

УДК 519.62

ДВИЖЕНИЕ НАБЛЮДАТЕЛЯ ПО КОНУСУ В \mathbb{R}^3 В УСЛОВИЯХ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ СО СТОРОНЫ ОБЪЕКТА

В. И. Бердышев

В работе предлагается алгоритм движения наблюдателя по поверхности заданного конуса с целью отслеживания движения объекта, обладающего набором мини-объектов, угрожающих наблюдателю.

Ключевые слова: навигация, оптимальная траектория, движущийся объект, наблюдатель.

V. I. Berdyshev. The motion of an observer over a cone in \mathbb{R}^3 under counteraction from an object.

An algorithm is proposed for the motion of an observer over the surface of a given cone with the aim of tracking the motion of an object possessing a collection of miniobjects threatening the observer.

Keywords: navigation, optimal trajectory, moving object, observer.

MSC: 00A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-49-54

Введение

В пространстве \mathbb{R}^3 задана гладкая спрямляемая кривая \mathcal{T} . По \mathcal{T} с постоянной по величине скоростью v_t движется объект t с мини-объектами m на борту, способными после запуска двигаться с большой постоянной по величине скоростью v_m . Мишенью для мини-объектов является наблюдатель. Слежение за объектом t осуществляется с поверхности телесного вертикального конуса S высоты h с вершиной s и круговым основанием радиуса a с центром A , расположенным в горизонтальной плоскости Q , которая изображает поверхность Земли. Ось $[s, A]$ конуса ортогональна плоскости Q . Наблюдатель является шаром $V_\varepsilon(f)$ малого радиуса ε , $0 < \varepsilon < a$, с локатором f в центре, способным работать в двух режимах: формирование диаграмм направленности как острого, так и плоского лучей. Скорость v_f движения наблюдателя ограничена

$$0 < |v_f| < K \ll |v_m|,$$

где K — константа. Попадание мини-объекта в шар $V_\varepsilon(f)$ означает гибель наблюдателя. Наблюдатель может двигаться по меридианам L (образующим) конуса и его параллелям C .

Объект t , обнаружив наблюдателя, запускает в его сторону мини-объект. Наблюдатель, двигаясь от вершины s конуса “вниз”, следит за объектом и за счет выбора траектории \mathcal{T}_f и скорости движения v_f по ней должен за время движения мини-объекта уйти в тень, избегая встречи с ним. Следует отметить, что преимущество отдается траектории \mathcal{T}_f , содержащей высокие участки. Положение конуса S выбирается так, чтобы с него была видна большая часть траектории объекта, которую будем обозначать через $\mathcal{T} = \widehat{t_0, t^0}$. Предполагается, что любая плоскость, содержащая ось $[s, A]$ конуса S , пересекается с \mathcal{T} не более чем в единственной точке.

1. Вспомогательные предложения

Пусть \tilde{S} — граница ε -расширения конуса S . Движение наблюдателя $V_\varepsilon(f)$ осуществляется так, что $f \in \tilde{S}$, и, следовательно, точка $q(f) \stackrel{\text{def}}{=} V_\varepsilon(f) \cap S$ (она в пересечении единственная) движется по поверхности ∂S конуса.

Пусть $t = t_0 \in \mathcal{T}$, T — проекция точки t на плоскость Q , прямая $\overline{s, t}$ пересекает Q , $B = \overline{s, t} \cap Q$, α — угол между $[B, s]$ и Q , $R(t)$ — плоскость, содержащая точки s, A, t ; $c = T + \lambda(A - T)$, где $\lambda > 0$, $\|c - A\| = a$. Определим теневое множество \mathcal{M} — множество точек из \mathbb{R}^3 , невидимых из точки t . Двугранный угол с ребром $\overline{s, t}$ минимального раствора, содержащий конус S , своими гранями пересекается с границей ∂S по двум меридианам, обозначим их через $[s, D] = L(D)$, $[s, D'] = L(D')$, сам угол — через X , а его раствор — через 2γ . Нетрудно видеть, что отрезок $[D, D']$ разделяет точки B и A , а углы $\angle BDs$, $\angle BD's$ прямые. Возможны следующие случаи:

- а) $\|t - T\| > h$, б) $\|t - T\| \leq h$.

Меридианы $L(D)$, $L(D')$ разграничивают видимые и затененные с позиции $t = t_0$ участки на границе ∂S .

В случае а) затененный участок пространства, обозначаемый через \mathcal{M} , представляет собой тетраэдр с плоскими треугольными гранями $\overline{BDD'}$, \overline{BDs} , $\overline{BD's}$ и конической гранью $\overline{sDD'} \subset \partial S$ (см. рис. 1).

Для построения траектории движения наблюдателя от вершины s “вниз” важно знать, на каком расстоянии от вершины s расположена точка f , для которой наблюдатель $V_\varepsilon(f)$ укрыт внутри множества \mathcal{M} . Множество \mathcal{M} симметрично относительно плоскости $R(t)$. Поэтому искомая точка $f = f^* \in \mathcal{M}$ удовлетворяет условиям

$$f^* \in R(t), \quad \rho(f^*, \overline{BDs}) = \rho(f^*, \overline{BD's}) = \rho(f^*, [s, c]) = \varepsilon.$$

Пусть $q^* = q(f^*) \in [s, c]$ — точка, для которой $\|f^* - q^*\| = \varepsilon$. Обозначим $\rho^* = \|s - q^*\|$ и $C^* = C(q^*)$ — параллель, содержащая точку q^* . Для определения местоположения точки f^* впишем шар $V_\varepsilon(f)$ в двугранный угол. Центр f этого шара удален от ребра $\overline{s, t}$ на расстояние $\varepsilon / \sin \gamma$. Точка f^* является точкой пересечения прямых: одна из них содержит точку f и параллельна ребру $\overline{s, t}$, другая также лежит в плоскости $R(t)$, параллельна образующей $[s, c]$ и удалена от нее на расстояние ε . Имеем $q^* = V_\varepsilon(f^*) \cap \partial S$, пусть g — точка пересечения первой прямой

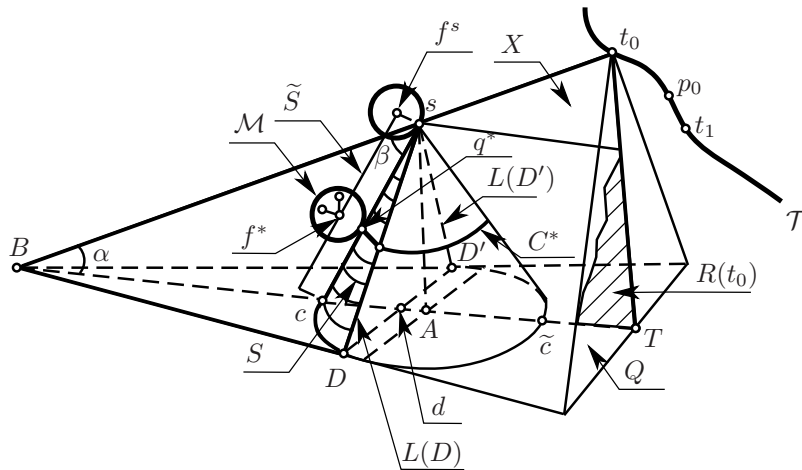


Рис. 1. На рисунке изображены конус S с высотой $[s, A]$ и меридианами $L(D)$, $L(D')$, ограничивающими невидимую из точки t часть границы ∂S ; отрезок $[B, t]$ принадлежит ребру двугранного угла X , опорного для S ; шар $V_\varepsilon(f^*)$ радиуса ε с центром f^* , касающийся конуса в точке q^* .

с отрезком $[s, q^*]$, $d = (D + D')/2$, β — угол между векторами $c - s$, $B - s$, точка $s' \in [B, s]$ такова, что отрезки $[B, s]$ и $[d, s']$ ортогональны, тогда

$$\|s - q^*\| = \|s - g\| + \|g - q^*\| = \frac{\varepsilon}{\sin \gamma \sin \beta} + \varepsilon \operatorname{tg} \beta.$$

Далее, $l = \sqrt{h^2 + a^2}$ — длина меридиана конуса S , кроме того,

$$\frac{\|s' - d\|}{\|D' - d\|} = \operatorname{ctg} \gamma, \quad \frac{\|s' - d\|}{\|B - d\|} = \sin \alpha, \quad \frac{\|B - d\|}{\|D' - d\|} = \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\sin \alpha},$$

$$\frac{\|B - d\|}{\|D - d\|} = \frac{\|B - D\|}{\|A - D\|} = \frac{\|B - D\|}{a}, \quad \frac{\|B - D\|}{a} = \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\sin \alpha},$$

и поскольку $\|B - D\|^2 = \|B - s\|^2 - l^2$, то

$$\sqrt{\left(\frac{h}{\sin \alpha}\right)^2 - l^2} = a \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\sin \alpha}.$$

Итак, искомая точка $f = f^*$ является ближайшей к s , она равноудалена от граней \overline{BDs} , $\overline{BD's}$, $\overline{sDD'}$ на расстояние ε . При этом

$$q^* \stackrel{\text{def}}{=} (V_\varepsilon(f^*) \cap \partial S) \in L(c).$$

Имеет место

Лемма 1. Пусть $\rho(t, Q) > h$. Шар $V_\varepsilon(f^*) \subset \mathcal{M}$, ближайший к вершине s , является единственным, он удовлетворяет условию

$$\|s - q^*\| = \varepsilon \left(\frac{1}{\sin \gamma \cdot \sin \beta} + \operatorname{tg} \beta \right),$$

при этом угол γ определяется из соотношения

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{1}{a} \sin \alpha \sqrt{\left(\frac{h}{\sin \alpha}\right)^2 - (h^2 + a^2)} = \frac{1}{a} \sin \alpha \sqrt{(B - A)^2 - a^2}.$$

Любой шар $V_\varepsilon(f)$, касающийся конуса S и удовлетворяющий неравенству

$$\|s - q^*\| \leq \|s - q(f)\| \leq \sqrt{h^2 + a^2}, \quad (1)$$

где

$$q(f) = (V_\varepsilon(f) \cap S) \in L(q(f)),$$

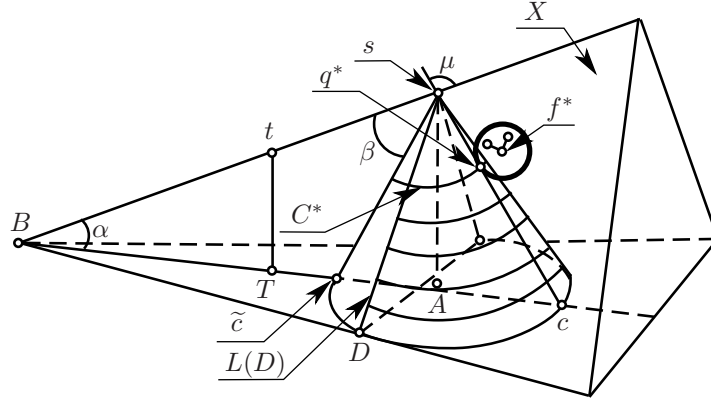
может переместиться внутрь множества \mathcal{M} с меридиана $L(q(f))$ на меридиан $L(c)$ так, что в каждый момент перемещения τ выполняется условие $q(f_\tau) \in C(q(f))$.

В случае б) множество \mathcal{M} точек, невидимых с позиции $t \in \mathcal{T}$ при $\rho(t, Q) < h$, является усеченной пирамидой (см. рис. 2):

$$\mathcal{M} = \{B + \lambda S : \lambda \geq 0\} \setminus \operatorname{conv} \{B \cup S\},$$

коническая часть границы которой расположена между меридианами $L(D)$, $L(D')$ (см. рис. 2), а боковая часть состоит из трех неограниченных трапеций, две из которых, боковые, имеют прямолинейные границы

$$B + \lambda[s, D], \quad B + \lambda[s, D'] \quad (\lambda \geq 1),$$

Рис. 2. Рисунок соответствует случаю $\rho(t, Q) \leq h$.

а третья имеет вид $B + \lambda \cdot (\widehat{D, D'})$, где $\widehat{D, D'}$ — дуга окружности в основании конуса S , содержащая точку c ; здесь $\text{conv}\{\cdot\}$ — выпуклая оболочка множества $\{\cdot\}$. Шар $V_\varepsilon(f^*) \subset \mathcal{M}$, ближайший к вершине s , как в случае а), касается боковых граней множества \mathcal{M} и меридиана $[s, c]$ в точке q^* соответственно, и, значит, расстояние до них от точки f^* равно ε . Точка f^* является точкой пересечения прямой на плоскости $R(t)$, параллельной ребру \overline{st} и расположенной от него на расстоянии $\varepsilon/\sin \gamma$, с параллельной отрезку $[s, c]$ прямой, расположенной на расстоянии ε от него. Пусть μ — величина угла между векторами $s - c$ и $s - t$, тогда по теореме косинусов

$$\|s - f^*\|^2 = \varepsilon^2 \left[\left(\frac{1}{\sin \mu} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sin \gamma \cdot \sin \mu} \right)^2 - 2 \left(\frac{\cos \mu}{\sin \gamma \cdot \sin^2 \mu} \right) \right]. \quad (2)$$

и

$$\|s - q^*\|^2 = \|s - f^*\|^2 - \varepsilon^2,$$

где $\mu = \beta + 2\xi$, ξ — угол между меридианом и осью конуса S .

Справедлива

Лемма 2. Пусть $\rho(t, Q) \leq h$. Любой шар $V_\varepsilon(f^*)$, касающийся конуса S в точке $q = q(f^*)$, удовлетворяющий условию (1), где $\|s - q(f^*)\|$ имеет вид (2), может перейти по параллели $C(q(f^*))$ внутрь множества \mathcal{M} так, что в каждый момент времени τ выполняется включение $q(f_\tau) \in C(q(f^*))$.

2. Алгоритм построения траектории наблюдателя

Будем считать, что на начальном этапе расстояние $\|s - t_0\|$ велико настолько, что за время τ , $\tau < \|s - t_0\|/v_m$, наблюдатель успевает из окрестности точки s перейти внутрь теневого множества $\mathcal{M}(t_0)$. Точку касания шара $V_\varepsilon(f)$, $f \neq s$, с поверхностью ∂S обозначаем через $q = q(f)$, а меридиан, который содержит точку f , — через $L(f)$. Процесс наблюдения за объектом осуществляется по шагам.

Шаг 1. Участники t , m , f начинают движение одновременно: объект t , определив положение наблюдателя f , и мини-объект m_0 — с позиции t_0 ; наблюдатель f , определив направление вектора v_{t_0} и вычислив расстояние ρ^* , — по одному из меридианов $L = L(D)$ или $L(D')$ из положения, при котором $q(f) = s$. Выбор меридиана определяется положением вектора скорости v_{t_0} объекта: он лежит в том полупространстве, образованном плоскостью $R(t_0)$, в котором содержится вектор v_{t_0} . Если $v_{t_0} \in R(t_0)$, то можно взять любой из них. Мини-объект нацелен на наблюдателя,двигающегося по видимой из точки t_0 части поверхности ∂S , которая заключена между меридианами $L(D)$, $L(D')$ и содержит точку \tilde{c} .

При движении шара $V_\varepsilon(f)$ “вниз” точка касания $q(f)$ скользит по L от s до точки $q^* \in C^*$ $\stackrel{\text{def}}{=} C(q(f^*))$ и при дефиците времени далее по параллели $C(q)$ до меридиана $L(c)$ с тем, чтобы шар $V_\varepsilon(f)$ скрылся от мини-объекта, и затем, выключив локатор, — в обратный путь вверх по $L(c)$ до точки s . После укрытия шара $V_\varepsilon(f)$ в множестве \mathcal{M} мини-объект сходит с дистанции. При движении по L наблюдатель имеет возможность следить за двигающимся по \mathcal{T}_t объектом в окрестности точки t_0 . В самом деле, с любой позиции $g \in L$ точка t_0 видна, а если $g = g(f)$, то отрезок $[f, g]$ ортогонален грани двугранного угла X и $\|f - g\| = \varepsilon$. Поэтому существует плоскость, содержащая точку f и строго разделяющая конус и точку t_0 . Отметим, что кругозор наблюдателя увеличится, если он будет двигаться по близкому к L меридиану, сдвинутому по видимой части границы ∂S в сторону точки t_0 . Пусть $\widehat{t_0, p_0}$ — дуга, передвижение объекта по которой наблюдателю удалось отследить. При большом значении величины $\rho(t_0, S)$ наблюдатель имеет резерв времени, который позволяет на прямом пути от s до \mathcal{M} двигаться с малой скоростью, увеличивая длину отслеживаемой дуги $\widehat{t_0, p_0}$, тратить меньше времени на обратный путь, двигаясь с максимальной скоростью K . Находясь в конце обратного пути в точке s , наблюдатель, организовав поиск посредством плоской диаграммы направленности, отыскивает позицию объекта $t = t_1 \in \mathcal{T}_t$, демаскируя себя. Он вращает плоскость $R(t)$ ($t \in \mathcal{T}$) настолько быстро, что выполняется неравенство $|\widehat{t_0, p_0}| > |\widehat{p_0, t_1}|$.

Далее наблюдатель приступает к выполнению шага 2 и т.д. Если с увеличением количества шагов расстояние $\|s - t_i\|$ уменьшается, то уменьшается и участок прямого пути, с которого наблюдатель следит за движением объекта по траектории \mathcal{T}_t . Наблюдатель решает, с какого номера $i = n$ выгоднее прекратить наблюдение и возобновить его, когда величина $|s - t_i|$ станет достаточно большой. Справедлива

Теорема. Предложенный способ движения наблюдателя по конусу S позволяет построить на траектории \mathcal{T} сетку узлов

$$t_0, p_0, t_1, p_1, t_2, p_2 \dots t_{n-1}, p_{n-1}, t_n; t'_n, t''_n; t_{n+1}, p_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+k}; t'_{n+k}, t''_{n+k}; \dots$$

такую, что для каждого i дугу $\widehat{t_i, p_i}$ объект t преодолевает под наблюдением, а дуги $\widehat{p_i, t_{i+1}}$, $\widehat{t'_i, t''_i}$ — вне зоны наблюдения, при этом

$$|\widehat{t_i, p_i}| > |\widehat{p_i, t_{i+1}}|.$$

Автор выражает благодарность В. Б. Костоусову за обсуждение темы исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Berdyshev V.I.** An observer moving along a cone in \mathbb{R}^3 under conditions of object's opposition // Doklady Mathematics. 2023. P. 1–5. doi: 10.1134/S1064562423700989
2. **Лю В.** Методы планирования пути в среде с препятствиями (обзор) // Математика и мат. моделирование. 2018. № 1. С. 15–58. doi: 10.24108/mathm.0118.0000098

Поступила 21.08.2023

После доработки 21.08.2023

Принята к публикации 28.08.2023

Бердышев Виталий Иванович

академик РАН

научный руководитель

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

e-mail: bvi@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Berdyshev V.I. An observer moving along a cone in \mathbb{R}^3 under conditions of object's opposition. *Doklady Mathematics*, 2023, pp. 1–5. doi: 10.1134/S1064562423700989
2. Lyu V. Metody planirovaniya puti v srede s prepyatstviyami (obzor). *Matematika i Mat. Modelirovanie*, 2018, vol. 1, pp. 15–58 (in Russian). doi: 10.24108/mathm.0118.0000098

Received August 21, 2023

Revised August 21, 2023

Accepted August 28, 2023

Vitalii Ivanovich Berdyshev, RAS Academician, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: bvi@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. I. Berdyshev. The motion of an observer over a cone in \mathbb{R}^3 under counteraction from an object. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 49–54.