ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 517.977.1

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ДЕФИЦИТЕ ИНФОРМАЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ[1]

В. Л. Розенберг

Задача гарантирующего позиционного управления в условиях неполной информации рассматривается для линейного стохастического дифференциального уравнения (СДУ) с позиций подхода метода программных пакетов, разработанного ранее для наведения линейной управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на выпуклое целевое множество. Постановка предполагает формирование управляющей детерминированной программы, которая обеспечивает (независимо от реализовавшегося начального состояния из заданного конечного набора) в терминальный момент времени наличие предписанных свойств решения, являющегося случайным процессом, при наблюдении линейного сигнала о некотором количестве реализаций. С помощью уравнений метода моментов задача для СДУ сводится к эквивалентной задаче для систем ОДУ, которым удовлетворяют математическое ожидание и ковариационная матрица искомого процесса. Выписываются условия разрешимости рассматриваемых задач.

Ключевые слова: задача наведения, гарантирующее позиционное управление, линейное стохастическое дифференциальное уравнение.

V. L. Rozenberg. A control problem under incomplete information for a linear stochastic differential equation.

A problem of guaranteed closed-loop control under incomplete information is considered for a linear stochastic differential equation (SDE) from the viewpoint of the method of open-loop control packages worked out earlier for the guidance of a linear control system of ordinary differential equations (ODEs) to a convex target set. The problem consists in designing a deterministic open-loop control providing (irrespective of a realized initial state from a given finite set) prescribed properties of the solution (being a random process) at a terminal point in time. It is assumed that a linear signal on some number of realizations is observed. By the equations of the method of moments, the problem for the SDE is reduced to an equivalent problem for systems of ODEs describing the mathematical expectation and covariance matrix of the original process. Solvability conditions for the problems in question are written.

Keywords: guidance problem, guaranteed closed-loop control, linear stochastic differential equation.

Введение

Проблема построения оптимальных стратегий гарантирующего управления с обратной связью в условиях неопределенности является одной из наиболее актуальных и востребованных в математической теории управления и ее приложениях. В настоящей работе, следующей в русле теории позиционного управления, развитой Н. Н. Красовским, его коллегами и учениками [1–3], к решению задачи наведения для линейного СДУ применяется подход, основанный на так называемом методе программных пакетов, восходящем к технике неупреждающих стратегий из теории дифференциальных игр [4]. Суть метода, апробированного на задачах наведения при неполной информации для линейных управляемых систем ОДУ, состоит в сведении задач гарантирующего управления, поставленных в классе позиционных стратегий, к эквивалентным им задачам в классе пакетов программ, представляющих собой семейства программных управлений, параметризованные допустимыми начальными состояниями и обладающие свойством неупреждаемости по отношению к динамике наблюдений [5–7].

Данная работа посвящена изучению задачи наведения (с вероятностью, близкой к единице) траектории движения линейного СДУ на некоторое целевое множество. Постановка

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00539).

предполагает формирование управляющей детерминированной программы, которая обеспечивает (независимо от реализовавшегося начального состояния из заданного конечного набора) в терминальный момент времени наличие предписанных свойств решения, являющегося случайным процессом, при наблюдении линейного сигнала о некотором количестве его реализаций. Подобные задачи возникают в практических ситуациях, когда возможно наблюдение за большим количеством однотипных объектов, описываемых стохастической динамикой. С помощью уравнений метода моментов [8] задача для СДУ сводится к эквивалентной задаче для систем ОДУ, которым удовлетворяют математическое ожидание и ковариационная матрица искомого процесса. К полученным системам применяется техника метода программных пакетов, разработанная в [5–7].

Работа имеет следующую структуру. В разд. 1 формулируется основная задача о гарантирующем позиционном управлении для линейного СДУ в условиях дефицита информации. В разд. 2 описывается процедура сведения исходной задачи к двум вспомогательным задачам наведения для ОДУ и устанавливается эквивалентность задач для СДУ и ОДУ. В разд. 3 дается краткая сводка результатов, полученных ранее в рамках метода программных пакетов для ОДУ. В разд. 4 анализируются необходимые статистические оценки. В разд. 5 приводятся основные результаты статьи: критерий разрешимости исходной задачи и утверждение, связывающее точность наведения и количество доступных измерению траекторий исходного процесса. Отметим, что идейно близкая к предложенной в работе процедура сведения задачи для линейного СДУ к соответствующей задаче для ОДУ была использована, в частности, в [9] для решения задачи динамической реконструкции неизвестного возмущения, характеризующего уровень случайных помех, на основе измерений реализаций фазового вектора СДУ.

1. Постановка задачи

Рассматривается система линейных СДУ следующего вида:

$$dx(t,\omega) = (A(t)x(t,\omega) + B_1(t)u_1(t) + f(t))\,dt + B_2(t)U_2(t)\,d\xi(t,\omega), \quad x(t_0,\omega) = x_0. \tag{1.1}$$

Здесь $t \in T = [t_0, \vartheta]$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$ (все векторы считаем столбцами); $\omega \in \Omega$, (Ω, F, P) — вероятностное пространство; $\xi(t,\omega)$ — стандартный винеровский процесс (т. е. выходящий из нуля процесс с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации, равной It (I — единичная матрица из $\mathbb{R}^{k\times k}$)); $f(t)$ — непрерывная вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^n$; $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $B_1(t) = \{b_{1ij}(t)\}$ и $B_2(t) = \{b_{2ij}(t)\}$ — непрерывные матричные функции размерности $n \times n$, $n \times r$ и $n \times k$, соответственно.

В системе действуют два управления: вектор $u_1(t) = (u_{11}(t), u_{12}(t), \ldots, u_{1r}(t)) \in \mathbb{R}^r$ и диагональная матрица $U_2(t) = \{u_{21}(t), u_{22}(t), \ldots, u_{2k}(t)\} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, которые измеримы по Лебегу на T и принимают значения из заданных мгновенных ресурсов управления S_{u1} и S_{u2}, являющихся выпуклыми компактами в соответствующих пространствах. Воздействие u_1 входит в детерминированную компоненту и влияет на математическое ожидание искомого процесса. Поскольку $U_2 d\xi = (u_{21}d\xi_1, u_{22}d\xi_2, \ldots, u_{2k}d\xi_k)$, то можно считать, что вектор $u_2 = (u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2k})$ характеризует диффузию процесса (амплитуду случайных помех).

Начальное состояние x_0 принадлежит конечному множеству допустимых начальных состояний X_0, которое состоит из распределенных по нормальному закону случайных величин с числовыми параметрами (m_0, D_0), где $m_0 = Mx_0$ — математическое ожидание, $m_0 \in \mathcal{M}_0 = \{m_0^1, m_0^2, \ldots, m_0^{n_1}\}$, $D_0 = M(x_0 - m_0)(x_0 - m_0)^*$ — ковариационная матрица (звездочка означает транспонирование), $D_0 \in \mathcal{D}_0 = \{D_0^1, D_0^2, \ldots, D_0^{n_2}\}$. Таким образом, множество X_0 содержит $n_1 n_2$ элементов. Отметим, что если $0 \in \mathcal{D}_0$, то в X_0 входят и неслучайные векторы. Полагаем, что начальное состояние системы содержится в X_0, но является неизвестным.

Уравнение (1.1) является символической записью следующего интегрального тождества:

$$x(t,\omega) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} (A(s)x(s,\omega) + B_1(s)u_1(s) + f(s))\, ds + \int\limits_{t_0}^{t} B_2(s)U_2(s)\, d\xi(s,\omega). \tag{1.2}$$

Последний интеграл в правой части равенства (1.2) является стохастическим и понимается в смысле Ито. Для любого $\omega \in \Omega$ сформулированная задача Коши имеет единственное решение и определяет соответствующую реализацию случайного процесса $x(t,\omega)$, $t \in T$. Решение уравнения (1.1) определяется как случайный процесс, удовлетворяющий интегральному тождеству (1.2) при любом t с вероятностью 1. При предположениях, сделанных выше, существует единственное решение, которое является нормальным марковским процессом с непрерывными реализациями [10].

Отметим, что уравнения типа (1.1), (1.2) описывают простейшие линеаризованные модели, например изменения численности многовидовой биологической популяции в стохастической среде, динамики цен на товарных рынках при влиянии случайных факторов или движения частиц в некотором поле.

Обсуждаемая задача состоит в следующем. Пусть заданы выпуклые замкнутые целевые множества $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и непрерывная матричная функция наблюдения $Q(t)$ размерности $q \times n$. В каждый момент времени возможно поступление информации о некотором количестве N реализаций случайного процесса $x(t)$ (будем опускать символ ω в случаях, если речь идет о процессе, а не о его реализации), причем измерению доступен сигнал

$$y(t) = Q(t)x(t). \tag{1.3}$$

Полагаем, что для конечного набора некоторых заданных моментов времени $\tau_i \in T$, $i \in [1:l]$, строятся оценки m_i^N математического ожидания $m(\tau_i)$ и D_i^N ковариационной матрицы $D(\tau_i)$ такие, что

$$P\Big(\max_{i\in[1:l]} \big\{ \big\|m_i^N - m(\tau_i)\big\|_{\mathbb{R}^n}, \big\|D_i^N - D(\tau_i)\big\|_{\mathbb{R}^{n\times n}} \big\} \le h(N)\Big) = 1 - g(N), \tag{1.4}$$

причем $h(N)$ и $g(N) \to 0$ при $N \to \infty$. Ниже будет показано, что стандартные процедуры построения оценок m_i^N и D_i^N допускают модификации, обеспечивающие выполнение соотношения (1.4) и указанных сходимостей (аналогичная процедура была предложена в [9]).

З а д а ч а 1 гарантированного позиционного ε-наведения состоит в том, чтобы по произвольному наперед заданному $\varepsilon > 0$ выбрать такую программу управления $(u_1(\cdot), u_2(\cdot))$, которая, каково бы ни было начальное состояние x_0 из множества X_0, гарантирует предписанные свойства процесса x в конечный момент ϑ, а именно попадание математического ожидания $m(\vartheta)$ и ковариационной матрицы $D(\vartheta)$ в ε-окрестности целевых множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{D}$. В процессе движения искомая программа формируется позиционно (по принципу обратной связи) на основе информации о сигнале $y(t)$. В силу специфики оценки (1.4) следует требовать, чтобы вероятность искомого события была близка к 1 при достаточно большом N и специальным образом согласованных с N параметрах алгоритма.

2. Редукция исходной задачи

Сведем сформулированную выше задачу наведения для СДУ к двум задачам для систем ОДУ. В силу линейности исходной системы математическое ожидание $m(t)$ зависит только от $u_1(t)$; его динамика описывается уравнением

$$\dot m(t) = A(t)m(t) + B_1(t)u_1(t) + f(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad m(t_0) = m_0 \in \mathcal{M}_0. \tag{2.1}$$

Полагаем, что измерению доступны N ($N > 1$) траекторий $x^r(t)$, $r \in [1:N]$ исходного СДУ, тогда, по условию задачи наведения, известны значения сигнала (1.3) $y^r(t) = Q(t)x^r(t)$.

Сигнал о траектории уравнения (2.1) обозначим через $y_m(t) = Q_m(t)m(t)$; его оценку, формируемую из информации об y^r, $r \in [1:N]$, — через $y_m^N(t)$. Последняя конструируется следующим образом:

$$y_m^N(t) = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} y^r(t) = Q(t)m^N(t), \quad m^N(t) = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} x^r(t). \tag{2.2}$$

Очевидно, $Q_m(t) = Q(t)$ и для конечного набора моментов времени $\tau_i \in T$, $i \in [1:l]$, с учетом соотношения (1.4) выполняется

$$P\big(\forall i \in [1:l] \ \ \big\|y_m^N(\tau_i) - y_m(\tau_i)\big\|_{\mathbb{R}^q} \le C_1 h(N)\big) = 1 - g(N), \tag{2.3}$$

где константа C_1 может быть выписана явно. Напомним, что $\mathcal{M}$ — целевое множество для траектории уравнения (2.1).

Ковариационная матрица $D(t)$ зависит только от $U_2(t)$; ее динамика описывается с помощью так называемого уравнения метода моментов [8] в следующем виде:

$$\dot{D}(t) = A(t)D(t) + D(t)A^*(t) + B_2(t)U_2(t)U_2^*(t)B_2^*(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad D(t_0) = D_0 \in \mathcal{D}_0. \tag{2.4}$$

В данном случае матричное уравнение (2.4) удобно переписать в виде более традиционного для рассматриваемой задачи векторного уравнения, размерность которого, с учетом симметричности матрицы $D(t)$, определяется как $n_d = (n^2 + n)/2$. Введем вектор $d(t) = \{d_s(t)\}$, $s \in [1:n_d]$, координаты которого находятся по элементам матрицы $D(t) = \{d_{ij}(t)\}$, $i, j \in [1:n]$:

$$d_s(t) = d_{ij}(t), \quad i \le j, \quad s = (n - i/2)(i-1) + j. \tag{2.5}$$

Фактически вектор $d(t)$ состоит из последовательно записанных и пронумерованных элементов матрицы $D(t)$, взятых построчно, начиная с элемента, расположенного на главной диагонали. Выполняя стандартные матричные операции, по $A(t)$ и $B_2(t)$ формируем непрерывные матрицы $\bar{A}(t)\colon T \to \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$ и $\bar{B}(t)\colon T \to \mathbb{R}^{n_d \times k}$, посредством которых система (2.4) переписывается в виде

$$\dot{d}(t) = \bar{A}(t)d(t) + \bar{B}(t)v(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad d(t_0) = d_0 \in \mathcal{D}_0. \tag{2.6}$$

Начальное состояние d_0 получено по D_0, обозначение для множества $\mathcal{D}_0$ не меняем. Произведение диагональных матриц $U_2(t)U_2^*(t)$ приводит к появлению управляющего вектора $v(t) = (u_{21}^2(t), u_{22}^2(t), \dots, u_{2k}^2(t))$, элементы которого для всех $t \in T$ принимают значения из некоторого выпуклого компакта $S_v \in \mathbb{R}^k$.

Сигнал о траектории уравнения (2.6) обозначим через $y_d(t) = Q_d(t)d(t)$; его оценку, формируемую из информации об y^r, $r \in [1:N]$, — через $y_d^N(t)$. Последняя конструируется из следующего соотношения:

$$\frac{1}{N-1}\sum_{r=1}^{N}(y^r(t) - y_m^N(t))(y^r(t) - y_m^N(t))^*$$

$$= Q(t)\frac{1}{N-1}\sum_{r=1}^{N}(x^r(t) - m^N(t))(x^r(t) - m^N(t))^* Q^*(t) = Q(t)D^N(t)Q^*(t), \tag{2.7}$$

где $D^N(t)$ — стандартная оценка ковариационной матрицы $D(t)$ при неизвестном (оцениваемом через $m^N(t)$) математическом ожидании $m(t)$. Посредством учитывающих симметричность матрицы (2.7) алгебраических преобразований (опустим их ввиду громоздкости выкладок) выражение $Q(t)D^N(t)Q^*(t)$ трансформируется в $y_d^N(t) = Q_d(t)d^N(t)$, где $Q_d(t)$ — непрерывная матрица размерности $n_q \times n_d$, $n_q = (q^2+q)/2$, $d^N(t)$ — вектор размерности n_d, извлеченный из $D^N(t)$ по правилу (2.5). Очевидно, для конечного набора моментов времени $\tau_i \in T$, $i \in [1:l]$, выполняется соотношение типа (1.4):

$$P\big(\forall i \in [1:l] \ \ \big\|y_d^N(\tau_i) - y_d(\tau_i)\big\|_{\mathbb{R}^{n_q}} \le C_2 h(N)\big) = 1 - g(N), \tag{2.8}$$

где константа C_2 может быть выписана явно. Будем обозначать целевое множество для траектории уравнения (2.6) прежним символом $\mathcal{D}$.

Таким образом, исходная задача 1 гарантированного позиционного ε-наведения для СДУ может быть переформулирована следующим образом.

З а д а ч а 2. Требуется по произвольному наперед заданному $\varepsilon > 0$ выбрать такие программы управления $u_1(\cdot)$ уравнением (2.1) и $v(\cdot)$ уравнением (2.6), что, каковы бы ни были начальные состояния m_0 из множества $\mathcal{M}_0$ и d_0 из множества $\mathcal{D}_0$, траектории (2.1) и (2.6) в конечный момент ϑ попадают с вероятностью, близкой к 1, в ε-окрестности целевых множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{D}$ соответственно.

Искомые программы формируются на основе оценок сигналов y_m и y_d, удовлетворяющих соотношениям (2.3) и (2.8), и фактически определяют управления в СДУ (1.1). Зависимость количества необходимых для оценивания траекторий N от величины ε будет приведена ниже. Из процедуры построения задачи 2 следует

Теорема 1. *Задача* 1 *и задача* 2 *эквивалентны.*

Таким образом, для решения задачи 1 следует установить условия совместной разрешимости задач ε-наведения для ОДУ (2.1) и (2.6), т. е. условия разрешимости задачи 2, а также определить вид согласования параметров N и ε.

3. Метод программных пакетов: краткая сводка результатов для ОДУ

Кратко изложим суть подхода А. В. Кряжимского и Ю. С. Осипова к решению задачи позиционного наведения при дефиците информации для линейного ОДУ [5–7].

Рассматривается динамическая управляемая система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0 \in X_0, \tag{3.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m$ (P — выпуклый компакт), $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $f(\cdot)$ — непрерывные матричные функции размерности $n \times n$, $n \times m$ и $n \times 1$ соответственно, X_0 — конечное множество возможных начальных состояний. Истинное начальное состояние системы считается неизвестным. Заданы выпуклое замкнутое целевое множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывная матричная функция наблюдения $Q(t)$ размерности $q \times n$.

Задача гарантированного позиционного ε-наведения состоит в формировании по сигналу $y(t) = Q(t)x(t)$ программы управления, гарантирующей для произвольного заданного $\varepsilon > 0$ попадание состояния $x(\vartheta)$ системы в конечный момент ϑ в ε-окрестность целевого множества $\mathcal{M}$. Поиск решения осуществляется в классе позиционных стратегий управления с памятью, коррекция значений программы $u(\cdot)$ происходит в заранее заданные моменты. В работе [6] устанавливается эквивалентность сформулированной задачи позиционного управления так называемой задаче пакетного наведения; терминология последней и условия разрешимости обсуждаются в [7].

Рассматривается однородная система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0 \in X_0;$$

ее фундаментальная матрица обозначается через $F(\cdot,\cdot)$. Для каждого допустимого начального состояния $x_0 \in X_0$ *однородным сигналом*, соответствующим x_0, называется функция

$g_{x_0}(t) = Q(t)F(t,t_0)x_0$, $t \in [t_0,\vartheta]$. Вводится множество всех допустимых начальных состояний x_0, соответствующих однородному сигналу $g(\cdot)$ до момента времени τ: $X_0(\tau|g(\cdot)) = \{x_0 \in X_0 \colon g_{x_0}(\cdot)|_{[t_0,\tau]} = g(\cdot)|_{[t_0,\tau]}\}$, где $g(\cdot)|_{[t_0,\tau]}$ — сужение однородного сигнала $g(\cdot)$ на отрезок $[t_0,\tau]$.

Пакетом программ называется семейство $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$, удовлетворяющее условию неупреждаемости: для любых однородного сигнала $g(\cdot)$, момента $\tau \in (t_0,\vartheta]$ и допустимых начальных состояний x_0', $x_0'' \in X_0(\tau|g(\cdot))$ при всех $t \in [t_0,\tau]$ выполняется равенство $u_{x_0'}(t) = u_{x_0''}(t)$. Пакет программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ является наводящим, если для любого $x_0 \in X_0$ движение из x_0, соответствующее $u_{x_0}(\cdot)$, в момент ϑ попадает в точности на целевое множество $\mathcal{M}$. Если существует наводящий пакет программ, то считаем, что разрешима идеализированная задача пакетного наведения [5; 6], соответствующая исходной задаче гарантирующего позиционного управления. Отметим, что в этих задачах предполагается, что сигнал известен точно.

Пусть G — множество всех однородных сигналов (их количество не превышает числа элементов множества X_0). Вводится множество $G_0(g(\cdot))$ однородных сигналов, совпадающих с некоторым $g(\cdot)$ в правосторонней окрестности начального момента t_0. Первым моментом расслоения однородного сигнала $g(\cdot)$ называется момент

$$\tau_1(g(\cdot)) = \max\Big\{\tau \in [t_0,\vartheta] \colon \max_{g'(\cdot)\in G_0(g(\cdot))} \max_{t\in[t_0,\tau]} \big\|g'(t) - g(t)\big\|_{\mathbb{R}^q} = 0\Big\}.$$

Если $\tau_1(g(\cdot)) < \vartheta$, то по аналогии с $G_0(g(\cdot))$ вводится множество $G_1(g(\cdot))$ всех однородных сигналов из $G_0(g(\cdot))$, совпадающих с $g(\cdot)$ в правосторонней окрестности момента расслоения $\tau_1(g(\cdot))$. Фактически разность $G_0(g(\cdot))\backslash G_1(g(\cdot))$ информирует о количестве сигналов, переставших совпадать с $g(\cdot)$ после $\tau_1(g(\cdot))$. По аналогии с $\tau_1(g(\cdot))$ определяется второй момент расслоения однородного сигнала $g(\cdot)$ и т. д. Наконец, вводится множество всех моментов расслоения однородного сигнала $g(\cdot)$: $T(g(\cdot)) = \{\tau_j(g(\cdot)) \colon j = 1,\ldots,k_g\}$, $k_g \geq 1$, $\tau_{k_g}(g(\cdot)) = \vartheta$. Затем определяется упорядоченное по возрастанию множество всех моментов расслоения всех однородных сигналов (в [7] показано, что это и есть возможные моменты переключения “идеальной” наводящей программы): $T = \bigcup_{g(\cdot)\in G} T(g(\cdot))$, $T = \{\tau_1,\ldots,\tau_K\}$, $K \leq \sum_{g(\cdot)\in G} k_{g(\cdot)}$ — количество элементов множества T. Очевидно, множества $T(g(\cdot))$ и T конечны ввиду конечности множеств X_0 и G. Для каждого $k = 1,\ldots,K$ множество $\mathcal{X}_0(\tau_k) = \{X_0(\tau_k|g(\cdot)) \colon g(\cdot) \in G\}$ называется кластерной позицией в момент τ_k, а каждый его элемент X_{0k} — кластером начальных состояний в этот момент.

Описанные конструкции используются для характеризации пакетов программ. Далее, в [7] через введение вспомогательной расширенной задачи программного наведения для системы, состоящей из экземпляров системы (3.1), параметризованных допустимыми начальными состояниями, получен критерий разрешимости исходной задачи, сводящийся к решению конечномерной оптимизационной задачи. Сформулируем основной результат [7], по возможности не прибегая к терминологии расширенной задачи.

Теорема 2 [7, теорема 2]. *Задача пакетного наведения для системы* (3.1) *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{S}} \gamma((l_{x_0})_{x_0\in X_0}) \leq 0,$$

$$\gamma((l_{x_0})_{x_0\in X_0}) = \sum_{x_0\in X_0} \langle l_{x_0}, F(\vartheta,t_0)x_0\rangle + \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sum_{X_{0k}\in\mathcal{X}_0(\tau_k)} \rho^-\Big(\sum_{x_0\in X_{0k}} B^*(s)F^*(\vartheta,s)l_{x_0}\big|P\Big)\,ds$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \Big\langle \sum_{x_0\in X_0} l_{x_0}, F(\vartheta,s)f(s)\Big\rangle\,ds - \sum_{x_0\in X_0} \rho^+(l_{x_0}|\mathcal{M}). \tag{3.2}$$

Здесь $(l_{x_0})_{x_0\in X_0}$ — параметризованное допустимыми начальными состояниями семейство векторов из $\mathbb{R}^n$ (количество векторов совпадает с числом элементов X_0); $\mathcal{S}$ — множество семейств $(l_{x_0})_{x_0\in X_0}$ таких, что $\sum_{x_0\in X_0}\|l_{x_0}\|^2_{\mathbb{R}^n}=1$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве; $\rho^-(\cdot|P)$ — нижняя опорная функция множества P и $\rho^+(\cdot|\mathcal{M})$ — верхняя опорная функция множества $\mathcal{M}$.

4. Свойства статистических оценок

Лемма. *Для конечного набора некоторых моментов времени* $\tau_i\in T$, $i\in[1:l]$, *стандартные оценки* m_i^N *математического ожидания* $m(\tau_i)$ *и* D_i^N *ковариационной матрицы* $D(\tau_i)$, *построенные по* N $(N>1)$ *реализациям* $x^1(\tau_i),x^2(\tau_i),\ldots,x^N(\tau_i)$ *случайных величин* $x(\tau_i)$ *по следующим правилам* [11]:

$$m_i^N=\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}x^r(\tau_i), \tag{4.1}$$

$$D_i^N=\frac{1}{N-1}\sum_{r=1}^{N}(x^r(\tau_i)-m_i^N)(x^r(\tau_i)-m_i^N)^*, \tag{4.2}$$

обеспечивают выполнение свойства (1.4) (*следовательно,* (2.3) *и* (2.8)).

Доказательство. Приведем доказательство леммы для случая $n=1$ (рассуждения для $n>1$ аналогичны, однако формулы слишком громоздки). В этом случае скалярная величина $x(\tau_i)$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $m(\tau_i)$ и дисперсией $D(\tau_i)$. Рассмотрим оценку (4.1). Покажем, что она обладает следующим свойством:

$$P\big(\forall i\in[1:l]\ \big|m_i^N-m(\tau_i)\big|\le h_m(N)\big)=1-g_m(N);\quad h_m(N),\,g_m(N)\to 0 \text{ при } N\to\infty. \tag{4.3}$$

Сначала докажем, что

$$\forall i\in[1:l]\ P\big(\big|m_i^N-m(\tau_i)\big|\le h_m(N)\big)=1-f_m(N);\quad f_m(N)\to 0 \text{ при } N\to\infty. \tag{4.4}$$

Как известно [11], случайная величина $\xi=(m_i^N-m(\tau_i))\sqrt{N/D_i^N}$ имеет t-распределение (Стьюдента) с $N-1$ степенями свободы, которое при $N>30$ близко к стандартному нормальному закону $N(0,\,1)$. Наша цель — модифицировать процедуру оценки математического ожидания при неизвестной дисперсии таким образом, чтобы выполнялось соотношение (4.4).

Рассмотрим следующее выражение при $0<\gamma<1/2$:

$$P\Big(-N^\gamma\le(m_i^N-m(\tau_i))\sqrt{N/D_i^N}\le N^\gamma\Big)=P\Big(-N^\gamma\sqrt{D_i^N/N}\le m_i^N-m(\tau_i)\le N^\gamma\sqrt{D_i^N/N}\Big)$$

$$=P\Big(|m_i^N-m(\tau_i)|\le N^\gamma\sqrt{D_i^N/N}\Big)=1-f_m(N).$$

Можно считать, что в (4.4) $h_m(N)=C_1N^{\gamma-1/2}$ (здесь и ниже через C_i обозначаем вспомогательные константы, которые могут быть выписаны явно). С другой стороны,

$$P\Big(-N^\gamma\le(m_i^N-m(\tau_i))\sqrt{N/D_i^N}\le N^\gamma\Big)=2(F_{t,N-1}(N^\gamma)-F_{t,N-1}(0))=2F_{t,N-1}(N^\gamma)-1$$

$$=2\big(F_{t,N-1}(N^\gamma)-\Phi(N^\gamma\sqrt{1-2/N}\,)\big)+2\Phi(N^\gamma\sqrt{1-2/N}\,)-1$$

$$\ge 2\Phi(N^\gamma\sqrt{1-2/N}\,)-1-2\,\big|F_{t,N-1}(N^\gamma)-\Phi(N^\gamma\sqrt{1-2/N}\,)\big|$$

$$=1-2\big(1-\Phi(N^\gamma\sqrt{1-2/N}\,)\big)-2\,\big|F_{t,N-1}(N^\gamma)-\Phi(N^\gamma\sqrt{1-2/N}\,)\big|.$$

Здесь $F_{t,N-1}(x)$ — функция вероятности t-распределения с $N-1$ степенями свободы, $F_{t,N-1}(0)=1/2$; $\Phi(x)$ — функция нормального распределения, $\Phi(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}1/\sqrt{2\pi}\,e^{-y^2/2}\,dy$.

Используем неравенство, уточняющее близость функций $F_{t,N-1}(x)$ и $\Phi(x)$ при больших N, в виде [12]

$$\left|F_{t,N-1}(x)-\Phi(x\sqrt{1-2/N}\,)\right|\le C_2/N, \tag{4.5}$$

а также асимптотику нормального распределения при $x\to\infty$ в виде [11]

$$1-\Phi(x)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}+o\Big(\frac{e^{-x^2/2}}{x}\Big). \tag{4.6}$$

Получаем

$$P\big(-N^\gamma\le(m_i^N-m(\tau_i))\sqrt{N/D_i^N}\le N^\gamma\big)\ge 1-2C_2/N-C_3e^{-N^{2\gamma}/2}/N^\gamma+o\big(e^{-N^{2\gamma}/2}/N^\gamma\big).$$

Поскольку асимптотика нормального распределения (4.6) подавляется погрешностью нормальной аппроксимации (4.5), то можно принять (см. (4.4)), что $f_m(N)\le C_4/N$. Свойство (4.4) выполняется. Обозначим

$$A_{mi}=\left\{\left|m_i^N-m(\tau_i)\right|\le h_m(N)\right\},\quad P(A_{mi})=1-f_m(N)\quad\forall i\in[1:l].$$

Далее,

$$P\left(\forall i\in[1:l]\ \ \left|m_i^N-m(\tau_i)\right|\le h_m(N)\right)=P\left(A_{m1}A_{m2}\dots A_{ml}\right)$$

$$=P(A_{m1})P(A_{m2}|A_{m1})P(A_{m3}|A_{m1}A_{m2})\dots P\Big(A_{ml}\,|\prod_{k=1}^{l-1}A_{mk}\Big)\ge(1-f_m(N))^l\ge(1-lf_m(N)).$$

Предпоследнее неравенство опирается на предположение о том, что все условные вероятности не меньше соответствующих безусловных ввиду непрерывности траекторий рассматриваемого процесса, а последнее следует из малости $f_m(N)$. Очевидно, можно считать, что в (4.3) $g_m(N)=lf_m(N)=lC_4/N$.

Доказательство соответствующего свойства оценки (4.2), а именно

$$P\big(\forall i\in[1:l]\ \ \left|D_i^N-D(\tau_i)\right|\le h_d(N)\big)=1-g_d(N);\quad h_d(N),\,g_d(N)\to 0 \text{ при } N\to\infty, \tag{4.7}$$

повторяет, с незначительными изменениями, доказательство аналогичного утверждения из [9], где показано, что $h_d(N)=C_5N^{\gamma-1/2}$, $g_d(N)=lC_6N^{-1/2-3\gamma}$.

Сопоставляя (4.3) и (4.7), заключаем, что в соотношениях (1.4), (2.3) и (2.8) можно рассматривать единые параметры

$$h(N)=C_hN^{\gamma-1/2},\quad g(N)=C_gN^{\max\{-1,-1/2-3\gamma\}}, \tag{4.8}$$

где C_h, C_g — константы, которые могут быть выписаны явно. Например, выбирая значение $\gamma=1/6$, получим $h(N)=C_hN^{-1/3}$, $g(N)=C_g/N$.

5. Критерий разрешимости задач 1 и 2. Условия согласования параметров

Дополнительно определим несколько понятий для ОДУ (2.1) и (2.6) на основе материала разд. 3. Пусть $G^1=\{g^1(\cdot)\}$ и $G^2=\{g^2(\cdot)\}$ — множества всех однородных сигналов для (2.1) и (2.6) соответственно. Множества всех моментов расслоения всех однородных сигналов для (2.1) и (2.6) обозначим через $T^1=\{\tau_1^1,\dots,\tau_{K_1}^1\}$ и $T^2=\{\tau_1^2,\dots,\tau_{K_2}^2\}$; кластерные позиции и кластеры начальных состояний в моменты τ_k^1 и τ_k^2 соответственно — через $\mathcal{M}_0(\tau_k^1)$ и M_{0k}, $\mathcal{D}_0(\tau_k^2)$ и D_{0k}. Напомним, что по определению последний момент расслоения всегда совпадает с ϑ: $\tau_{K_1}^1=\tau_{K_2}^2=\vartheta$. Для упрощения изложения считаем $\tau_0^1=\tau_0^2=t_0$ (t_0 не является моментом расслоения). Введем множества пар однородных сигналов, разделяемых (в смысле определений разд. 3) в моменты τ_k^1, $k\in[0:K_1-1]$ и τ_k^2, $k\in[0:K_2-1]$: $G_k^{1*}=\{(g_i^1(\tau_k^1),g_j^1(\tau_k^1))\}$,

$G_k^{2*} = \{(g_i^2(\tau_k^2), g_j^2(\tau_k^2))\}$, $i \neq j$. Момент из промежутка $(\tau_k^1, \tau_k^1 + C\varepsilon]$ ($\tau_k^1 + C\varepsilon < \tau_{k+1}^1$, смысл константы C уточняется ниже), в который различимы все пары из G_k^{1*}, обозначим через τ_k^{1*} и будем называть моментом различения всех разделяемых в момент τ_k^1 сигналов. Аналогично определяем момент различения τ_k^{2*}. Очевидно, можно считать, что для всех $\tau_k^1 \in T^1$, $k \in [0 : K_1 - 1]$ и $\tau_k^2 \in T^2$, $k \in [0 : K_2 - 1]$ соответствующие им моменты τ_k^{1*} и τ_k^{2*} определяются однозначно; в эти моменты значения сигналов во всех парах из G_k^{1*} и G_k^{2*} различны. Действительно, если предположить, что через какое-то время после разделения сигналы снова совпадают (что определяется видом матрицы наблюдения Q), то из конечности числа сигналов, их непрерывности и определения моментов расслоения следует существование минимального момента из $(\tau_k^1, \tau_k^1 + C\varepsilon]$ ($(\tau_k^2, \tau_k^2 + C\varepsilon]$), до которого не совпадают сигналы в любой паре из G_k^{1*} (G_k^{2*}) соответственно. Множество всех таких моментов различения для (2.1) и (2.6)

$$T^* = T^{1*} \cup T^{2*}, \quad T^{1*} = \{\tau_0^{1*}, \ldots, \tau_{K_1-1}^{1*}\}, \quad T^{2*} = \{\tau_0^{2*}, \ldots, \tau_{K_2-1}^{2*}\} \tag{5.1}$$

определяет как упоминавшееся выше множество из l ($l < K_1 + K_2$) моментов, когда измеряются N траекторий исходного процесса, так и множество возможных моментов переключения позиционного управления. Отметим, что случай $T^* = \varnothing$ имеет место, только если все сигналы совпадают на всем промежутке $[t_0, \vartheta]$.

Сформулируем согласно (3.2) условия разрешимости задачи наведения для (2.1):

$$\sup_{(l_{m_0})_{m_0 \in \mathcal{M}_0} \in \mathcal{S}_1} \gamma_1((l_{m_0})_{m_0 \in \mathcal{M}_0}) \leq 0,$$

$$\gamma_1((l_{m_0})_{m_0 \in \mathcal{M}_0}) = \sum_{m_0 \in \mathcal{M}_0} \langle l_{m_0}, F_1(\vartheta, t_0) m_0 \rangle + \sum_{k=1}^{K_1} \int\limits_{\tau_{k-1}^1}^{\tau_k^1} \sum_{M_{0k} \in \mathcal{M}_0(\tau_k^1)} \rho^- \Big(\sum_{m_0 \in M_{0k}} B_1^*(s) F_1^*(\vartheta, s) l_{m_0} \big| S_{u1} \Big) ds$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \Big\langle \sum_{m_0 \in \mathcal{M}_0} l_{m_0},\, F_1(\vartheta, s) f(s) \Big\rangle\, ds - \sum_{m_0 \in \mathcal{M}_0} \rho^+(l_{m_0} | \mathcal{M}) \tag{5.2}$$

и условия разрешимости задачи наведения для (2.6):

$$\sup_{(l_{d_0})_{d_0 \in \mathcal{D}_0} \in \mathcal{S}_2} \gamma_2((l_{d_0})_{d_0 \in \mathcal{D}_0}) \leq 0, \quad \gamma_2((l_{d_0})_{d_0 \in \mathcal{D}_0}) = \sum_{d_0 \in \mathcal{D}_0} \langle l_{d_0}, F_2(\vartheta, t_0) d_0 \rangle$$

$$+ \sum_{k=1}^{K_2} \int\limits_{\tau_{k-1}^2}^{\tau_k^2} \sum_{D_{0k} \in \mathcal{D}_0(\tau_k^2)} \rho^- \Big(\sum_{d_0 \in D_{0k}} \bar{B}^*(s) F_2^*(\vartheta, s) l_{d_0} \big| S_v \Big)\, ds - \sum_{d_0 \in \mathcal{D}_0} \rho^+(l_{d_0} | \mathcal{D}). \tag{5.3}$$

Здесь $(l_{m_0})_{m_0 \in \mathcal{M}_0}$, $(l_{d_0})_{d_0 \in \mathcal{D}_0}$ — параметризованные соответствующими начальными состояниями семейства векторов; $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ — множества семейств $(l_{m_0})_{m_0 \in \mathcal{M}_0}$, $\sum_{m_0 \in \mathcal{M}_0} \|l_{m_0}\|^2_{\mathbb{R}^n} = 1$ и $(l_{d_0})_{d_0 \in \mathcal{D}_0}$, $\sum_{d_0 \in \mathcal{D}_0} \|l_{d_0}\|^2_{\mathbb{R}^{n_d}} = 1$; $F_1(\cdot,\cdot)$ и $F_2(\cdot,\cdot)$ — фундаментальные матрицы систем (2.1) и (2.6). Докажем следующее утверждение, фактически являющееся основным результатом работы.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (5.2) *и* (5.3), *информация об* N *траекториях* СДУ (1.1) *поступает в моменты, составляющие множество* T^* (5.1), *константы* C_h, C_g *и* γ *взяты из леммы* (*см.* (4.8)) *и*

$$N > (2C_h/\rho(\varepsilon))^{2/(1-2\gamma)}, \tag{5.4}$$

$$\rho(\varepsilon) = \min\Big\{ \min_{\tau_k^{1*} \in T^{1*},\, (g_i^1, g_j^1) \in G_k^{1*}} \|g_i^1(\tau_k^{1*}) - g_j^1(\tau_k^{1*})\|_{\mathbb{R}^q},\ \min_{\tau_k^{2*} \in T^{2*},\, (g_i^2, g_j^2) \in G_k^{2*}} \|g_i^2(\tau_k^{2*}) - g_j^2(\tau_k^{2*})\|_{\mathbb{R}^{n_q}} \Big\}.$$

Тогда с вероятностью $1 - C_g N^{\max\{-1, -1/2 - 3\gamma\}}$ *задача* 1 ε*-наведения разрешима и* ε*-наводящий программный пакет реализуем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполнение условий (5.2) и (5.3) обеспечивает разрешимость идеализированных задач пакетного наведения, соответствующих задачам гарантирующего позиционного управления, составляющих задачу 2. Таким образом, существуют $(u^*_{1m_0}(\cdot))_{m_0\in\mathcal{M}_0}$ и $(v^*_{d_0}(\cdot))_{d_0\in\mathcal{D}_0}$ — параметризованные начальными состояниями пакеты программ, решающие идеализированные задачи пакетного наведения для систем (2.1) и (2.6). Решение задач гарантированного ε-наведения предполагает возможность синтеза по $u^*_{1m_0}$ и $v^*_{d_0}$ соответствующих позиционных управлений, приводящих в ε-окрестности целевых множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{D}$, на основе поступающей информации об оценках (2.2) и (2.7), построенных по реализациям сигнала (1.3). Тем самым согласно теореме 1 будет построен ε-наводящий программный пакет, решающий задачу 1 для системы (1.1).

Уточним сказанное на примере системы (2.1), которая стартует в момент t_0 из некоторого неизвестного начального состояния $\widehat{m}_0\in\mathcal{M}_0$, наводящую программу для которого обозначим через $u^*_{1\widehat{m}_0}(\cdot)$. Пусть T^{1*} содержит более одного момента различения. Позиционное управление $\hat{u}^*_1(\cdot)$ конструируем следующим образом. До начала движения принимаем решение применять в (2.1) тестовое управление $\hat{u}^*_1(t)=\hat{u}^*_{10}\in S_{u1}$, $t\in[t_0,\tau^{1*}_0)$. В момент начального различения сигналов τ^{1*}_0 измеряем N траекторий (1.1) и по ним строим оценку $y^N_m(\tau^{1*}_0)$ реализовавшегося сигнала $y_m(\tau^{1*}_0)=Q_m(\tau^{1*}_0)m(\tau^{1*}_0)$. Используя формулу Коши, выражаем однородный сигнал

$$Q_m(\tau^{1*}_0)F_1(\tau^{1*}_0,t_0)\widehat{m}_0=y_m(\tau^{1*}_0)-Q_m(\tau^{1*}_0)\int\limits_{t_0}^{\tau^{1*}_0}F_1(\tau^{1*}_0,\tau)(B_1(\tau)\hat{u}^*_{10}+f(\tau))\,d\tau.$$

Теперь по оценке $y^N_m(\tau^{1*}_0)$ определим кластер начальных состояний M_{0k}, содержащий $\widehat{m}_0$. Принимая во внимание (2.3) и (4.8), имеем $\left\|y^N_m(\tau^{1*}_0)-y_m(\tau^{1*}_0)\right\|_{\mathbb{R}^q}\le h(N)$. Тогда, если

$$h(N)<\rho^1_0(\varepsilon)/2=\min_{(g^1_i,g^1_j)\in G^{1*}_0}\|g^1_i(\tau^{1*}_0)-g^1_j(\tau^{1*}_0)\|_{\mathbb{R}^q}/2, \tag{5.5}$$

то кластер $M_{01}=\{m_0\in\mathcal{M}_0: g_{m_0}(\cdot)|_{[t_0,\tau^1_1]}=g_{\widehat{m}_0}(\cdot)|_{[t_0,\tau^1_1]}\}$ однозначно определяется (поскольку до момента τ^1_1 никаких расслоений однородного сигнала нет). Следовательно, в каждый момент $t\in[\tau^{1*}_0,\tau^{1*}_1)$ будем применять управление $u^*_{1M_{01}}(t)$ из пакета $(u^*_{1m_0}(\cdot))_{m_0\in\mathcal{M}_0}$, соответствующее кластеру M_{01}, т. е. фактически управление $u^*_{1\widehat{m}_0}(t)$. Аналогичную процедуру применяем для всех моментов различения сигналов τ^{1*}_k. Очевидно, построенное таким образом управление $\hat{u}^*_1(t)$ отличается от наводящей программы $u^*_{1\widehat{m}_0}(t)$ только максимум на K_1 отрезках, каждый из которых имеет длину не более $C\varepsilon$. Обозначим через $m^*(\cdot)$ и $\widehat{m}^*(\cdot)$ решения (2.1) для начального состояния $\widehat{m}_0$, соответствующие управлениям $u^*_{1\widehat{m}_0}(t)$ и $\hat{u}^*_1(t)$. Отметим, что $m^*(\vartheta)\in\mathcal{M}$. Учитывая ограниченность всех функций и управления в (2.1), оценим величину

$$\|\widehat{m}^*(\vartheta)-m^*(\vartheta)\|_{\mathbb{R}^n}=\Big\|\int\limits_{t_0}^{\vartheta}F_1(\vartheta,\tau)B_1(\tau)(\hat{u}^*_1(\tau)-u^*_{1\widehat{m}_0}(\tau))\,d\tau\Big\|_{\mathbb{R}^n}\le\overline{K}C\varepsilon,$$

где константа $\overline{K}$ может быть выписана явно. Отсюда, выбирая $C<1/\overline{K}$, гарантируем $\|\widehat{m}^*(\vartheta)-m^*(\vartheta)\|<\varepsilon$, т. е. попадание $\widehat{m}^*(\vartheta)$ в ε-окрестность целевого множества $\mathcal{M}$.

Для системы (2.6) все рассуждения аналогичны. Вид функции $\rho(\varepsilon)$ (входящие в нее минимумы существуют ввиду конечности всех задействованных множеств) объясняется необходимостью требовать оценку типа (5.5) для каждого $\tau^*_k\in T^*$. Таким образом, получаем $h(N)<\rho(\varepsilon)/2$. Отсюда и из (4.8) следует соотношение (5.4), связывающее N и ε. Наконец, в силу (4.8) вся совокупность действий, описанных выше, включая ε-наведение решений (2.1) и (2.6), следовательно и (1.1), выполняется с вероятностью $1-C_gN^{\max\{-1,-1/2-3\gamma\}}$, стремящейся к 1 при при $N\to\infty$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 516 с.
3. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. New York: Springer Verlag, 1988. 517 с.
4. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
5. **Осипов Ю.С.** Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, вып. 4(370). С. 25–76.
6. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О разрешимости задач гарантирующего управления для частично наблюдаемых линейных динамических систем // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 152–167.
7. **Кряжимский А.В., Стрелковский Н.В.** Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 132–147.
8. **Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.** Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978. 272 с.
9. **Розенберг В.Л.** Задача динамического восстановления неизвестной функции в линейном стохастическом дифференциальном уравнении // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 76–87.
10. **Оксендаль Б.** Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003. 408 с.
11. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. М.: Наука, 1985. 640 с.
12. **Johnson N. L., Kotz S., Balakrishnan N.** Continuous univariate distributions. New York: John Wiley & Sons, 1995. Vol. 2. 2nd edition. 717 p.

Поступила 12.05.2015.

Розенберг Валерий Львович
канд. физ.-мат. наук
старший научн. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: rozen@imm.uran.ru