ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.518.45

ДОБАВЛЕНИЕ К РАБОТЕ В. П. ЗАСТАВНОГО “ОЦЕНКИ СУММ ИЗ МОДУЛЕЙ БЛОКОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ”[1]

С. А. Теляковский

Результаты об интегрируемости и интегрируемости со степенным весом сумм модулей блоков членов ряда $\sum 1/k \sin kx$ распространены на класс рядов $\sum b_k \sin kx$ с коэффициентами b_k более общего вида.

Ключевые слова: суммы модулей блоков, степенной вес.

S. A. Telyakovskii. An addition to V. P. Zastavnyi’s paper “Estimates for sums of moduli of blocks in trigonometric Fourier series.”

Results on the integrability and integrability with power weight for sums of moduli of blocks from the series $\sum 1/k \sin kx$ are extended to the class of series $\sum b_k \sin kx$ with coefficients b_k of a more general form.

Keywords: sums of moduli of blocks, power weight.

Пусть $\{n_j\}$ и $\{v_j\}$ — последовательности строго возрастающих натуральных чисел, причем $n_j < v_{j+1}$ при всех j, и A_j — множество натуральных k, удовлетворяющих условию $n_j \le k < v_{j+1}$.

В работе рассматриваются вопросы об интегрируемости функций

$$U_A(x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x), \qquad u_j(x) = \Big| \sum_{k \in A_j} b_k \sin kx \Big|, \tag{1}$$

где числа b_k при $k \to \infty$ стремятся к нулю и для них при всех m и некоторой постоянной B выполняется оценка

$$\sum_{k=m}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \leqslant \frac{B}{m}. \tag{2}$$

Изучение функций вида (1), когда b_k являются коэффициентами Фурье функций ограниченной вариации, было начато в [1]. Задачу об ограниченности функций $U_A(x)$ при условии (2) исследовал Л. Лейндлер [2]. В этих работах при всех j выполнялось равенство $v_j = n_j$.

В [3, с. 253] приведены примеры, показывающие, что классы рядов Фурье функций ограниченной вариации и рядов, для коэффициентов которых справедливо условие (2), несравнимы.

Обзор результатов о свойствах сумм модулей блоков членов тригонометрических рядов дан в [4].

Известно, что если при $p > 1$ сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} m_j^{1-1/p}, \tag{3}$$

где $m_j = \min(n_j, v_{j+1} - n_j + 1)$ и b_k являются коэффициентами Фурье функции ограниченной вариации, то $U_A(x) \in L_p$. При $p = 2$ это доказано в [5, теорема 2], для всех $p > 1$ — в работе В. П. Заставного [6, теорема 5].

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

В настоящей работе этот результат распространен на случай, когда для чисел b_k имеет место оценка (2). О подобном распространении говорилось в [4, с. 214]. Рассмотрена также интегрируемость со степенным весом функций $U_A(x)$.

Будет использоваться следующее утверждение.

Лемма. *Если числа b_k стремятся к нулю при $k \to \infty$ и для них выполняется оценка* (2), *то при всех натуральных r и s, $r \leqslant s$, справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{k=r}^{s} b_k \sin kx\right| \leqslant \frac{5B}{r} \min\left(\frac{1}{x}, s-r+1\right), \qquad x \in (0,\pi]. \tag{4}$$

Оценка (4) устанавливается с помощью рассуждений, подобных проводившимся при доказательстве теоремы в [3].

В силу стремления чисел b_k к нулю из (2) следует оценка

$$|b_m| \leqslant \frac{B}{m}. \tag{5}$$

Поэтому

$$\left|\sum_{k=r}^{s} b_k \sin kx\right| \leqslant \sum_{k=r}^{s} |b_k| \leqslant \frac{B}{r}(s-r+1).$$

Далее, согласно (2) и (5) имеем

$$\left|2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=r}^{s} b_k \sin kx\right| = \left|\sum_{k=r}^{s} b_k \cos\Bigl(k-\frac{1}{2}\Bigr)x - \sum_{k=r}^{s} b_k \cos\Bigl(k+\frac{1}{2}\Bigr)x\right|$$

$$= \left|b_r \cos\Bigl(r-\frac{1}{2}\Bigr)x - \sum_{k=r}^{s-1}(b_k - b_{k+1})\cos\Bigl(k+\frac{1}{2}\Bigr)x - b_s\cos\Bigl(s+\frac{1}{2}\Bigr)x\right|$$

$$\leqslant |b_r| + \sum_{k=r}^{s-1}|b_k - b_{k+1}| + |b_s| \leqslant \frac{3B}{r}.$$

Значит,

$$\left|\sum_{k=r}^{s} b_k \sin kx\right| \leqslant \frac{3B}{2r\sin(x/2)} \leqslant \frac{3\pi}{2}\,\frac{B}{rx}.$$

Лемма доказана. □

С помощью оценки (4) результаты об интегрируемости функций (1), относящиеся к рядам Фурье функций ограниченной вариации, доказательство которых основывалось на оценке (4) при $b_k = 1/k$, переносятся на случай, когда для b_k выполнено условие (2).

Так получаем приводимые ниже теоремы, первая из которых относится к упоминавшимся достаточным условиям принадлежности функций вида $U_A(x)$ к L_p при $p > 1$.

Теорема 1. *Если для стремящихся к нулю чисел b_k справедлива оценка* (2), *$p > 1$ и сходится ряд* (3), *то $U_A(x) \in L_p$.*

При $p = 1$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для того чтобы для всех стремящихся к нулю чисел b_k, при которых справедлива оценка* (2), *функции $U_A(x)$ принадлежали L, необходима и достаточна сходимость ряда*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} \log m_j. \tag{6}$$

Достаточность следует из того, что для функций ограниченной вариации доказательство соответствующего утверждения в [7] основывалось на оценке (4) при $b_k = 1/k$. *Необходимость* в теореме 2 вытекает из установленного Р. М. Тригубом [8] необходимого условия в случае, когда $b_k = 1/k$, которое, как показала О. И. Кузнецова [8, с. 5, 6], эквивалентно сходимости ряда (6). В [7] и [8] предполагалось, что $v_j = n_j$, но легко видеть, что здесь это несущественно.

Рассмотрим теперь задачу об интегрируемости со степенным весом функций $U_A(x)$.

В [9] были получены достаточные условия сходимости интеграла

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} U_A^p(x)\,dx \tag{7}$$

в случае, когда $b_k = 1/k$ и $\gamma \in (1-p, 1)$ для целых $p = 1, 2, 3, \dots$ [9, теоремы 2 и 3] и $\gamma = 1-p$ при целых $p = 2, 3, \dots$ [9, теорема 4].

Распространим эти результаты на все $p > 1$ и числа b_k, удовлетворяющие условию (2). При этом для $\gamma = 1-p$ достаточное условие из [9] будет заменено на менее ограничительное условие.

Заметим, что условие $\gamma \geqslant 1-p$ является естественным, так как если сходится ряд $\sum n_j^{-1}$, то с помощью оценки (4) легко показать, что при $\gamma < 1-p$ интеграл (7) заведомо сходится.

Теорема 3. *Пусть $p \geqslant 1$ и для стремящихся к нулю чисел b_k справедлива оценка* (2). *Тогда при $\gamma \in (1-p, 1)$ интеграл* (7) *сходится, если сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{n_j} m_j^{1-(1-\gamma)/p}.$$

При $\gamma = 1-p$ интеграл (7) *сходится, если сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{n_j} \log^{1/p} m_j.$$

Доказательство. Пользуясь неравенством Минковского, получаем

$$\left(\int_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} U_A^p(x)\,dx\right)^{1/p} \leqslant \sum_{j=1}^\infty \left(\int_0^\pi \left(\frac{1}{x^{\gamma/p}} u_j(x)\right)^p dx\right)^{1/p}.$$

В силу (4) имеем

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} u_j^p(x)\,dx \leqslant \left(\frac{5B}{n_j}\right)^p \left(\int_0^{1/m_j} \frac{1}{x^\gamma} m_j^p\,dx + \int_{1/m_j}^\pi \frac{1}{x^{\gamma+p}}\,dx\right). \tag{8}$$

Поэтому при $\gamma \in (1-p, 1)$

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} u_j^p(x)\,dx < \left(\frac{5B}{n_j}\right)^p \left(m_j^p \frac{1}{1-\gamma} m_j^{\gamma-1} + \frac{1}{\gamma+p-1} m_j^{\gamma+p-1}\right) = C(p,\gamma,B) \frac{1}{n_j^p} m_j^{\gamma+p-1}, \tag{9}$$

где множитель $C(p,\gamma,B)$ зависит только от p, γ и B.

Таким образом,

$$\left(\int_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} U_A(x)\,dx\right)^{1/p} < \sum_{j=1}^\infty \left(C(p,\gamma,B) \frac{1}{n_j^p} m_j^{p+\gamma-1}\right)^{1/p} = C^{1/p}(p,\gamma,B) \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{n_j} m_j^{1-(1-\gamma)/p}.$$

Для $\gamma=1-p$ из (8) следует оценка

$$\int\limits_0^\pi \frac{1}{x^\gamma}u_j^p(x)\,dx\leqslant\Bigl(\frac{5B}{n_j}\Bigr)^p\Bigl[m_j^p\frac{x^p}{p}\Big|_0^{1/m_j}+\log\pi m_j\Bigr]=\Bigl(\frac{5B}{n_j}\Bigr)^p\Bigl(\frac{1}{p}+\log\pi+\log m_j\Bigr),\tag{10}$$

и, значит,

$$\Biggl(\int\limits_0^\pi\frac{1}{x^\gamma}U_A(x)\,dx\Biggr)^{1/p}\leqslant\sum_{j=1}^\infty\frac{5B}{n_j}\Bigl(\frac{1}{p}+\log\pi+\log m_j\Bigr)^{1/p}.$$

Теорема доказана. □

В [9] сходимость интеграла (7) для $\gamma=1-p$ (при $b_k=1/k$ и $v_j=n_j$) была установлена при условии сходимости ряда

$$\sum_{j=1}^\infty\frac{1}{n_j}\log m_j.$$

Найдем теперь условия сходимости интеграла (7) при $p\in(0,1)$.

Теорема 4. *Пусть $p\in(0,1)$ и для стремящихся к нулю чисел b_k справедлива оценка (2). Тогда при $\gamma\in(1-p,1)$ интеграл (7) сходится, если сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^\infty\frac{1}{n_j^p}m_j^{p-1+\gamma}.\tag{11}$$

При $\gamma=1-p$ интеграл (7) сходится, если сходится ряд

$$\sum_{j=1}^\infty\frac{1}{n_j^p}\log m_j.\tag{12}$$

При $p\in(0,1)$ имеет место оценка

$$\int\limits_0^\pi\frac{1}{x^\gamma}U_A^p(x)\,dx\leqslant\sum_{j=1}^\infty\int\limits_0^\pi\frac{1}{x^\gamma}u_j^p\,dx.$$

Поэтому утверждение теоремы 4 следует из оценок (9) и (10).

Поскольку доказательство теоремы 4 основывалось на оценке (4), подобный результат справедлив и для рядов Фурье функций ограниченной вариации.

Теорема 5. *Пусть $p\in(0,1)$ и*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^\infty(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

— ряд Фурье функции ограниченной вариации. Тогда при $\gamma\in(1-p,1)$ интеграл

$$\int\limits_0^\pi\frac{1}{x^\gamma}\sum_{j=1}^\infty\Biggl|\sum_{k=n_j}^{v_{j+1}-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\Biggr|^p dx\tag{13}$$

сходится, если сходится ряд (11). При $\gamma=1-p$ интеграл (13) сходится, если сходится ряд (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Теляковский С.А.** О частных суммах рядов Фурье функций ограниченной вариации // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 378–386.
2. **Leindler L.** On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series // Anal. Math. 2001. Vol. 27, no. 4. P. 279–285.
3. **Теляковский С.А.** Об ограниченности ряда из модулей блоков членов рядов по синусам // Тр. МИАН. 2013. Т. 283. С. 252–256.
4. **Теляковский С.А.** Ряды из модулей блоков членов тригонометрического ряда (обзор) // Фундаментал. и прикл. математика. 2013. Т. 18, № 5. С. 209–216.
5. **Теляковский С.А.** Некоторые свойства рядов Фурье функций ограниченной вариации. II // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 168–174.
6. **Заставный В.П.** Оценки сумм из модулей блоков тригонометрических рядов Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 168–179.
7. **Telyakovskii S.A.** Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation // East J. Approx. 2004. Vol. 10, no. 1–2. P. 215–218.
8. **Trigub R.M.** A note on the paper of Telyakovskii "Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation" // East J. Approx. 2007. Vol. 13, no. 1. P. 1–6.
9. **Теляковский С.А.** О свойствах блоков членов ряда $\sum \frac{1}{k} \sin kx$ // Укр. мат. журн. 2012. Т. 64, № 5. С. 713–718.

Теляковский Сергей Александрович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: sergeyAltel@yandex.ru

Поступила 20.04.2015