ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ АБЕЛЕВЫХ И НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ. I[1]

В. И. Зенков

Пусть G — конечная группа, A — абелева подгруппа и B — нильпотентная подгруппа из G. В данной работе доказано, что в случае разрешимой группы G найдется элемент g из G такой, что $A\bigcap B^g \leq F(G)$, где $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. В случае, когда G неразрешима, доказывается, что контрпример минимального порядка к гипотезе, согласно которой $A\bigcap B^g \leq F(G)$ для некоторого элемента g из G, является почти простой группой.

Ключевые слова: конечная группа, абелева подгруппа, нильпотентная подгруппа, пересечение подгрупп, подгруппа Фиттинга.

V. I. Zenkov. On intersections of abelian and nilpotent subgroups in finite groups.

Let A be an abelian subgroup of a finite group G, and let B be a nilpotent subgroup of G. If G is solvable, then we prove that it contains an element g such that $A\bigcap B^g \leq F(G)$, where $F(G)$ is the Fitting subgroup of G. If G is not solvable, we prove that a counterexample of smallest order to the conjecture that $A\bigcap B^g \leq F(G)$ for some element g of G is an almost simple group.

Keywords: finite group, abelian subgroup, nilpotent subgroup, intersection of subgroups, Fitting subgroup.

Введение

Пусть G — конечная группа, A и B — подгруппы из G. Определим $M_G(A,B)$ как множество минимальных по включению пересечений вида $A\bigcap B^g$, где $g \in G$, а $m_G(A,B)$ как множество минимальных по порядку пересечений $A\bigcap B^g$, где $g \in G$. Из определения видно, что $M_G(A,B) \supseteq m_G(A,B)$. Если мы определим подгруппы $\mathrm{Min}_G(A,B) = \langle M_G(A,B)\rangle$ и $\min_G(A,B) = \langle m_G(A,B)\rangle$, то $\mathrm{Min}_G(A,B) \geq \min_G(A,B)$. В [1, теорема 1] было доказано, что в любой конечной группе G для любых ее абелевых подгрупп A и B подгруппа $\mathrm{Min}_G(A,B)$ содержится в подгруппе Фиттинга $F(G)$ группы G, а в [2, лемма 2.1] включение $\mathrm{Min}_G(A,B) \leq F(G)$ доказано для любой циклической подгруппы A и любой нильпотентной подгруппы B из G. Эти результаты приводят к следующей гипотезе.

Гипотеза. *Пусть G — конечная группа, A — абелева подгруппа, а B — нильпотентная подгруппа из G. Тогда $A\bigcap B^g \leq F(G)$ для некоторого элемента g из G.*

В настоящей части работы доказаны две теоремы (в разд. 1 и 3).

Теорема 1. *Пусть G — разрешимая конечная группа, A абелева, а B — нильпотентная подгруппа из G. Тогда $A\bigcap B^g \leq F(G)$ для некоторого элемента g из G.*

Теорема 2. *Если G — контрпример минимального порядка к гипотезе, то G — почти простая группа.*

В разд. 2 приведен ряд примеров, показывающих существенность условий теоремы 1.

Вторая часть работы будет посвящена подтверждению гипотезы для почти простых групп.

Применяемые нами обозначения взяты в основном из [3; 4].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда РНФ, проект 15-11-10025 (теорема 1), а также РФФИ, проект 13-01-00469, Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект 15-16-1-5, и в рамках проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теорема 2).

1. Доказательство теоремы 1

Пусть G, A и B удовлетворяют условиям теоремы 1. Если $G = F(G)$, то теорема 1 доказана. Если $G \neq F(G)$, то, так как группа G разрешима, подгруппа Фиттинга $F(G)$ группы G неединична. Заметим, что в силу $F(G) \neq 1$ и теоремы Бернсайда — Виландта [3, теорема 17.14] $O_p(F(G)) \neq 1$ для некоторого простого числа p. Поэтому далее по индукции в факторгруппе $\overline{G} = G/O_p(G)$ имеем $\overline{A} \bigcap \overline{B}^{\overline{g}} \leq F(\overline{G})$ для некоторого $g \in G$. Но $O_p(F(G)) = O_p(G)$. Поэтому $(p, |F(\overline{G})|) = 1$. Пусть R — полный прообраз подгруппы $F(\overline{G})$ в G. Заметим, что $R = O_p(G) \leftthreetimes H$, где H — нильпотентная p'-подгруппа.

Если $R = G$, то в силу отмеченной p-замкнутости группы R имеем $O_p(A) \leq O_p(G)$ и $O_p(B) \leq O_p(G)$. Таким образом, $O_p(A) \leq F(G)$ и $O_p(B) \leq F(G)$. Поэтому для доказательства теоремы 1 в случае $R = G$ достаточно доказать ее для случая $A = O_{p'}(A)$ и $B = O_{p'}(B)$. Но тогда, опять же в силу p-замкнутости R, получаем, что H — p'-холлова подгруппа из R. Следовательно, по теореме Холла — Чунихина [3, теорема 20.1.1] без ограничения общности можно считать, что $A \leq H$ и $B \leq H$. Рассмотрим подгруппу $G_1 = O_p(G)A$ с абелевой p'-холловой подгруппой A. Тогда подгруппа $B_1 = G_1 \bigcap B$ также абелева и без ограничения общности лежит в A. Согласно [1, теорема 1] $A \bigcap A^{g_1} \leq F(G_1)$ для некоторого элемента g_1 из G_1. Но $G_1 = O_p(G)A$. Поэтому $g_1 = ab$, где $b \in O_p(G)$. Следовательно, можно считать, что $g_1 = b \in O_p(G)$. Так как A — p'-подгруппа, то $A \bigcap A^{g_1}$ — p'-подгруппа из $F(G_1)$, поэтому $[O_p(G), A \bigcap A^{g_1}] = 1$. Но $C_R(O_p(G)) \leq O_{p',p}(R)$ в силу p-скованности R [4, предложение 1.27]. В частности, в нашем случае $A \bigcap A^{g_1} \leq O_{p'}(R) \leq F(R)$ в силу нильпотентности подгруппы H. Поэтому $A \bigcap B^{g_1} \leq F(R) = F(G)$, и в этом случае теорема 1 доказана.

Если $G \neq R$, то по индукции $\overline{A} \bigcap \overline{B}^{\overline{g}} \leq F(\overline{G})$, откуда $A \bigcap B^{gx} \leq R$ для любого элемента x из $O_p(G)$. Следовательно, $(A \bigcap B^{gx}) \bigcap R \leq R \bigcap R = R$, откуда $(A \bigcap R) \bigcap (B^{gx} \bigcap R) \leq R$ для любого элемента x из $O_p(G)$. Положим $A_1 = A \bigcap R$ и $B_1 = B^g \bigcap R$. Тогда A_1 и B_1 — подгруппы из R и для них ввиду доказанного в предыдущем абзаце найдется такой элемент b из $O_p(G)$, что $A_1 \bigcap B_1^b \leq F(R) \leq F(G)$ в силу характеристичности подгруппы R в группе G. Но тогда $A \bigcap B^{gb} \leq R$, поэтому $A \bigcap B^{gb} \bigcap R \leq R$. Отсюда $A \bigcap B^{gb} = A \bigcap B^{gb} \bigcap R = (A \bigcap R) \bigcap (B^{gb} \bigcap R) = A_1 \bigcap (B^g \bigcap R)^b = A_1 \bigcap B_1^b \leq F(G)$.

Теорема 1 доказана.

2. Примеры

Пример группы $G = E_9 \leftthreetimes D_8$ с точным действием D_8 на E_9 показывает, что в теореме 1 условие абелевости подгруппы A существенно и его нельзя ослабить до условия нильпотентности.

Пример группы $G = A_5$ при $A \simeq E_4$ и $B \simeq D_{10}$ показывает, что в теореме 1 условие нильпотентности подгруппы B нельзя ослабить даже до сверхразрешимости.

Пример группы $G = S_4$ — симметрической группы степени четыре показывает, что при определенном выборе подгрупп A и B включение $M_G(A, B) \supseteq m_G(A, B)$ может быть строгим. Действительно, если $|B| = 4$, $B \not\leq O_2(G)$ и $B \leq A \in \operatorname{Syl}_2(G)$, то $M_G(A, B) = \{B, \langle z \rangle^f, \langle z \rangle^{f^2}\}$, а $m_G(A, B) = \{\langle z \rangle^f, \langle z \rangle^{f^2}\}$, где $\langle z \rangle = B \bigcap O_2(G)$, и f — элемент порядка три из G. В рассмотренном примере $\operatorname{Min}_G(A, B) = A$ и $\min_G(A, B) = O_2(G) < A$.

Приведенный пример группы $G = S_4$ показывает, что в общем случае, несмотря на то, что подгруппа A является минимальной неабелевой, а подгруппа B может быть даже циклической, подгруппа $\operatorname{Min}_G(A, B)$ не содержится в $F(G) = O_2(G)$, хотя $\min_G(A, B) \leq F(G)$. Возникает вопрос о справедливости неравенства $\min_G(A, B) \leq F(G)$ в случае нильпотентной подгруппы B. Оказывается, что включение $\min_G(A, B) \leq F(G)$ нарушается даже в случае, когда обе подгруппы A и B минимальные неабелевы. Например, это так в группе $G = E_9 \leftthreetimes D_8$ с точным действием D_8 на E_9 [5, теорема B(2a)]. Поэтому в общем случае включение $\min_G(A,B) \leq F(G)$ может быть справедливо, лишь когда одна из подгрупп A или B абелева. Как показывает пример группы $G = S_4$, включение $\min_G(A,B) \leq F(G)$ справедливо, а включение $\mathrm{Min}\,_G(A,B) \leq F(G)$ нарушается даже в случае, когда B — циклическая группа и $B \leq A \simeq D_8$. Однако в случае циклической подгруппы A для любой нильпотентной подгруппы B справедливо включение $\mathrm{Min}\,_G(A,B) \leq F(G)$ [6, лемма 2.1]. Остается вопрос о справедливости включения $\min_G(A,B) \leq F(G)$ в случае абелевой подгруппы A, которая, вообще говоря, не обязательно циклическая. Рассмотрим пример группы $G = Z_2 \times S_4$. В этой группе $Z(G) = Z_2$, $O_2(G) \simeq E_8$. Зафиксируем силовскую 2-подгруппу S из S_4. Тогда $T = Z(G) \times S$ — силовская 2-подгруппа в G и $Z(T) \simeq E_4$. Пусть x — элемент порядка 4 из S, а z — инволюция из $Z(G)$. Тогда xz — элемент порядка 4 такой, что $\langle (xz)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle = Z(S)$, и для инволюции i, для которой $S = \langle x, i \rangle$, имеем $(xz)^i = x^i z^i = x^{-1}z^{-1} = (xz)^{-1}$. Поэтому $\langle xz, i \rangle \simeq \langle x, i \rangle \simeq D_8$ и $\langle xz, i \rangle \bigcap \langle x, i \rangle = \langle i, x^2 \rangle \simeq E_4$. Следовательно, если взять подгруппу $A = \langle i, x^2 z \rangle \simeq E_4$ и $S_1 = \langle xz, i \rangle$, то $A \bigcap S_1 = \langle i \rangle \not\leq O_2(G)$ и $A \bigcap O_2(G) = \langle x^2 z \rangle$. Если положить $B = S_1 = \langle xz, i \rangle \simeq D_8$, то $S_1 \bigcap O_2(G) = \langle x^2, xzi \rangle \simeq E_4$. Таким образом, инволюция x^2 из S_1 лежит в $G' \simeq A_4$, а инволюции xzi и $x^3 zi$ из S_1 лежат в $O_2(G) \backslash G'$. В $O_2(G)$ семь инволюций, причем на трех инволюциях из $O_2(G) \bigcap G'$, порождающих центры подгрупп S_1, S_1^f и $S_1^{f^2}$, элемент f порядка три из G действует транзитивно, централизуя инволюцию z из $Z(G)$. Следовательно, элемент f действует транзитивно на трех инволюциях из $O_2(G)$, лежащих вне $Z(G)$ и вне G', а также на множестве неупорядоченных пар, составленных из таких инволюций, которых также три. Поэтому пара инволюций $\{xzi, x^3 zi\}$ из $S_1 \backslash G'$ не содержит третью инволюцию $x^2 z$ из $O_2(G) \backslash G'$. Но при сопряжении элементом f, а затем f^2 инволюция $x^2 z$ будет содержаться в парах инволюций из подгрупп S_1^f и $S_1^{f^2}$ соответственно. Так как $S_1 \bigcap S_1^f \leq O_2(G)$, то $A \bigcap S_1^f = \langle x^2 z \rangle = A \bigcap S_1^{f^2}$. Таким образом, $m_G(A,B) = \{\langle x^2 z \rangle, \langle i \rangle\} = M_G(A,B)$, причем одно минимальное пересечение $\langle x^2 z \rangle$ лежит в $F(G)$, а второе $\langle i \rangle$ не лежит в $F(G)$. Поэтому самое большее, на что можно надеяться в общем случае, так это существование такого элемента g из G, при котором $A \bigcap B^g \leq F(G)$.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть G — контрпример к гипотезе и его порядок при этом минимален. Выберем подгруппы A и B в группе G так, чтобы число $|A||B|$ было минимальным. По теореме 1 можно считать, что G — неразрешимая группа. Пусть $S(G)$ — разрешимый радикал группы G и $\overline{G} = G/S(G)$. Если $S(G) \neq 1$, то по индукции в факторгруппе $\overline{G}$ имеем $\overline{A} \bigcap \overline{B}^{\overline{g}} = \overline{1}$ для некоторого элемента g из G. Другими словами, $A \bigcap B^{gr} \leq S(G)$ для любого элемента r из $S(G)$. Пусть $A_1 = A \bigcap S(G)$ и $B_1 = B^g \bigcap S(G)$. По индукции $A_1 \bigcap B_1^{r_1} \leq F(S(G)) \leq F(G)$ для некоторого элемента r_1 из $S(G)$. Следовательно, $A \bigcap B^{gr_1} = A \bigcap B^{gr_1} \bigcap S(G) = (A \bigcap S(G)) \bigcap (B^{gr_1} \bigcap S(G)) = A_1 \bigcap (B^g \bigcap S(G))^{r_1} = A_1 \bigcap B_1^{r_1} \leq F(G)$; противоречие. Поэтому $S(G) = 1$ и, следовательно, $F^*(G) = K_1 \times \cdots \times K_n$, где $K_1, \ldots K_n$ — простые неабелевы группы и $n \geq 2$. Положим $Com(G) = \{K_1, \ldots K_n\}$.

Пусть $G_1 = F^*(G)A$. Если $G_1 \neq G$, то по индукции в подгруппе G_1 для подгрупп A и $B_1 = G_1 \bigcap B$ имеем $A \bigcap B_1^{g_1} = 1$ для некоторого элемента g_1 из G_1. Тогда $A \bigcap B^{g_1} = (A \bigcap B^{g_1}) \bigcap G_1 = A \bigcap (B \bigcap G_1)^{g_1} = A \bigcap B_1^{g_1} = 1$; противоречие. Поэтому $G_1 = G$.

Покажем, что A действует транзитивно на множестве $Com(G)$. Действительно, если для некоторой компоненты K из $Com(G)$ имеем $E_1(G) = \langle K^A \rangle \neq F^*(G)$, то пусть $E_2(G)$ — произведение компонент из $Com(G)$, не лежащих в $E_1(G)$. Тогда $F^*(G) = E_1(G) \times E_2(G)$ и A нормализует подгруппы $E_1(G)$ и $E_2(G)$. Поэтому подгруппы $E_1(G)$ и $E_2(G)$ нормальны в G и $G/C_G(E_1(G)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}\,(E_1(G))$ и $G/C_G(E_2(G)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}\,(E_2(G))$. Так как $C_G(E_1(G)) \bigcap C_G(E_2(G)) = C_G(F^*(G)) \leq F^*(G)$ [4, предложение 1.27] и является нормальной подгруппой в G, то $C_G(E_1(G)) \bigcap C_G(E_2(G)) = 1$. Следовательно, по теореме Ремака [3, теорема 4.3.9] группа G изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}\,(E_1(G)) \times \mathrm{Aut}\,(E_2(G))$. По индукции в подгруппах $\mathrm{Aut}\,(E_1(G))$ и $\mathrm{Aut}\,(E_2(G))$ для образов группы G выполняется заключение теоремы. Значит, оно выполняется и в G; противоречие.

Итак, A действует транзитивно на множестве $Com(G)$. Пусть A_1 — ядро действия (сопряжением) подгруппы A на множестве $Com(G)$. В силу абелевости подгруппы A и ее транзитивности на множестве $Com(G)$ имеем $A_1 = N_G(K_i)$ для $1 \le i \le n$ и, следовательно, $A \ne A_1$. Минимальность числа $|A||B|$ влечет, что A является прямым произведением своих элементарных абелевых подгрупп. Пусть A_2 — максимальная подгруппа в A, содержащая A_1, x — элемент некоторого простого порядка p из $A \setminus A_2$ и $m = |A_2 : A_1|$. Тогда $A = A_2 \times \langle x \rangle$ и $n = |A : A_2||A_2 : A_1| = mp$. Пусть E — множество всех A_2-орбит на $Com(G)$. Ввиду [6, Theorem 1.6A] E есть система импримитивности для A, и подгруппа $\langle x \rangle$ действует транзитивно на E. Можно считать, что $E = \{E_1, \ldots, E_p\}$ и $E_1 = \{K_i \mid 1 \le i \le m\}$. Тогда $\{K_i, K_i^x \ldots, K_i^{x^{p-1}}\}$ — $\langle x \rangle$-орбита на $Com(G)$, порождающая подгруппу $T_i = K_i \times K_i^x \times \cdots \times K_i^{x^{p-1}}$ $(1 \le i \le m)$. Поскольку $T_i\langle x \rangle \simeq K_i \wr \langle x \rangle$, $C_{T_i}(x) = D_i \simeq K_i$, где D_i — диагональ в T_i. Пусть $D = D_1 \times \cdots \times D_m$. Поскольку $F(G) = 1$, каждый неединичный элемент a_1 из A_1 действует нетривиально на D_i для $1 \le i \le m$, поэтому каждый неединичный элемент a_2 из A_2 действует нетривиально на D. Любой элемент a из $A \setminus A_2$ имеет вид $a = a_2 x^i$, где $a_2 \in A_2$ и $1 \le i \le p-1$. Но x централизует D и $[D, a_2] \ne 1$ при $a_2 \ne 1$, поэтому $C_A(D) = \langle x \rangle$.

Если $A = \langle x \rangle$, то по теореме Бэра — Судзуки [4, теорема 2.66] $\langle x \rangle \bigcap B^g = 1$ для некоторого $g \in G$ и, следовательно, G не является контрпримером к гипотезе. Поэтому $A \ne \langle x \rangle$. Тогда по минимальности числа $|A||B|$ имеем $\langle x \rangle \bigcap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. По индукции в подгруппе $G_1 = DA$ имеем $A \bigcap B_1^{g_1} \le F(G_1) = \langle x \rangle$ для $B_1 = G_1 \bigcap B^g$ и некоторого элемента g_1 из G_1. Тогда $A \bigcap B^{gg_1} \le G_1$, так как $A \le G_1$. Следовательно,

$$A \bigcap B^{gg_1} = A \bigcap B^{gg_1} \bigcap G_1 = A \bigcap (B^{gg_1} \bigcap G_1) = A \bigcap (B^g \bigcap G_1)^{g_1} = A \bigcap B_1^{g_1} \le \langle x \rangle.$$

Поэтому $A \bigcap B^{gg_1} \le A \bigcap B_1^{g_1} \bigcap \langle x \rangle = \langle x \rangle \bigcap B_1^{g_1} \bigcap \langle x \rangle = \langle x \rangle \bigcap (B_1 \bigcap \langle x \rangle)^{g_1} \le \langle x \rangle \bigcap (B^g \bigcap \langle x \rangle)^{g_1} = 1$; противоречие.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зенков В.И.** Пересечение абелевых подгрупп в конечных группах // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 1–2. С. 150–152.
2. **Jamali A., Viseh M.** On nilpotent subgroups containing non-trivial normal subgroups // J. Group Theory. 2010. Vol. 3, no. 3. P. 411–416.
3. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
4. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.
5. **Зенков В.И.** Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фундаментал. и прикл. математика. 1996. Т. 2, вып. 1. С. 1–92.
6. **Dixon J.D., Mortimer B.** Permutation groups. New York.: Springer-Verlaq, 1996. 346 c.

Зенков Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
профессор
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: v1i9z52@mail.ru

Поступила 21.06.2015