ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ПОПЕРЕЧНИКИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СВЕРТОК В L_2

К. Тухлиев

В работе найдены точные верхние грани наилучших приближений тригонометрическими полиномами некоторых классов периодических функций, представимых в виде свертки, структурные характеристики которых определены различными модификациями модулей непрерывности m-го порядка в метрике L_2. Найдены точные значения n-поперечников классов сверток, задаваемых указанными гладкостными характеристиками.

Ключевые слова: наилучшие приближения, периодическая функция, тригонометрический полином, модуль непрерывности m-го порядка, n-поперечники.

K. Tukhliev. Best approximations and widths of some classes of convolutions in L_2.

We find tight upper bounds for the best approximations by trigonometric polynomials of certain classes of periodic functions representable as convolutions with structural characteristics defined by various modifications of m-th order moduli of continuity in the metric of L_2. We also find exact values for the n-widths of convolution classes given by such smoothness characteristics.

Keywords: best approximation, periodic function, trigonometric polynomial, modulus of continuity of mth order, n-widths.

MSC: 42A10, 41A17, 41A44

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-284-294

Введение и постановка задач

В последнее время при решении некоторых экстремальных задач теории аппроксимации функций часто используют различные модификации классического модуля непрерывности, в которых обычный оператор сдвига $T_h(f,x) := f(x+h),\ h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, заменяется каким-нибудь сглаживающим оператором. Так например, в случае аппроксимации периодических функций вместо оператора сдвига $T_h f$ В. А. Абиловым и Ф. В. Абиловой [1], С. Б. Вакарчуком [3], М. Ш. Шабозовым и Г. А. Юсуповым [2] был использован оператор (функция) Стеклова

$$S_h(f,x) = \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} f(x+t)dt, \quad h > 0. \tag{0.1}$$

Данная работа продолжает указанную тематику и посвящена дальнейшему применению характеристик гладкости, основанных на применении оператора S_h.

Приведем нужные нам в дальнейшем обозначения. Пусть $L_2 \equiv L_2[0,2\pi]$ — пространство вещественнозначных измеримых по Лебегу 2π-периодических функций, у которых норма

$$\|f\| \overset{def}{=} \|f\|_{L_2} := \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Исходя из определения функции (0.1), полагаем $S_{h,i}(f) \overset{def}{=} S_h\big(S_{h,i-1}(f)\big)$, где $i \in \mathbb{N}$ и $S_{h,0}(f) \equiv f$. Обозначив через $\mathbb{I}$ единичный оператор в L_2, определим конечные разности первого и высших порядков [1]:

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f,x) \overset{def}{=} S_h(f,x) - f(x) = (S_h - \mathbb{I})(f,x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^m(f,x) \overset{def}{=} \widetilde{\Delta}_h^1\big(\widetilde{\Delta}_h^{m-1}(f,\cdot),x\big) = (S_h-\mathbb{I})^m(f,x) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}S_{h,i}(f,x), \quad m=2,3,4,\ldots.$$

Используя указанные обозначения, введем следующую характеристику гладкости функции $f\in L_2$:

$$\Omega_m(f,t) \overset{def}{=} \sup\big\{\big\|\widetilde{\Delta}_h^m(f)\big\|:\ 0<h\le t\big\}, \tag{0.2}$$

которую назовем *обобщенным модулем непрерывности m-го порядка.*

Через $\Im_{2n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$. Известно, что для произвольной функции $f\in L_2$, которая имеет разложение в ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}\big(a_j(f)\cos jx+b_j(f)\sin jx\big), \tag{0.3}$$

величина ее наилучшего приближения элементами подпространства $\Im_{2n-1}$ определяется как

$$E_{n-1}(f)_2 := \inf\big\{\|f-T_{n-1}\|\colon T_{n-1}\in\Im_{2n-1}\big\} = \|f-s_{n-1}(f)\| = \Big(\sum_{j=n}^{\infty}\rho_j^2(f)\Big)^{1/2},$$

где $s_{n-1}(f)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f, $\rho_j^2(f)\overset{def}{=}a_j^2(f)+b_j^2(f)$, $j\in\mathbb{N}$; $a_j(f),b_j(f)$ — косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции f.

Символом $L_2^{(r)}$ ($r\in\mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)}\equiv L_2$) обозначим множество функций $f\in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2. Всюду далее полагаем

$$\operatorname{sinc}t := \Big\{\ \frac{\sin t}{t},\quad\text{если}\quad t\ne0;\quad 1,\quad\text{если}\quad t=0\Big\}.$$

Нетрудно показать, что для произвольной функции $f\in L_2$ имеет место равенство

$$\big\|\widetilde{\Delta}_h^m(f)\big\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\operatorname{sinc}kh)^{2m}\,\rho_j^2(f),$$

с учетом которого для модуля непрерывности (0.2) запишем равенство

$$\Omega_m(f,t)=\sup\Big\{\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(1-\operatorname{sinc}kh)^{2m}\rho_j^2(f)\Big)^{1/2}:\ 0<h\le t\Big\}. \tag{0.4}$$

Всюду далее условимся под *весовой функцией* на отрезке $[0,h]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию q, неэквивалентную нулю на этом же отрезке. Для компактного изложения последующих результатов вводим в рассмотрение экстремальную характеристику

$$\chi_{n,r,p}(\Omega_m,q,h)=\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\ne\text{const}}}\frac{E_{n-1}(f)}{\Big(\int_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)q(t)dt\Big)^{1/p}}, \tag{0.5}$$

где $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ p\in\mathbb{R}_+,\ 0<h\le\pi/n,\ q\ge0$ — весовая функция на отрезке $[0,h]$. Отметим, что величина (0.5) была исследована в работах [2; 3] — и при различных значениях параметров m,p и конкретных весовых функциях q — в трудах многих других математиков (см. в [3] подробную литературу с комментариями).

В работе [3] доказано следующее общее утверждение, которое является обобщением результата А. А. Лигуна [4] на указанной выше характеристике гладкости (0.2). В частности, было показано, что если $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ 0<p\le 2,\ 0<h\le\pi/n,\ q\ge 0$ — весовая функция на отрезке $[0,h]$, то

$$\{\mathcal{A}_{n,p,r}(\Omega_m;q;h)\}^{-1}\le\chi_{m,n,r,p}(\Omega_m;q,h)\le\big\{\inf_{n\le k<\infty}\mathcal{A}_{k,p,r}(\Omega_m;q;h)\big\}^{-1},\tag{0.6}$$

где

$$\mathcal{A}_{k,p,r}(\Omega_m;q;h):=\left(k^{rp}\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nh)^{mp}\,q(t)dt\right)^{1/p}.$$

Вопрос о точности двухстороннего неравенства (0.6) приводит к необходимости выяснения условий на весовую функцию q, обеспечивающих выполнение равенства

$$\inf_{n\le k<\infty}\mathcal{A}_{k,p,r}(\Omega_m;q;h)=\mathcal{A}_{n,p,r}(\Omega_m;q;h).\tag{0.7}$$

Естественно, ответ на указанный вопрос должен формулироваться в терминах дифференциальных свойств весовой функции q. В работе [3] доказано, что если весовая функция q является непрерывной и дифференцируемой на отрезке $[0,h]$ и удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$(rp-1)q(t)-tq'(t)\ge 0,\quad t\in[0,h],\quad r\in\mathbb{N},\quad p\in[1/r,2],\tag{0.8}$$

то при любых $m,n\in\mathbb{N}$ и $0<h\le 3\pi/(4n)$ имеет место равенство (0.7) и при этом

$$\chi_{m,n,r,p}(\Omega_m;q,h)=\big(\mathcal{A}_{n,p,r}(\Omega_m;q;h)\big)^{-1}.\tag{0.9}$$

В данной работе мы продолжим исследование в этом направлении и рассмотрим сформулированную выше задачу в более общей ситуации для классов сверток, структурные характеристики функций которых характеризуются модулем непрерывности (0.2), причем для доказательства равенства (0.9) не требуется выполнения дифференциального неравенства (0.8), а необходимо лишь накладывать некоторое ограничение относительно весовой функции q .

1. Приближение некоторых классов сверток

Будем рассматривать функции $f\in L_2$, представимые в виде свертки

$$f(x)\overset{def}{=}(\mathcal{K}*\varphi)(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{K}(x-t)\varphi(t)dt,\tag{1.1}$$

где $\mathcal{K}\in L_2$ — некоторая фиксированная функция (ядро); φ будет пробегать некоторое подмножество из L_2. Пусть

$$\mathcal{K}(t)\sim\sum_{l=-\infty}^{+\infty}a_le^{ilt},\quad a_l=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{K}(t)e^{-ilt}dt,\quad l\in\mathbb{Z},\tag{1.2}$$

$$\varphi(t)\sim\sum_{l=-\infty}^{+\infty}b_le^{ilt},\quad b_l=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)e^{-ilt}dt,\quad l\in\mathbb{Z},\tag{1.3}$$

— ряды Фурье этих функций. Тогда, как хорошо известно, ряд Фурье свертки (1.1) имеет вид

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kb_ke^{ikx}.\tag{1.4}$$

Очевидно, что

$$E_{n-1}(f) = \|f - s_{n-1}(f)\| = \Big(\sum_{|k|\ge n} |a_k b_k|^2\Big)^{1/2}, \tag{1.5}$$

где

$$s_{n-1}(f,x) = \sum_{|k|\le n-1} a_k b_k e^{ikx}$$

— частная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье (1.4) функции $f \in L_2$.

В данной работе для изучения аппроксимативных свойств свертки (1.1) вводится экстремальная характеристика

$$\mathcal{M}_{n,p}(\Omega_m; q, h) = \sup_{\substack{\varphi\in L_2\\ \varphi\ne\mathrm{const}}} \frac{|a_n|^{-1} E_{n-1}(\mathcal{K}*\varphi)}{\Big(\int_0^h \Omega_m^p(\varphi;t) q(t)dt\Big)^{1/p}} = \sup_{\substack{\varphi\in L_2\\ \varphi\ne\mathrm{const}}} \frac{|a_n|^{-1} E_{n-1}(f)}{\Big(\int_0^h \Omega_m^p(\varphi;t) q(t)dt\Big)^{1/p}}, \tag{1.6}$$

где $m, n \in \mathbb{N},\ 0 < p, 0 < h \le \pi/n,\ a_n = a_n(\mathcal{K})$ — n-й коэффициент Фурье функции $\mathcal{K}$ (см. (1.2)), q — весовая функция на $[0,h]$. Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть $0 < p \le 2$, коэффициенты Фурье $a_k := a_k(\mathcal{K})$ функции $\mathcal{K} \in L_2$ удовлетворяют условиям*

$$|a_0| \ne 0, \quad |a_k| k^{1/p} \ge |a_{k+1}|(k+1)^{1/p}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Если q — невозрастающая на $[0,h]$ весовая функция, то величина (1.6) при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $0 < h \le 3\pi/(4n)$ удовлетворяет равенству

$$\mathcal{M}_{n,p}(\Omega_m; q, h) = \Big(\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} kt)^{mp} q(t)dt\Big)^{-1/p}. \tag{1.8}$$

Существует свертка $f_0 := (\mathcal{K} * \varphi_0)$, $\varphi_0 \in L_2$, $\varphi_0 \ne \mathrm{const}$, реализующая верхнюю грань в (1.6), равная правой части (1.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь равенством (0.4) для произвольной функции $\varphi \in L_2$ с рядом Фурье (1.3), запишем неравенства

$$\Omega_m(\varphi;t) \ge \widetilde{\Delta}_m(\varphi;t) \ge \Big(\sum_{|k|\ge n} |b_k|^2 (1 - \operatorname{sinc} kt)^{2m}\Big)^{1/2}. \tag{1.9}$$

Воспользуемся упрощенным вариантом неравенства Минковского (см., например, [5, с. 104])

$$\Big[\int_0^h \Big(\sum_{|k|\ge n} |f_k(t)|^2\Big)^{p/2} dt\Big]^{1/p} \ge \Big[\sum_{|k|\ge n}\Big(\int_0^h |f_k(t)|^p dt\Big)^{2/p}\Big]^{1/2}, \quad 0 < p \le 2. \tag{1.10}$$

Заменяя в обеих частях неравенства (1.10) f_k на $f_k q^{1/p}$, получаем

$$\Big[\int_0^h \Big(\sum_{|k|\ge n} |f_k(t)|^2\Big)^{p/2} q(t)dt\Big]^{1/p} \ge \Big[\sum_{|k|\ge n}\Big(\int_0^h |f_k(t)|^p q(t)dt\Big)^{2/p}\Big]^{1/2}. \tag{1.11}$$

Возведем первую и последнюю части неравенств (1.9) в степень p, умножим их на весовую функцию q, проинтегрируем по t в пределах от 0 до h, а затем применим соотношение (1.11). В результате придем к неравенствам

$$\Big(\int_0^h \Omega_m^p(\varphi;t) q(t)dt\Big)^{1/p} \ge \Big[\int_0^h \Big(\sum_{|k|\ge n} |b_k|^2 (1 - \operatorname{sinc} kt)^{2m} (q(t))^{2/p}\Big)^{p/2}\Big]^{1/p}$$

$$\geq \Bigg[\sum_{|k|\geq n}\bigg(|b_k|^p\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}kt)^{mp}\,q(t)dt\bigg)^{2/p}\Bigg]^{1/2}$$

$$=\Bigg[\sum_{|k|\geq n}|b_k|^2\bigg(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}kt)^{mp}\,q(t)dt\bigg)^{2/p}\Bigg]^{1/2}=:A_{m,n,p}. \tag{1.12}$$

По условию теоремы функция q является неотрицательной и невозрастающей на отрезке $[0,h]$, поэтому, выполнив подстановку $t=\dfrac{n}{k}\tau$ при любом $k\geq n$ $(k,n\in\mathbb{N})$, будем иметь

$$\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}kt)^{mp}\,q(t)dt=\frac{n}{k}\int\limits_0^{kh/n}(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q\left(\frac{n}{k}t\right)dt$$

$$\geq\frac{n}{k}\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q\left(\frac{n}{k}t\right)dt\geq\frac{n}{k}\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q(t)dt. \tag{1.13}$$

Условие (1.7) влечет неравенство $|a_n|\,n^{1/p}\geq|a_k|\,k^{1/p}$ при $k\geq n$, которое эквивалентно следующему неравенству:

$$\frac{n}{k}\geq\Big(\frac{|a_k|}{|a_n|}\Big)^p,\quad k\geq n. \tag{1.14}$$

Учитывая (1.14), из неравенства (1.13) получаем

$$\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}kt)^{mp}\,q(t)dt\geq\Big|\frac{a_k}{a_n}\Big|^p\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q(t)dt.$$

Пользуясь последним неравенством, продолжим (1.12):

$$A_{m,n,p}\geq\frac{1}{|a_n|}\Bigg[\sum_{|k|\geq n}|a_kb_k|^2\bigg(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q(t)dt\bigg)^{2/p}\Bigg]^{1/2}$$

$$=\frac{1}{|a_n|}\bigg(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q(t)dt\bigg)^{1/p}\bigg(\sum_{|k|\geq n}|a_kb_k|^2\bigg)^{1/2}$$

$$=\frac{1}{|a_n|}\bigg(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q(t)dt\bigg)^{1/p}E_{n-1}(f). \tag{1.15}$$

Из неравенства (1.15) для произвольной функции $\varphi\in L_2$, $\varphi\neq\mathrm{const}$ получаем

$$\frac{|a_n|^{-1}\,E_{n-1}(\mathcal{K}*\varphi)}{\Big(\int_0^h\Omega_m^p(\varphi;t)q(t)dt\Big)^{1/p}}\leq\bigg(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q(t)dt\bigg)^{-1/p}. \tag{1.16}$$

Следовательно, для характеристики (1.8) имеет место оценка сверху

$$\mathcal{M}_{n,p}(\Omega_m;q,h)\leq\bigg(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q(t)dt\bigg)^{-1/p}. \tag{1.17}$$

Для получения оценки снизу указанной величины достаточно рассмотреть в L_2 функцию (свертку)

$$f_0(x) = (\mathcal{K} * \varphi_0)(x) = a_n \cos nx, \quad \varphi_0(t) = \cos nt, \tag{1.18}$$

затем воспользоваться определением величины (1.6), а также легко проверяемыми соотношениями

$$E_{n-1}(f_0) = |a_n|, \;\; \Omega_m(\varphi_0; t) = (1 - \operatorname{sinc} nt)^m, \quad 0 < nt \le 3\pi/4. \tag{1.19}$$

Таким образом, для сверток (1.18) в силу (1.19) получаем оценку снизу

$$\mathcal{M}_{n,p}(\Omega_m; q, h) \ge \frac{|a_n|^{-1} E_{n-1}(\mathcal{K} * \varphi_0)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\varphi_0; t) q(t) dt\right)^{1/p}}$$

$$= \left(\int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}, \quad 0 < nh \le 3\pi/4. \tag{1.20}$$

Требуемое равенство (1.8) вытекает из сопоставления оценок сверху (1.17) и снизу (1.20), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Заметим, что для произвольного $a > 0$ функция $q_*(t) := te^{-at}$ является весовой и убывающей на отрезке $[0, h]$. В силу (1.8) приходим к следующему утверждению.

Следствие 1. *Пусть* $0 < p \le 2$, $q_*(t) := te^{-at}$, *где* $a > 0$, $0 \le t \le h$ $(0 < h \le 3\pi/(4n))$, *коэффициенты Фурье функции* $\mathcal{K} \in L_2$ *удовлетворяют условиям* (1.7) *теоремы* 1. *Тогда при любых* $m, n \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$\mathcal{M}_{n,p}(\Omega_m; q_*, h) = \left(\int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} te^{-at} dt\right)^{-1/p}.$$

2. Значение n-поперечников некоторых классов функций

Приводим необходимые нам в дальнейшем определения. Пусть S — единичный шар в пространстве L_2; $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2; $\Lambda_n \subset L_2$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ — подпространство коразмерности n; $\mathscr{L}\colon L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор; $\mathscr{L}^{\perp}\colon L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0;\; \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\| \colon f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_2\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - g\| \colon g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathcal{L}f\| \colon f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$p_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f - \mathcal{L}^{\perp} f\| \colon f \in \mathfrak{M}\Big\} \colon \mathcal{L}^{\perp} L_2 \subset \Lambda_n\Big\} \colon \Lambda_n \subset L_2\Big\}$$

называют соответственно *бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным, проекционным n-поперечниками.* Известно [5; 6], что перечисленные выше n-поперечники монотонны по n и в гильбертовом пространстве L_2 связаны соотношениями:

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) \le d^n(\mathfrak{M}; L_2) \le d_n(\mathfrak{M}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_2) = p_n(\mathfrak{M}; L_2). \tag{2.1}$$

Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $0<h\le 3\pi/(4n)$, $0<p\le 2$ и q — неотрицательная непрерывная неубывающая на отрезке $[0,h]$ функция. В пространстве L_2 определим класс функций

$$W\overset{def}{=}W(m,n,p,q,h)=W(m,n,p,q,h;\mathcal{K})=\left\{\mathcal{K}*\varphi\colon\ \int\limits_0^h\Omega_m^p(\varphi;t)q(t)dt\le 1\right\}.$$

Пусть $\Phi(t)$ — произвольная возрастающая на $[0,\infty)$ функция такая, что $\Phi(0)=0$. При тех же ограничениях на параметры m,n,h,p, что и выше, и в случае, когда весовая функция $q\equiv 1$, введем в рассмотрение класс функций

$$W(\Phi;\mathcal{K})\overset{def}{=}W(m,n,p,h;\Phi;\mathcal{K})=\left\{\mathcal{K}*\varphi\colon\ \frac{1}{h}\int\limits_0^h\Omega_m^p(\varphi;t)dt\le\Phi^p(h)\right\}.\tag{2.2}$$

Полагая в точке $t=0$ значение функции $\operatorname{sinc}t$ равным 1, следуя работе [3], через t_* обозначим значение аргумента $\operatorname{sinc}t$, при котором она достигает наименьшего значения на множестве $\mathbb{R}_+=(0,+\infty)$. Заметим, что число t_* является наименьшим положительным корнем уравнения $t=\operatorname{tg}t$. Легко вычислить, что $4,49<t_*<4,51$. Далее вводим обозначение

$$\bigl(1-\operatorname{sinc}t\bigr)_*:=\Bigl\{\,1-\operatorname{sinc}t,\ \ \text{если } 0<t\le t_*;\ \ 1-\operatorname{sinc}t_*,\ \text{если } t_*\le t<\infty\Bigr\}.$$

Теорема 2. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $0<p\le 2$, $0<h\le t_*$, q — непрерывная невозрастающая весовая функция на отрезке $[0,h]$, коэффициенты Фурье функции $\mathcal{K}\in L_2$ удовлетворяют условиям* (1.7) *теоремы* 1. *Тогда справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}(W;L_2)=\lambda_{2n-1}(W;L_2)=E_{n-1}(W)_{L_2}=|a_n|\left(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q(t)dt\right)^{-1/p},\tag{2.3}$$

где $E_{n-1}(W)_2=\sup\{E_{n-1}(f)_2\colon f\in W\}$; $\lambda_k(\cdot)$ — любой из k-поперечников $b_k(\cdot),d^k(\cdot),d_k(\cdot)$, $\lambda_k(\cdot)$, $p_k(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (1.16) для произвольной функции $\varphi\in L_2$, $\varphi\ne$ const имеем

$$E_{n-1}(f)\le|a_n|\left(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{pm}\,q(t)dt\right)^{-1/p}\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\varphi,t)q(t)dt\right)^{1/p},$$

откуда, учитывая соотношение (2.1), получаем оценку сверху для всех перечисленных выше n-поперечников класса W:

$$\lambda_{2n}(W;L_2)\le\lambda_{2n-1}(W;L_2)\le E_n(W)_{L_2}\le|a_n|\left(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{pm}\,q(t)dt\right)^{-1/p}.\tag{2.4}$$

С целью получения оценки снизу в подпространстве тригонометрических полиномов $\mathcal{T}_{2n+1}$ порядка n рассмотрим шар

$$S_{2n+1}\overset{def}{=}\left\{T_n\in\mathcal{T}_{2n+1}\colon\|T_n\|\le|a_n|\left(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{pm}\,q(t)dt\right)^{-1/p}\right\}$$

и докажем его принадлежность классу W.

Пусть $T_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}\in S_{2n+1}$. Тогда $\|T_n\|^2=\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2$. Так как согласно условиям теоремы $a_k\neq 0$ при всех k, то функция

$$\varphi(t)=\sum_{k=-n}^{n}\frac{c_k}{a_k}e^{ikt}$$

является решением уравнения свертки

$$T_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{K}(x-t)\varphi(t)dt. \tag{2.5}$$

Простое вычисление приводит к следующему неравенству:

$$\Omega_m(\varphi;t)\leq(1-\operatorname{sinc}nt)_*^m\Big(\sum_{k=-n}^{n}\left|\frac{c_k}{a_k}\right|^2\Big)^{1/2}$$

$$\leq(1-\operatorname{sinc}nt)_*^m\,|a_n|^{-1}\Big(\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2\Big)^{1/2}=(1-\operatorname{sinc}nt)_*^m\,|a_n|^{-1}\|T_n\|. \tag{2.6}$$

Для доказательства $S_{2n+1}\subset W$ достаточно показать, что $\displaystyle\int_0^h\Omega_m^p(\varphi;t)q(t)dt\leq 1$.

Возведем в степень p $(0<p\leq 2)$ первую и последнюю части неравенств (2.6), проинтегрируем полученное неравенство по t в пределах от 0 до h и, приняв во внимание неравенства $0<h\leq t_*$, придем к соотношениям

$$\int\limits_0^h\Omega_m^p(\varphi;t)q(t)dt\leq|a_n|^{-p}\|T_n\|^p\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)_*^{pm}\,q(t)dt$$

$$=\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{pm}\,q(t)dt\left(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{pm}\,q(t)dt\right)^{-1}=1.$$

Таким образом, вложение $S_{2n+1}\subset W$ доказано. Отсюда с учетом соотношения (2.1) и определения бернштейновского поперечника получаем оценку снизу всех n-поперечников:

$$\lambda_{2n}(W;L_2)\geq b_{2n}(W;L_2)\geq b_{2n}(S_{2n+1},L_2)\geq|a_n|\left(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{pm}\,q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{2.7}$$

Требуемое равенство (2.3) получаем из сопоставления неравенств (2.4) и (2.7), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Рассмотрим одно конкретное применение теоремы 1.

Пусть $r\in\mathbb{R}_+$ $(r>1)$ и $\alpha\in\mathbb{R}$ – произвольное действительное число. Положим

$$\mathscr{B}_{r,\alpha}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\Big(kx-\frac{\alpha\pi}{2}\Big). \tag{2.8}$$

При $r=\alpha$, $r,\alpha\in\mathbb{N}$ функция (2.8) есть многочлен Бернулли. Обозначим через $W_\alpha^{(r)}L_p$, $r\in\mathbb{R}_+$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $1\leq p\leq\infty$ класс непрерывных периодических функций f, допускающих представление (см. [7; 8, с. 51])

$$f(x)=C+\big(\mathscr{B}_{r,\alpha}*\varphi\big)(x), \tag{2.9}$$

где $C \in \mathbb{R}$, $\varphi \in L_p$ $(1 \le p \le \infty)$, $\varphi \perp \mathrm{const}$.

Из представления (2.9), в частности, следует, что если $r = \alpha$, $r, \alpha \in \mathbb{R}_+$, то $\varphi(t) = f^{(r)}(t)$ — производная дробная порядка r в смысле Вейля [7], а $W_r^{(r)} L_2$ $(r \in \mathbb{R}_+)$ есть класс функций $f \in L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{R}_+)$, у которых дробная производная $f^{(r)}$ в смысле Вейля удовлетворяет условию $\|f^{(r)}\| \le 1$.

Положим

$$W^{(r)}(h,q) \overset{def}{=} \left\{ f\colon f \in W_\alpha^{(r)} L_2,\ \int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)};t) q(t) dt \le 1 \right\}.$$

Поскольку коэффициенты ядра $\mathscr{B}_{r,r}$ $(r \in \mathbb{R}_+)$ удовлетворяют соотношениям

$$|a_n| = n^{-r} \quad (n \in \mathbb{N},\, r \in \mathbb{R}_+,\, r > 1), \quad \text{то} \quad |a_j| j^{1/p} \ge |a_{j+1}| (j+1)^{1/p}, \quad j \in \mathbb{N},$$

выполняется для $1/r < p \le 2$ $(r > 1,\, r \in \mathbb{R}_+)$. В силу теоремы 2 мы приходим к следующему утверждению.

Следствие 2. *При любых* $m, n \in \mathbb{N}$, $1/r < p \le 2$ $(r \in \mathbb{R}_+, r > 1)$ *и* $0 < h \le \pi/n$ *справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}(W^{(r)}(h,q); L_2) = \lambda_{2n-1}(W^{(r)}(h,q); L_2)$$
$$= E_n(W^{(r)}(h,q))_{L_2} = n^{-r} \Bigg(\int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{pm}\, q(t) dt \Bigg)^{-1/p}.$$

Теорема 3. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$ *и мажоранта* Φ *при любых значениях* $h \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет ограничению*

$$\left(\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)}\right)^p \ge \frac{\pi}{nh} \frac{\displaystyle\int_0^{nh} (1 - \operatorname{sinc} t)_*^{mp}\, dt}{\displaystyle\int_0^{\pi} (1 - \operatorname{sinc} t)^{mp}\, dt}. \tag{2.10}$$

Коэффициенты Фурье функции (ядро) $\mathcal{K}$ *удовлетворяют условиям* (1.7) *теоремы* 1. *Тогда справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}(W(\Phi;\mathcal{K}); L_2) = \lambda_{2n-1}(W(\Phi;\mathcal{K}); L_2) = E_{n-1}(W(\Phi;\mathcal{K}))_{L_2}$$
$$= |a_n| \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi (1 - \operatorname{sinc} \tau)^{mp}\, d\tau \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{2.11}$$

где $\lambda_k(\cdot)$ — *любой из вышеперечисленных* n*-поперечников. При этом множество мажорант, удовлетворяющих ограничению* (2.10)*, не пусто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношения (1.16) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ запишем оценку сверху величины ее наилучшего полиномиального приближения при $q(t) \equiv 1$:

$$E_{n-1}(f) \le |a_n| \Bigg(\frac{1}{h} \int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp}\, dt \Bigg)^{-1/p} \Bigg(\frac{1}{h} \int\limits_0^h \Omega_m^p(\varphi;t) dt \Bigg)^{1/p}. \tag{2.12}$$

Подставляя в правую часть неравенства (2.12) $h = \pi/n$, имеем

$$E_{n-1}(f) \le |a_n| \Bigg(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp}\, dt \Bigg)^{-1/p} \Bigg(\frac{n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^p(\varphi;t) dt \Bigg)^{1/p}. \tag{2.13}$$

Учитывая определение класса $W(\Phi;\mathcal{K})$ из неравенства (2.13), на основании соотношения (2.1) и формулы (2.2) получаем

$$\lambda_{2n}(W(\Phi;\mathcal{K});L_2)\le\lambda_{2n-1}(W(\Phi;\mathcal{K});L_2)\le\lambda_{2n-1}(W(\Phi;\mathcal{K});L_2)$$
$$\le E_{n-1}(W(\Phi;\mathcal{K}))_{L_2}\le|a_n|\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi(1-\operatorname{sinc}\tau)^{mp}\,d\tau\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (2.14)$$

Приступая точно так же, как и в предыдущей теореме, для получения оценки снизу бернштейновского n-поперечника $b_{2n-1}(W(\Phi;\mathcal{K});L_2)$ в подпространстве $\Im_{2n+1}$ рассмотрим шар

$$S^*_{2n+1}\stackrel{def}{=}\left\{T_n\in\Im_{2n+1}\colon\|T_n\|\le|a_n|\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi(1-\operatorname{sinc}\tau)^{mp}\,d\tau\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

и покажем, что при выполнении ограничения (2.10) выполняется включение $S^*_{2n+1}\subset W(\Phi;\mathcal{K})$. Так как для произвольного полинома $T_n\in S^*_{2n+1}$, представимого в виде свертки (2.5), имеет место неравенство (2.6), то, пользуясь указанным неравенством и ограничением (2.10), для произвольного $h\in\mathbb{R}_+$ получаем

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Omega_m^p(\varphi;t)dt\le|a_n|^p\|T_n\|^p\frac{1}{h}\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)_*^{mp}\,dt$$
$$\le\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi(1-\operatorname{sinc}t)^{mp}\,dt\right)^{-1}\frac{1}{nh}\int\limits_0^{nh}(1-\operatorname{sinc}t)^{mp}\,dt\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\le\Phi(h).$$

Последнее неравенство означает, что $S^*_{2n+1}\subset W(\Phi;\mathcal{K})$, а потому, используя определение бернштейновского n-поперечника, с учетом соотношения (2.1) имеем

$$\lambda_{2n}(W(\Phi;\mathcal{K});L_2)\ge b_{2n}(W(\Phi;\mathcal{K});L_2)\ge b_{2n}(S^*_{2n+1};L_2)$$
$$\ge|a_n|\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi(1-\operatorname{sinc}\tau)^{mp}\,d\tau\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (2.15)$$

Сопоставляя оценки сверху (2.14) и оценку снизу (2.15), получаем требуемые равенства (2.11).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$\Phi_*(t)\stackrel{def}{=}t^{\alpha/p},\quad 0<p\le2,$$

где

$$\alpha\stackrel{def}{=}\pi\left(\int\limits_0^\pi(1-\operatorname{sinc}\tau)^{mp}\,d\tau\right)^{-1}-1,\quad mp<\alpha<2mp,$$

удовлетворяет условию (2.10) [3, с. 509–512], чем и завершаем доказательство теоремы 3.

Из доказанной теоремы в случае $\mathcal{K}\equiv\mathscr{B}_{r,r}$ вытекает

Следствие 3. *В условиях теоремы* 3 *справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}(W(\Phi;\mathscr{B}_{r,r});L_2)=\lambda_{2n-1}(W(\Phi;\mathscr{B}_{r,r});L_2)=E_{n-1}(W(\Phi;\mathscr{B}_{r,r}))_{L_2}$$
$$=\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi(1-\operatorname{sinc}\tau)^{mp}\,d\tau\right)^{-1/p}n^{-r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абилов В.А., Абилова Ф.В.** Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 6. С. 803–811.
2. **Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.** Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 6. С. 1414–1427.
3. **Вакарчук С.Б., Забутная В.И.** Неравенства типа Джексона — Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Мат. заметки. 2012. Т. 92, № 4. С. 497–514.
4. **Лигун А.А.** Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1978. Т. 24, № 6. С. 785–792.
5. **Pinkus A.** n-widths in approximation theory. Berlin: Springer-Verlag, 1985. 291 p.
6. **Тихомиров В.М.** Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976. 325 с.
7. **Стечкин С.Б.** О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1956. Т. 20, № 5. С. 643–648.
8. **Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г.** Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982. 252 с.

Тухлиев Камаридин
Поступила 08.09.2016
канд. физ.-мат. наук, доцент
Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова
e-mail: kamaridin.t54@mail.ru

REFERENCES

1. Abilov V.A. Abilova F.V. Problems in the approximation of 2π-periodic functions by Fourier sums in the space $L_2(2\pi)$. *Math. Notes*, 2004, vol. 76, no. 6, pp. 749–757.
2. Shabozov M. Sh., Yusupov G.A. Exact constants in Jackson-type inequalities and exact values of the widths of some classes of functions in L_2. *Sib. Math. J.*, 2011, vol. 52, no. 6, pp. 1124–1136.
3. Vakarchuk S.B., Zabutnaya V.I. Jackson-Stechkin type inequalities for special moduli of continuity and widths of function classes in the space L_2. *Math. Notes.*, 2012, vol. 92, no. 4, pp. 458–472.
4. Ligun A.A. Some inequalities between best approximations and moduli of continuity in an L_2 space. *Math. Notes.*, 1978, vol. 24, no. 6, pp. 917–921.
5. Pinkus A. *n-widths in approximation theory.* Berlin: Springer-Verlag, 1985, 291 p.
6. Tikhomirov V.M. *Some problems in approximation theory.* M.: MGU Pupl., 1976, 325 p. (in Russian).
7. Stechkin S.B. On best approximation of certain classes of periodic functions by trigonometric polynomials. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1956, vol. 20, no. 5, pp. 643–648 (in Russian).
8. Korneichuk N.P., Ligun A.A., Doronin V.G. *Approksimaciya s ogranicheniyami* (Approximation with constraints). Kiev: Naukova Dumka, 1982, 252 p. (in Russian).

K. Tukhliev., Cand. Sci. (Phys.-Math.), Khudjand state university named after acad. B. Gafurov, Khudjand, 735700 Tajikistan, e-mail: kamaridin.t54@mail.ru .