \neq 0$, $(t,x) \in \partial W^*$. Очевидно, что $\dfrac{\partial h(x)}{\partial t} \equiv 0$. В этом случае (см. (2.1)) в точке $(t,x) \in \partial W^*$ дефект стабильности $\varepsilon(t,x) = 0$ тогда и только тогда, когда
$$H^{(0)}\bigl(t,x,\nabla h(x)\bigr) \leqslant 0. \tag{2.3}$$

Минимаксное неравенство (2.3) является ключевым соотношением при исследовании свойства стабильности цилиндрических множеств в дифференциальных играх и задачах управления. Его структура проявляется явно в зависимости от вида правой части дифференциального уравнения (1.1). Так, например, если динамика игры определяется $f(t,x,u,v) = f_0(t,x) +$

$B(t,x)u+C(t,x)v$, где вектор-функция $f_0(t,x)$ и матрицы $B(t,x)$ и $C(t,x)$ непрерывны, удовлетворяют локальному условию Липшица, при этом выполняется условие подлинейного роста, то в граничной точке $(t,x) \in \partial W^*$ цилиндрического множества (2.2) дефект стабильности $\varepsilon(t,x) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\langle \nabla h(x), f_0(t,x)\rangle + \min_{u\in P}\langle \nabla h(x), B(t,x)\rangle + \max_{v\in Q}\langle \nabla h(x), C(t,x)\rangle \leqslant 0. \tag{2.4}$$

На практике проверка неравенства (2.4) сопряжена с большим объемом алгоритмически нетривиальных вычислительных процедур. Для динамических систем (1.1) частного вида можно указать относительно легко проверяемые достаточные условия, при которых неравенство (2.4) выполняется. Пример такой динамической системы приведен в следующем разделе.

3. Случай линейной управляемой динамики с постоянной знакоопределенной матрицей невозмущенной системы

Рассмотрим линейную управляемую системы частного вида с динамикой

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \|u\| \leqslant 1. \tag{3.1}$$

Здесь x — m-мерный фазовый вектор системы, u — m-мерный вектор управления, время $t \in [t_0, \vartheta] \subset \mathbb{R}$. Постоянная матрица A размерности $m \times m$ является знакоопределенной, B — постоянная матрица размерности $m \times m$. При отсутствии второго игрока в задаче о сближении требуется обеспечить попадание движения $x[t]$ управляемой системы (3.1) в момент ϑ на замкнутое терминальное множество M в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Выделим класс цилиндрических множеств с эллипсоидальными сечениями $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m \colon x^T P^{-1} x \leqslant 1\}$ вида

$$W^* = \bigl\{(t,x) \in \mathbb{R}^m \colon x^T P^{-1} x \leqslant 1\bigr\}. \tag{3.2}$$

Здесь матрица эллипсоида $P^{-1} \in \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ — совокупность положительно определенных матриц размерности $m \times m$, символ “T” обозначает транспонирование. В дальнейшем полагаем, что $\mathcal{P}$ включает в себя только те матрицы, которые гарантируют выполнение краевых условий. Здесь предполагается, что в момент $t = \vartheta$ краевые условия выполняются в смысле вложения $W^*(\vartheta) = \Omega \subset M$.

В рассматриваемом случае функция $h(x) = x^T P^{-1} x - 1$, ее градиент $\nabla h(x) = 2x^T P^{-1}$. Вектор $\nabla h(x) = 2x^T P^{-1}$ определяет внешнюю нормаль к эллипсоиду Ω в точке $x \in \partial\Omega$. Критерий локальной стабильности цилиндрического множества (3.2) трансформируется (см. (2.4)) естественным образом: в точке $(t,x) \in \partial W^* = \bigl\{(t,x) \in [t_0,\vartheta] \subset \mathbb{R} \colon x^T P^{-1} x = 1\bigr\}$ дефект стабильности $\varepsilon(t,x) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\min_{u\colon \|u\|\leqslant 1} \langle \nabla h(x), Ax + Bu\rangle \leqslant 0. \tag{3.3}$$

Далее выявим достаточные условия, накладываемые на параметры задачи управления и матрицу P^{-1} эллипсоида, при которых цилиндрическое множество (3.2) будет слабо инвариантным множеством. Поскольку неравенство (3.3) явно не зависит от времени $t \in [t_0, \vartheta]$, то поиск достаточных условий выливается в отыскание условий, при которых неравенство (3.3) выполняется для всех граничных точек эллипсоида:

$$\min_{u\colon \|u\|\leqslant 1} \langle \nabla h(x), Ax + Bu\rangle \leqslant 0 \ \ \forall x \in \partial\Omega. \tag{3.4}$$

Заметим, что условие (3.4) тем более выполняется, если выполняется условие

$$\max_{x\in\Omega} \min_{u\colon \|u\|\leqslant 1} \langle \nabla h(x), Ax + Bu\rangle \leqslant 0. \tag{3.5}$$

Поскольку

$$\min_{u:\,\|u\|\leqslant 1}\langle \nabla h(x), Ax+Bu\rangle = \langle 2x^TP^{-1}, Ax\rangle + \min_{u:\,\|u\|\leqslant 1}\langle 2x^TP^{-1}, Bu\rangle$$

$$= 2\left(\langle x^TP^{-1}, Ax\rangle + \min_{u:\,\|u\|\leqslant 1}\langle x^TP^{-1}, Bu\rangle\right) = 2\left(\langle x^TP^{-1}, Ax\rangle - \|x^TP^{-1}B\|\right),$$

то условие (3.5) эквивалентно неравенству $\max\limits_{x\in\Omega}\{\langle x^TP^{-1}A, x\rangle - \|x^TP^{-1}B\|\} \leqslant 0$ или, что то же самое,

$$\min_{x\in\Omega}\{\|x^TP^{-1}B\| - \langle x^TP^{-1}A, x\rangle\} \geqslant 0. \tag{3.6}$$

Поставим в соответствие неравенству (3.6) следующую оптимизационную задачу:

$$\left\|x^TP^{-1}B\right\| - \left\langle x^TP^{-1}A, x\right\rangle \downarrow \min_{x\in\Omega}. \tag{3.7}$$

Примем обозначения

$$\alpha(x) = \left\|x^TP^{-1}B\right\|, \quad \beta(x) = -\left\langle x^TP^{-1}A, x\right\rangle, \quad \gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x).$$

Выделим достаточные условия неотрицательности значения функционала в задаче (3.7). Эти условия в силу (3.3)–(3.7) будут достаточными условиями слабой инвариантности множества (3.2) в задаче (3.1).

Заметим, что норма $\alpha(x) = \left\|x^TP^{-1}B\right\|$ является выпуклой, стало быть, субдифференцируемой функцией. Кроме того, P^{-1} — положительно определенная матрица, а матрица A выбирается по условию знакоопределеннной. Поэтому в зависимости от характера знакоопределенности матрицы A функция $\beta(x) = -\left\langle x^TP^{-1}A, x\right\rangle$ является или положительно, или отрицательно определенной квадратичной формой. Соответственно, в этом случае оптимизационная задача (3.7) является либо задачей выпуклой оптимизации, либо задачей минимизации разности выпуклых функций, т. е. задачей d.c. оптимизации [20, гл. 2]. С другой, эквивалентной, точки зрения задача d.c. оптимизации — эта задача на условную оптимизацию суммы выпуклой и вогнутой функций, т. е. задача квазидифференциального (по Демьянову) исчисления [21, гл. 2].

Утверждение. *Если матрица A отрицательно определена, то цилиндрическое множество W^*, задаваемое соотношением* (3.2)*, является слабо инвариантным в задаче управления с динамикой* (3.1).

Доказательство. По условию A — устойчивая (гурвицева) матрица, все ее собственные значения строго отрицательные. Тогда матрица $-P^{-1}A$ квадратичной формы $\beta(x) = -\left\langle x^TP^{-1}A, x\right\rangle$ положительно определена. В этом случае целевая функция $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ является выпуклой (как сумма двух выпуклых функций) и ее субдифференциал [21]

$$\underline{\partial}\gamma(x) = \begin{cases} x^TP^{-1}B/\left\|x^TP^{-1}B\right\| - 2x^TP^{-1}A, & \text{если} \quad x \neq 0,\\ \mathbf{B}(0,1), & \text{если} \quad x = 0.\end{cases}$$

Здесь $\mathbf{B}(z,r) = \{x\in\mathbb{R}^m\colon \|x-z\| = r\}$ — шар с центром в точке $z\in\mathbb{R}^m$ радиуса r.

Имеем $0\in\underline{\partial}f(0)$, откуда следует (см. [21]), что точка $x=0$ является точкой минимума функции $\gamma(x) = \alpha(x)+\beta(x)$ на всем пространстве $\mathbb{R}^m$. Поскольку $x = 0\in\Omega$, то в этой точке достигается решение задачи (3.7), причем $\gamma(0) = 0$. Следовательно, выполняется условие (3.5), а за ним и условие (3.4). Стало быть, W^* — слабо инвариантное множество относительно управляемой системы (3.1).

Утверждение доказано.

Заметим, что это утверждение согласуется с фактами теории устойчивости движений. В рассматриваемом случае все движения невозмущенной системы $\dot{x} = Ax$ в силу ее ассимптотической устойчивости с течением времени стремятся в начало отсчета, т. е. траектории движений, расматриваемые в пространстве позиций, устремлены внутрь множества W^* в направлении нуля фазового пространства. При этом все движения невозмущенной системы являются и движениями управляемой системы (3.1), поскольку по условию ресурс управления включает нулевое управляющее воздействие. Стало быть, по крайней мере одна стратегия управления, та, которая обусловлена выбором управления, тождественного равного нулю, “загоняет” движения системы (3.1) внутрь W^*.

Теорема. *Если матрица A положительно определена, эллипсоид*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m \colon x^T P^{-1} x \leqslant 1\},$$

матрица $P^{-1} \in \mathcal{P}$, где

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} r_1^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & r_n^{-2} \end{pmatrix},$$

причем радиусы $r_1, \dots, r_n$ удовлетворяют неравенству

$$\max\{r_1, \dots, r_n\} \leqslant \lambda_{\min}, \tag{3.8}$$

здесь

$$\lambda_{\min} = \min\{\lambda_0, \lambda_{00}\}, \quad \lambda_0 = \min_{l \in S} \frac{\left\|l^T P^{-1} B\right\|}{\langle l^T P^{-1} A, l\rangle}, \quad \lambda_{00} = \min_{l \in S} \frac{1}{\sqrt{l^T P^{-1} l}},$$

то цилиндрическое множество W^*, задаваемое соотношением (3.2)*, является слабо инвариантным в задаче управления с динамикой* (3.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем и зафиксируем эллипсоид $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m \colon x^T P^{-1} x \leqslant 1\}$, удовлетворяющий условиям теоремы. Приняв во внимание его звездность (относительно нуля), исследуем в задаче (3.7) целевую функцию $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ на лучах, исходящих из начала координат. Выберем произвольно вектор $l \in S$ и рассмотрим сужение γ_L функции $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ на луч $L = L(\lambda) = \{\lambda l \in \mathbb{R}^m \colon \lambda \geqslant 0, l \in S\}$. Поскольку

$$\gamma_l(\lambda) = \left\|(\lambda l)^T P^{-1} B\right\| - \left\langle (\lambda l)^T P^{-1} A, (\lambda l)\right\rangle = \lambda \left\|l^T P^{-1} B\right\| - \lambda^2 \left\langle l^T P^{-1} A, l\right\rangle,$$

то γ_L — вогнутая функция, ибо она представима в виде разности линейной и выпуклой функций. Более того, она является квадратичной с отрицательным коэффициентом при старшем члене, имеет два действительных корня, $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = \dfrac{\left\|l^T P^{-1} B\right\|}{\left\langle l^T P^{-1} A, l\right\rangle}$. Если $\lambda_1 = 0$, то $x_1 = \lambda_1 l = 0$ и $\gamma_L(x_1) = \gamma_L(\lambda_1 l) = 0$. Стало быть, функция γ_L строго положительна справа от $\lambda_1 = 0$ и остается неотрицательной на отрезке $[\lambda_1, \lambda_2] = \left[0, \left\|l^T P^{-1} B\right\| \left(\left\langle l^T P^{-1} A, l\right\rangle\right)^{-1}\right]$. Принадлежность точки $x_2 = \lambda_2 l$ эллипсоиду определяется его параметрами.

Далее учтем ограничения оптимизационной задачи (3.7). Поскольку ее допустимым множеством является эллипсоид $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m \colon x^T P^{-1} x \leqslant 1\}$, то вдоль луча $L(\lambda)$ выполняется неравенство $0 \leqslant (\lambda l)^T P^{-1} (\lambda l) \leqslant 1$. Отсюда получаем ограничения на изменение параметра λ:

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{\sqrt{l^T P^{-1} l}} \triangleq \lambda_3.$$

В таком случае $\gamma_L = \gamma_l(\lambda)$ остается неотрицательной функцией на отрезке $[0, \min\{\lambda_2, \lambda_3\}]$.

Определим величины

$$\lambda_0 = \inf_{l \in S} \frac{\left\|l^T P^{-1} B\right\|}{\langle l^T P^{-1} A, l\rangle}, \quad \lambda_{00} = \inf_{l \in S} \frac{1}{\sqrt{l^T P^{-1} l}}.$$

В рассматриваемом случае матрицы P^{-1} и $P^{-1}A$ положительно определены, стало быть, $\left\langle l^T P^{-1} A, l\right\rangle > 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{l^T P^{-1} l}} > 0$ для всех $l \in S$. Дроби $\lambda_0(l) = \dfrac{\left\|l^T P^{-1} B\right\|}{\left\langle l^T P^{-1} A, l\right\rangle}$ и $\lambda_{00}(l) = \dfrac{1}{\sqrt{l^T P^{-1} l}}$

непрерывны, положительны и в силу компактности сферы S нижние грани их значений на сфере достигаются. Тогда константа $\lambda_{\min} = \min\{\lambda_0, \lambda_{00}\}$ определяет максимальный допустимый радиус полуоси эллипсоида, при котором задача (3.7) имеет неотрицательное решение. Вместе с этим выполняется условие (3.5), а за ним и условие (3.4). Стало быть, W^* — слабо инвариантное множество относительно управляемой системы (3.1).

Теорема доказана.

Покажем, что множество эллипсоидов $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m \colon x^T P^{-1} x \leqslant 1\}$, для которых выполняется условие (3.8), не является пустым.

Примем $A = B \equiv E$, где E — единичная матрица размерности $m \times m$. Полагая, что матрица P^{-1} положительно определена, найдем

$$\lambda_0 = \min_{l \in S} \frac{\left\| l^T P^{-1} B \right\|}{\langle l^T P^{-1} A, l \rangle} = \min_{l \in S} \frac{\left\| l^T P^{-1} \right\|}{\langle l^T P^{-1}, l \rangle}$$

$$= \min_{l \in S} \frac{\left\| l^T P^{-1} \right\|}{\left\| l^T P^{-1} \right\| \left\| l \right\| \cos \widehat{l^T P^{-1}, l}} = \min_{l \in S} \frac{1}{\cos \widehat{l^T P^{-1}, l}} = \max_{l \in S} \cos \widehat{l^T P^{-1}, l} = 1.$$

Здесь $\cos \widehat{l^T P^{-1}, l}$ — косинус угла между векторами $l^T P^{-1}, l$. Поскольку матрица P^{-1} положительно определена, то существуют собственный вектор l^* и собственное значение $\mu^* > 0$ линейного оператора, задаваемого матрицей P^{-1}, такие, что $P^{-1} l^* = \mu^* l^*$. Откуда $\cos \widehat{l^{*T} P^{-1}, l^*} = \cos \widehat{l^{*T}, l^*} = 1$.

Аналогично рассуждая, получаем $\lambda_{00} = \min\limits_{l \in S} \dfrac{1}{\sqrt{l^T P^{-1} l}} = 1$.

В итоге имеем $\lambda_{\min} = \min\{\lambda_0, \lambda_{00}\} = \min\{1, 1\} = 1$. Полученное строгое неравенство означает, что множество эллипсоидов, о которых идет речь в теореме, не пусто. В качестве конкретного примера здесь можно предъявить эллипсоид Ω, матрица которого $P^{-1} = E$. Эллипсоид Ω порождает цилиндрическое множество (3.2), которое слабо инвариантно относительно линейной управляемой системы (3.1), определяемой матрицами $A = B \equiv E$.

В заключение отметим, что в работе получен локальный критерий слабой инвариантности относительно конфликтно управляемой динамической системы цилиндрического множества с гладкой границей. Критерий имеет форму неравенства (2.3), связывающего гамильтониан нелинейной системы, и предоставляет широкие возможности для формирования достаточных условий стабильности различных подклассов цилиндрических множеств. В качестве примера приведены такие условия относительно линейной управляемой системы для цилиндрических множеств с эллипсоидальными сечениями. Естественным развитием предложенного подхода к изучению множеств будет выявление достаточных условий слабой инвариантности относительно линейной (а затем и нелинейной) конфликтно управляемой системы для цилиндрических множеств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи динамики. I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 5. С. 3–12.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** О структуре дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, № 3. С. 523–526.
4. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Аппроксимация в дифференциальных играх // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 2. С. 197–204.
5. **Красовский Н.Н.** К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
6. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2003. 336 с.

7. **Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Аппроксимационные операторы и конечно-разностные схемы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби // Изв. РАН Техническая кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.
8. **Guseinov H.G., Subbotin A.I., Ushakov V.N.** Derivatives for multivalued mappings with applications to game–theoretical problems of control // Problem Control Inform. Theory. 1985. Vol 14, no. 6. P. 405–419.
9. **Roxin E.** A uniqueness theorem for differential inclusions // Diff. Equ. 1965. Vol. 1, no. 2. P. 115–150.
10. **Aubin J.-P., Cellina A.** Differential inclusions. Set valued maps and viability theory. Berlin, 1984. 342 p.
11. **Нгуен Чан.** Инвариантные и устойчивые семейства множеств относительно дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1357–1366.
12. **Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.** Дифференциальные включения с фазовыми ограничениями. Метод возмущений // Тр. МИАН: Оптимальное управление и дифференц. уравнения. 1995. Т. 211. С. 304–315.
13. **Frankowska H., Plaskacz S., Rzezuchowski T**. Théorèmes de viabilité mesurables et l'équation d'Hamilton–Jacobi–Bellman // C. r. Acad. sei. Paris. Ser. 1. 1992. Vol. 315. P. 131–134.
14. **Kurzhanski A., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Basel: Birkhäuser, 1997. 321 p.
15. **Черноусько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем: Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 320 с.
16. **Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.** Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014. 560 с.
17. **Ушаков В.Н.** К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
18. **Ушаков В.Н., Латушкин Я.А.** Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления// Тр. Ин-та математики и механики. 2006. Т. 12, №2. С. 178–194.
19. **Ушаков В.Н., Успенский А.А.** К свойству стабильности в дифференциальных играх // Докл. АН. 2012. Vol. 443, № 5. С. 549–554.
20. **Стрекаловский А.С.** Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003. 356 с.
21. **Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

Успенский Александр Александрович
канд. физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: uspen@imm.uran.ru

Поступила 14.11.2016

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1987. 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Krasovskii N.N. Game problems of dynamics. I. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Tekhn. Kibernet.*, 1969, no. 5, pp. 3–12 (in Russian).
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. On structure of differential games *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1970, vol. 190, no. 3, pp. 523–526 (in Russian).
4. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Approximation in a differential game. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1973, vol. 37, iss. 2, pp. 197–204 (in Russian).
5. Krasovskii N.N. On a problem of unification of differential games. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 1976, vol. 226, no. 6, pp. 1260–1263 (in Russian).
6. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order partial differential equations: The dynamical optimization perspective.* Boston, Birkhäuser, 1995, Ser. System & Control: Foundations & Applications, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 . Translated under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka. Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii*, Moscow, Izhevsk, Institut Komp'yuternykh Issledovanii Publ., 2003, 336 p.
7. Taras'ev A.M., Uspenskii A.A., and Ushakov V.N. Approximation schemas and finite-difference operators for constructing generalized solutions of Hamilton–Jacobi equations. *J. Comput. Systems Sci. Internat.* 1995, vol. 33, no. 6, pp. 127–139.

8. Guseinov H.G., Subbotin A.I., and Ushakov V.N. Derivatives for multivalued mappings with applications to game–theoretical problems of control. *Problems Control Inform. Theory*, 1985, vol. 14, no. 3, pp. 155–167.
9. Roxin E. A uniqueness theorem for differential inclusions. *J. Differential Equations*, 1965, vol. 1, no. 2, pp. 115–150.
10. Aubin J.-P., Cellina A. *Differential inclusions. Set valued maps and viability theory.* Berlin, 1984, 342 p.
11. T. Nguyẽn. Invariant and stable families of sets with respect to differential inclusions. *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 8, pp. 1357–1366 (in Russian).
12. Kurzhanskii A.B., Filippova T.F. Differential inclusions with phase constraints. The theory of perturbations. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1995, vol. 211, pp. 275–284.
13. Frankowska H., Plaskacz S., Rzezuchowski T. Théorèmes de viabilité mesurables et l'équation d'Hamilton–Jacobi–Bellman. *C. r. Acad. sei. Paris., Ser. 1*, 1992, vol. 315, pp. 131–134.
14. Kurzhanski A., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control.* Basel: Birkhäuser, 1997, Ser. Systems & Control: Foundations & Applications, 321 p.
15. Chernous'ko F.L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem* [Estimation of phase state of dynamic systems]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 320 p.
16. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. *Upravlenie lineinymi sistemami pri vneshnikh vozmushcheniyakh: Tekhnika lineinykh matrichnykh neravenstv*[Control of linear systems subjected to exogenous disturbances: the linear matrix inequality technique]. Moscow: LENAND Publ., 2014, 560 p.
17. Ushakov V.N. On the problem of stable bridges construction in the differential game of pursuit-evasion. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekh. Kibern.*, 1980, no. 4, pp. 29–36 (in Russian).
18. Ushakov V.N., Latushkin Ya.A. The stability defect of sets in game control problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2006, vol. 255, suppl. 2, pp. S198–S215. doi: 10.1134/S0081543806060162 .
19. Ushakov V.N., Uspenskii A.A. On the stability property in positional differential games. *Dokl. Math.*, 2012, vol. 85, no. 2. pp. 268–273. doi: 10.1134/S1064562412020329 .
20. Strekalovskii A.S. Элементы невыпуклой оптимизации. *Elementy nevypukloi optimizatsii* [Elements of non-convex optimization]. Novosibirsk: Nauka Publ., 2003, 356 p.
21. Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nedifferentsiruemaya optimizatsiya* [Nondifferentiable optimization]. Moscow: Nauka Publ., 1981, 384 p.

A. A. Uspenskii. Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: uspen@imm.uran.ru