

УДК 517.977.5

## О ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОРИЕНТАЦИЕЙ ТЕЛА

Д. А. Новиков

Во многих прикладных задачах управления движением твердого тела в атмосфере под действием гравитационных и реактивных сил возникают различные задачи управления его пространственной ориентацией. Здесь исследуется одна из таких задач управления в предельно упрощенной постановке. Рассматривается вращательное движение стержня на плоскости вокруг его центра масс под действием постоянной по модулю силы, приложенной к одному из концов стержня. В качестве управляющего параметра используется скорость изменения угла между стержнем и вектором, задающим направление указанной силы. На управление и текущее фазовое состояние линейной динамической системы, описывающей движение стержня, накладываются ограничения. Искомое управление должно удовлетворять ограничениям и обеспечивать перевод системы из ее начального состояния в некоторое заданное конечное состояние за минимальное время с выполнением фазовых ограничений. Устанавливается структура оптимального управления в этой задаче быстрогодействия при наличии фазовых ограничений. Обсуждаются вопросы его существования и единственности. Полученные результаты иллюстрируются примерами численного решения ряда модельных задач.

Ключевые слова: линейная динамическая система, фазовые ограничения, задача быстрогодействия, оптимальное управление.

**D. A. Novikov. On the simplest time-optimal problem with phase constraints in the control of the spatial orientation of a body.**

Various problems of control of the spatial orientation of a rigid body arise in many applied problems of control of this body in the atmosphere under gravitational and reactive forces. Here, one of such control problems is investigated in an extremely simplified statement. The rotational motion of a rod around its mass center on a plane under the action of a force which is constant in absolute value and applied to one of the ends of the rod is considered. The rate of change of the angle between the rod and the vector that specifies the direction of the force is used as a control parameter. There are constraints on the control and the current phase state of the linear dynamic system describing the rod motion. The desired control must satisfy the constraints and take the system from its initial state to a given terminal state in the minimum time provided the phase constraints are fulfilled. The structure of the optimal control is designed in the time-optimal problem in the presence of phase constraints. The questions of existence and uniqueness of a solution of this optimal control problem are discussed. The obtained results are illustrated by examples of numerical solution of several model problems.

Keywords: linear dynamic system, phase constraints, time-optimal problem, optimal control.

MSC: 49J15, 93C95

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-3-62-72

### Введение

Во многих прикладных задачах управления движением твердого тела приходится решать вопросы, связанные с обеспечением телу требуемой пространственной ориентации. Как известно [1; 2], пространственная ориентация тела может быть описана с помощью трех углов — тангажа, рыскания и крена, а его вращательное движение — посредством динамических и кинематических уравнений Эйлера. Линеаризация этих уравнений приводит к независимым простейшим системам линейных дифференциальных уравнений, каждая из которых описывает динамику соответствующего угла. Этот подход позволяет в начальном приближении строить управление вращательным движением тела по каждому углу независимо друг от друга. В работе рассматривается задача быстрогодействия как один из способов управления простейшей системой при наличии фазового ограничения.

### 1. Содержательная постановка задачи

Пусть твердое тело представляет собой стержень. Рассмотрим вращательное движение стержня на плоскости вокруг его центра масс  $C$  под действием постоянной по модулю силы  $\mathbf{P}$ , приложенной к концу  $A$  стержня (см. рис. 1). Направление силы  $\mathbf{P}$  образует с осью стержня угол  $\delta$ , а пространственная ориентация стержня на плоскости в заданной прямоугольной системе координат определяется углом  $\vartheta$  между продольной осью стержня и вертикалью.

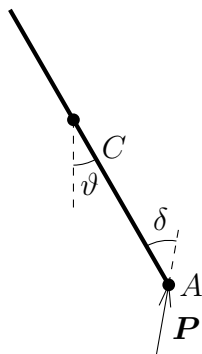


Рис. 1. Пространственная ориентация стержня с центром масс в точке  $C$ , подверженного воздействию постоянной по модулю силы  $\mathbf{P}$ .

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее вращательное движение стержня на некотором фиксированном промежутке времени  $[t_s, t_f]$ , имеет вид

$$J \ddot{\vartheta} = p l \delta, \tag{1.1}$$

где  $J$  — момент инерции стержня,  $p$  — модуль силы  $\mathbf{P}$ ,  $l$  — расстояние от центра масс стержня до точки приложения силы  $\mathbf{P}$  (заданные константы).

Рассмотрим задачу управления вращательным движением стержня, в которой в качестве управляющего параметра  $u$  будем использовать скорость  $\dot{\delta}$  изменения значения угла  $\delta$ . При этом будем считать, что значения  $\delta$  и  $u$  на промежутке времени  $[t_s, t_f]$  должны удовлетворять ограничениям

$$|\delta(t)| \leq \delta^{\max} \quad t \in [t_s, t_f], \tag{1.2}$$

$$|u(t)| \leq u^{\max} \quad t \in [t_s, t_f]. \tag{1.3}$$

Искомое управление  $u^*$  должно удовлетворять ограничению (1.3) и обеспечивать перевод динамической системы (1.1) из ее начального состояния в момент времени  $t_s$  в заданное в конечный момент времени  $t_f$  состояние за минимальное время с выполнением ограничения (1.2) на текущее фазовое состояние системы.

### 2. Постановка задачи быстродействия

Введем переменные  $x_1 = \vartheta$ ,  $x_2 = \dot{\vartheta}$ ,  $x_3 = \frac{pl}{J} \delta$ , в терминах которых динамическая система (1.1) принимает вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = kx_3, \quad \dot{x}_3 = u, \quad t \in [t_s, t_f], \tag{2.1}$$

где константа  $k = \frac{pl}{J} > 0$ . Ограничения (1.2) и (1.3) перепишем следующим образом:

$$|x_3(t)| \leq \bar{\delta}^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f], \tag{2.2}$$

$$|u(t)| \leq \bar{u}^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f]. \quad (2.3)$$

Здесь  $\bar{\delta}^{\max} = k \cdot \delta^{\max}$ ,  $\bar{u}^{\max} = u^{\max}$ .

Систему (2.1) удобно представить в матричной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{u}, \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ ;  $\mathbf{u} = (0, 0, u)^\top \in \mathbb{R}^3$  — векторы фазового состояния и управления соответственно;  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . В матричной форме ограничения (2.3) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{u}(t) \in U \quad t \in [t_s, t_f], \quad (2.5)$$

где  $U = \{\mathbf{u} = (0, 0, u)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid u \in [-\bar{u}^{\max}, \bar{u}^{\max}]\}$ .

Для системы (2.4) зададим начальные

$$\mathbf{x}(t_s) = \mathbf{x}^{(s)} \quad (2.6)$$

и конечные

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^{(f)} \quad (2.7)$$

условия; здесь  $\mathbf{x}^{(s)} = (a_1, a_2, a_3)^\top$ ,  $\mathbf{x}^{(f)} = (b_1, b_2, b_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ ,  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Тогда рассматриваемая задача управления может быть сформулирована как следующая задача быстрогодействия для системы (2.4) (2.1).

**З а д а ч а 1** (Основная задача). Для управляемой системы (2.4) с заданными начальными (2.6) и конечными условиями (2.7) требуется найти программное управление  $u^*$  (кусочно-непрерывную на некотором промежутке времени  $[t_s, t_f^*]$  функцию), которое удовлетворяет условию (2.5), обеспечивает выполнение фазового ограничения (2.2) и доставляет минимальное значение функционалу

$$J(\cdot) = \int_{t_s}^{t_f} dt \rightarrow \min. \quad (2.8)$$

Наряду с основной задачей 1 рассмотрим вспомогательную задачу быстрогодействия, в которой фазовое ограничение (2.2) не учитывается. Эта задача формализуется следующим образом.

**З а д а ч а 2** (Вспомогательная задача). Для управляемой системы (2.4) с заданными начальными (2.6) и конечными условиями (2.7) требуется найти программное управление  $u^*$  (кусочно-непрерывную на некотором промежутке времени  $[t_s, t_f^*]$  функцию), которое удовлетворяет условию (2.5) и доставляет минимальное значение функционалу (2.8).

Управления в основной и вспомогательной задачах, удовлетворяющие всем условиям, кроме условия оптимальности, будем называть допустимыми.

### 3. Решение вспомогательной задачи быстрогодействия

Рассмотрим вопросы существования оптимального управления во вспомогательной задаче 2 и его построения.

### 3.1. Существование решения

Рассмотрим вопрос существования решения задачи 2. Согласно теореме существования оптимального управления [3, разд. 9, с. 122] вопрос существования решения задачи 2 сводится к установлению условий, при которых система (2.4) является управляемой из точки  $\mathbf{x}^{(s)}$  в точку  $\mathbf{x}^{(f)}$  на некотором произвольном отрезке времени  $[t_s, t_f]$ .

Рассмотрим в задаче 2 функцию управляемости [3, разд. 8, с.105]

$$\varphi(\boldsymbol{\psi}) = \langle \mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{x}^{(f)}, \boldsymbol{\psi} \rangle + \langle \mathbf{r}(\mathbf{x}^{(s)}, T), \boldsymbol{\psi} \rangle + \bar{u}^{\max} \int_0^T |\phi(s, \boldsymbol{\psi})| ds, \quad (3.1)$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — операция скалярного произведения двух векторов,  $T = t_f - t_s$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(s)}, T) = (a_2 T + \frac{k}{2} a_3 T^2, k a_3 T, 0)^\top,$$

а скалярная функция  $\phi$  аргумента  $s$  определяется выражением  $\phi(s, \boldsymbol{\psi}) = \frac{k}{2} \psi_1 s^2 + k \psi_2 s + \psi_3$ . Поскольку в рассматриваемой задаче множества  $M_0$  и  $M_1$  являются выпуклыми (как одноэлементные), то система (2.4) является управляемой из точки  $\mathbf{x}^{(s)}$  в точку  $\mathbf{x}^{(f)}$  на некотором отрезке времени  $[t_s, t_s + T]$  тогда и только тогда, когда функция управляемости (3.1) удовлетворяет условию

$$\varphi(\boldsymbol{\psi}) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in S(0, 1), \quad (3.2)$$

где  $S(0, 1)$  — единичная сфера с центром в начале координат.

Покажем выполнение условия (3.2), для этого воспользуемся известными оценками:

$$-\|\mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\| \leq \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \leq \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\| \quad \forall \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\int_0^T |f(s, \boldsymbol{\psi})| ds \geq \left| \int_0^T f(s, \boldsymbol{\psi}) ds \right| \geq \min_{\boldsymbol{\psi} \in S(0,1)} \left| \int_0^T f(s, \boldsymbol{\psi}) ds \right| \quad \forall f \in I([0, T]),$$

где  $I([0, T])$  — пространство интегрируемых на отрезке  $[0, T]$  функций. Откуда

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{\psi}) &\geq -\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{x}^{(f)}\| \|\boldsymbol{\psi}\| - \|\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(s)}, T)\| \|\boldsymbol{\psi}\| + \bar{u}^{\max} \min_{\boldsymbol{\psi} \in S(0,1)} \left| \int_0^T \phi(s, \boldsymbol{\psi}) ds \right| \\ &= -\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{x}^{(f)}\| - \|\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(s)}, T)\| + \bar{u}^{\max} \min_{\boldsymbol{\psi} \in S(0,1)} \left| \int_0^T \phi(s, \boldsymbol{\psi}) ds \right|. \end{aligned}$$

В результате условие (3.2) запишем в виде

$$\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{x}^{(f)}\| \leq \bar{u}^{\max} \min_{\boldsymbol{\psi} \in S(0,1)} \left| \int_0^T \phi(s, k, \boldsymbol{\psi}) ds \right| - \|\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(s)}, T)\| \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in S(0, 1); \quad (3.3)$$

здесь

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(s)}, T)\| &= \sqrt{(a_2 T + \frac{k}{2} a_3 T^2)^2 + k^2 a_3^2 T^2}, \\ \min_{\boldsymbol{\psi} \in S(0,1)} \left| \int_0^T \phi(s, k, \boldsymbol{\psi}^*) ds \right| &= \sqrt{\min_{\boldsymbol{\psi} \in S(0,1)} \left( \int_0^T \phi(s, \boldsymbol{\psi}) ds \right)^2} = \sqrt{T^2 \left( 1 + \frac{1}{4} k^2 T^2 + \frac{1}{36} k^2 T^4 \right)}. \end{aligned}$$

Покажем, что всегда найдется такой  $T > 0$ , что условие (3.3) выполнится. Неравенство (3.3) можно рассмотреть в виде

$$\|\mathbf{x}^{(s)} - \mathbf{x}^{(f)}\| \leq \bar{u}^{\max} T \sqrt{1 + \frac{1}{4}k^2 T^2 + \frac{1}{36}k^2 T^4} - \sqrt{(a_2 T + \frac{k}{2}a_3 T^2)^2 + k^2 a_3^2 T^2}. \quad (3.4)$$

и докажем, что правая часть (3.4) неограниченно возрастает при  $T \rightarrow +\infty$ . Действительно,

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow +\infty} \left( \bar{u}^{\max} T \sqrt{1 + \frac{1}{4}k^2 T^2 + \frac{1}{36}k^2 T^4} - \sqrt{(a_2 T + \frac{k}{2}a_3 T^2)^2 + k^2 a_3^2 T^2} \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left( T \sqrt{1 + \frac{1}{4}k^2 T^2 + \frac{1}{36}k^2 T^4} \left( \bar{u}^{\max} - \sqrt{\frac{(a_2 T + \frac{k}{2}a_3 T^2)^2 + k^2 a_3^2 T^2}{T^2 (1 + \frac{1}{4}k^2 T^2 + \frac{1}{36}k^2 T^4)}} \right) \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left( T \sqrt{1 + \frac{1}{4}k^2 T^2 + \frac{1}{36}k^2 T^4} \left( \bar{u}^{\max} - \sqrt{\frac{(\frac{a_2}{T^2} + \frac{ka_3}{2T})^2 + \frac{k^2 a_3^2}{T^4}}{\frac{1}{T^4} + \frac{k^2}{4T^2} + \frac{k^2}{36}}} \right) \right) \\ &= \{+\infty(\bar{u}^{\max} - 0)\} = +\infty. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что для любых позиций  $\mathbf{x}^{(s)}$  и  $\mathbf{x}^{(f)}$  существует такое  $T > 0$ , при котором справедливо неравенство (3.3), т. е. выполняется условие (3.2) управляемости системы (2.4) из точки  $\mathbf{x}^{(s)}$  в точку  $\mathbf{x}^{(f)}$  на отрезке времени  $[t_s, t_s + T]$ . Таким образом, доказана следующая лемма.

**Лемма 1.** *Во вспомогательной задаче 2 для любой начальной  $\mathbf{x}^{(s)}$  и конечной  $\mathbf{x}^{(f)}$  позиций существует  $T > 0$ , при котором система (2.4) является управляемой из точки  $\mathbf{x}^{(s)}$  в точку  $\mathbf{x}^{(f)}$  на отрезке времени  $[t_s, t_s + T]$ .*

В результате в силу известной [3, разд. 9, с. 122] теоремы существования оптимального управления вспомогательная задача 2 всегда имеет решение, т. е. существует удовлетворяющее ограничению (2.5) управление  $u^*(t)$   $t \in [t_s, t_f^*]$ , которое переводит систему (2.1) из начального фазового состояния  $\mathbf{x}^{(s)}$  в заданное состояние  $\mathbf{x}^{(f)}$  за минимальное время  $T^* = t_f^* - t_s \leq T$ .

### 3.2. Построение оптимального управления

Для построения оптимального управления в задаче 2 воспользуемся принципом максимума Понтрягина.

Построим гамильтониан системы (2.1) в задаче (2.8) [4, гл. 6]:  $H = \lambda_0 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 k x_3 + \lambda_3 u$ . Здесь можно считать, что  $\lambda_0 = -1$  [4, с. 510].

Рассмотрим сопряженную систему для (2.1), (2.8)

$$\dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1, \quad \dot{\lambda}_3 = -\lambda_2 k. \quad (3.6)$$

Для системы (3.6) конечные условия не задаются [3, разд. 9, с. 126], а ее решение имеет вид  $\lambda_1 = c_1$ ,  $\lambda_2 = -c_1 t + c_2$ ,  $\lambda_3 = -\frac{1}{2}c_1 t^2 + c_2 t + c_3$ , где  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ .

Из необходимых условий оптимальности

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda_3(t) = 0, \quad t \in [t_s, t_f],$$

следует, что если коэффициенты  $c_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ), то и функции  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) также тождественно равны нулю. Тогда сопряженная система (3.6) имеет лишь тривиальное решение

и гамильтониан  $H \equiv -1$  при любом управлении  $u$ . Такая задача не представляет интереса. Поэтому будем считать, что во вспомогательной задаче 2 особое управление отсутствует и функция  $\lambda_3$  может принимать нулевые значения не более чем в двух точках. В этом случае оптимальное управление во вспомогательной задаче 2 определяется равенством

$$u^*(t) = \text{Arg} \max_{|u| \leq u^{\max}} H = u^{\max} \text{sign} \lambda_3(t), \quad t \in [t_s, t_f^*].$$

Структура этого управления описывается одной из следующих кусочно-постоянных функций:

$$u^{(1)}(t) = \begin{cases} u^{\max} & t < \tilde{t}_1, \\ -u^{\max} & \tilde{t}_1 < t < \tilde{t}_2, \\ u^{\max} & \tilde{t}_2 < t < \tilde{t}_f, \end{cases} \quad u^{(2)}(t) = \begin{cases} -u^{\max} & t < \bar{t}_1, \\ u^{\max} & \bar{t}_1 < t < \bar{t}_2, \\ -u^{\max} & \bar{t}_2 < t < \bar{t}_f, \end{cases}$$

где  $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_f$  и  $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_f$  — неизвестные моменты переключений и моменты окончания движения при управлении  $u^*$ , задаваемого функциями  $u^{(1)}$  и  $u^{(2)}$  соответственно. Указанные моменты времени должны удовлетворять условиям

$$0 \leq \tilde{t}_1 \leq \tilde{t}_2 \leq \tilde{t}_f, \quad (3.7)$$

$$0 \leq \bar{t}_1 \leq \bar{t}_2 \leq \bar{t}_f. \quad (3.8)$$

Таким образом, искомое в задаче 2 управление следующее:

$$u^*(t) = \begin{cases} u^{(1)}(t), & t \in [t_s, \tilde{t}_f], \quad \text{если } \tilde{t}_f \leq \bar{t}_f \\ u^{(2)}(t), & t \in [t_s, \bar{t}_f], \quad \text{если } \bar{t}_f < \tilde{t}_f. \end{cases} \quad (3.9)$$

В результате построение оптимального управления во вспомогательной задаче 2 сводится к определению удовлетворяющей условию (3.7) или (3.8) тройки моментов времени, которая задает функцию  $u^{(1)}$  или  $u^{(2)}$  соответственно.

В дальнейшем без потери общности можно считать, что  $\bar{u}^{\max} = 1$ . Аналитическое интегрирование системы (2.1) с помощью управления  $u^*$ , задаваемого функцией  $u^{(1)}$  с учетом начального (2.6) и конечного (2.7) условий, приводит к следующей системе нелинейных уравнений относительно неизвестных  $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_f$ :

$$\begin{aligned} a_1 - \frac{1}{3}k(\tilde{t}_2^3 - \tilde{t}_1^3) + b_2\tilde{t}_f - \frac{1}{2}k\tilde{t}_f^2b_3 + \frac{1}{6}k\tilde{t}_f^3 &= b_1, \\ a_2 + k\left(\tilde{t}_2^2 - \tilde{t}_1^2 + b_3\tilde{t}_f - \frac{1}{2}\tilde{t}_f^2\right) &= b_2, \\ a_3 - 2(\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1) + \tilde{t}_f &= b_3. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Аналогично для управления  $u^*$ , которое задается функцией  $u^{(2)}$ , строится система

$$\begin{aligned} a_1 + \frac{1}{3}k(\bar{t}_2^3 - \bar{t}_1^3) + b_2\bar{t}_f - \frac{1}{2}k\bar{t}_f^2b_3 - \frac{1}{6}k\bar{t}_f^3 &= b_1, \\ a_2 + k\left(\bar{t}_1^2 - \bar{t}_2^2 + b_3\bar{t}_f + \frac{1}{2}\bar{t}_f^2\right) &= b_2, \\ a_3 + 2(\bar{t}_2 - \bar{t}_1) - \bar{t}_f &= b_3. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь нетрудно показать, что значения конечных моментов времени  $\tilde{t}_f$  и  $\bar{t}_f$  являются корнями соответствующих полинов четвертой степени. Действительно, из последних двух уравнений системы (3.10) могут быть получены выражения для  $\bar{t}_1$  и  $\bar{t}_2$ , подстановка которых в первое уравнение этой системы приводит к соотношению

$$P_4^{(1)}(\tilde{t}_f) = -\frac{3}{16}\tilde{t}_f^4 + l_3\tilde{t}_f^3 + l_2\tilde{t}_f^2 + l_1\tilde{t}_f + l_0 = 0, \quad (3.12)$$

где значения коэффициентов  $l_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{1}{16} (a_3 - b_3)^4 - \frac{6}{k} (a_1 - b_1) (a_3 - b_3) + \frac{3}{k^2} (a_2 + b_2)^2, \\ l_1 &= \frac{1}{4} (a_3 - b_3)^3 - \frac{6}{k} (a_1 - b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3 - 2b_3 a_2), \\ l_2 &= \frac{3}{8} (a_3^2 + 6a_3 b_3 + b_3^2) - \frac{3}{k} (a_2 + b_2), \\ l_3 &= \frac{3}{4} (b_3 - a_3). \end{aligned}$$

Аналогично уравнения системы (3.11) приводят к соотношению

$$P_4^{(2)}(\bar{t}_f) = -\frac{3}{16} \bar{t}_f^4 + p_3 \bar{t}_f^3 + p_2 \bar{t}_f^2 + p_1 \bar{t}_f + p_0 = 0; \quad (3.13)$$

здесь

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{16} (a_3 - b_3)^4 - \frac{6}{k} (a_1 - b_1) (a_3 - b_3) + \frac{3}{k^2} (a_2 - b_2)^2, \\ p_1 &= \frac{1}{4} (b_3 - a_3)^3 - \frac{6}{k} (b_1 - a_1 + a_3 b_2 - a_2 b_3), \\ p_2 &= \frac{3}{8} (a_3^2 + 6a_3 b_3 + b_3^2) + \frac{3}{k} (a_2 + b_2), \\ p_3 &= \frac{3}{4} (a_3 - b_3). \end{aligned}$$

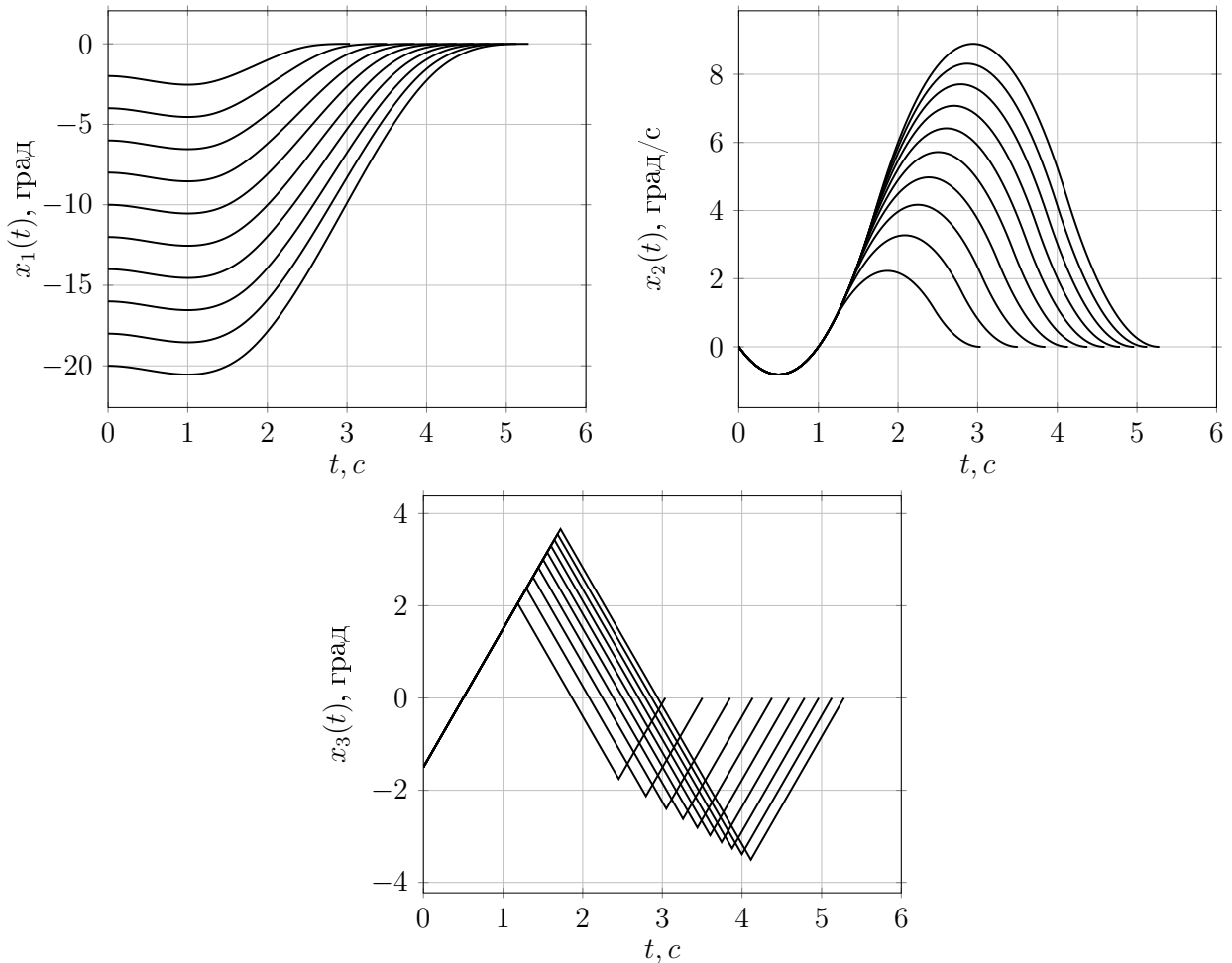


Рис. 2. Графики фазовых компонент системы (2.1).

В силу леммы 1 и теоремы существования оптимального управления во вспомогательной задаче 2 [3, разд. 9, с 122] справедливо следующее

**Утверждение 1.** *Во вспомогательной задаче 2 для любых начальной  $\mathbf{x}^{(s)}$  и конечной  $\mathbf{x}^{(f)}$  позиций существуют такие корни либо полинома (3.12), либо полинома (3.13), которые определяют решение соответствующей им нелинейной системы (3.10) (3.11), удовлетворяющее условию (3.7), (3.8).*

Результаты численного моделирования также подтверждают справедливость данного утверждения 1. На рис. 2 приведены графики фазовых компонент системы (2.1). Здесь начальное значение  $a_1$  компоненты  $x_1$  выбиралось из отрезка  $[-20^\circ, -2^\circ]$ ,  $a_2 = 0^\circ$  и  $a_3 = -1.5^\circ$ ,  $\mathbf{x}^{(f)} = 0$ .

#### 4. Построение субоптимального управления в основной задаче быстрогодействия

Если оптимальное управление (3.9) во вспомогательной задаче 2 обеспечивает выполнение фазового ограничения (2.2), то это управление будет оптимальным и в основной задаче 1. Если же ограничение (2.2) не выполняется при управлении (3.9), то процедура построения оптимального управления в основной задаче 1 существенно усложняется. В этой ситуации применение аппарата метода максимума Понтрягина с учетом фазового ограничения на всем промежутке  $t \in [t_s, t_f]$  приводит к необходимости вычисления интеграла Римана — Сильвестра по мере, порожденной специальными функциями [5, с. 430]. Даже для рассматриваемой здесь простейшей задачи оптимального управления это связано с преодолением нетривиальных алгоритмических трудностей. Здесь предлагается численный метод построения субоптимального управления в задаче 1, позволяющий избежать упомянутых проблем. Общая идея этого метода заключается в использовании известного в задаче 2 оптимального управления (3.9) на промежутках времени, на которых фазовое ограничение (2.2) выполняется с переключением на нулевое управление в момент времени, когда фазовое ограничение нарушается при действии управления (3.9). Алгоритм построения субоптимального управления в задаче 1 представляет собой следующую итерационную процедуру.

На первой итерации ( $i = 1$ ) начальный момент времени  $t_s^{(1)}$  полагается равным  $t_s$ . В момент времени  $t_s^{(i)}$  и в неизвестный, но зафиксированный конечный момент времени  $t_f^{(i)}$  для системы (2.1) задаются начальные (2.6) и конечные (2.7) условия соответственно. После чего описанным выше способом строится оптимальное во вспомогательной задаче 2 управление  $u^{(i)*}$  (см. (3.9)), заданное на некотором промежутке времени  $[t_s^{(i)}, t_f^{(i)*}]$ . Это управление действует до ближайшего момента времени  $\hat{t}^{(i)} \in [t_s^{(i)}, t_f^{(i)*}]$ , в который при управлении  $u^{(i)*}$  нарушается фазовое ограничение (2.2). Затем с помощью управления  $\hat{u} = 0$  динамическая система (2.1) переводится из текущего фазового состояния в некоторое фазовое состояние в момент времени  $\hat{t}^{(i)} + \delta t$  ( $\delta t$  — параметр алгоритма).

Выполняется переход к следующей итерации процедуры:  $i = i + 1$ ,  $t_s^{(i)} = \hat{t}^{(i-1)} + \delta t$ . Начальные условия в момент времени  $t_s^{(i)}$  для системы (2.1) инициализируются ее фазовым состоянием в текущий момент времени, те же конечные условия (2.7) для системы (2.1) задаются в некоторый фиксированный конечный момент времени  $t_f^{(i)}$ . Затем строится оптимальное во вспомогательной задаче 2 управление  $u^{(i)*}$  (см. (3.9)), которое снова действует либо до ближайшего момента времени, в который нарушается фазовое ограничение (2.2), либо до соответствующего этому управлению конечного момента времени  $t_f^{(i)*}$ , в который выполняются конечные условия (2.7).

Таким образом, в основной задаче 1 строится субоптимальное управление, действующее на промежутке времени  $[t_s, t_f^{(N)*}]$  ( $N$  — количество итераций) и представляющее собой последовательную комбинацию оптимальных  $u^{(i)*}$  во вспомогательных задачах 2 управлений и нулевого



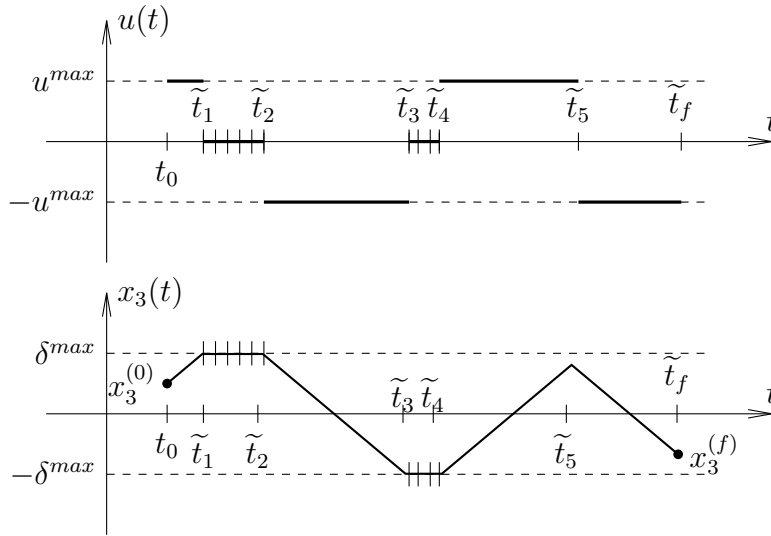


Рис. 3. Общая схема построения субоптимального управления в основной задаче 1.

управления  $\hat{u}$ . Здесь управления  $u^{(i)*}$  строятся для различных начальных условий и одного и того же конечного условия (2.7).

С содержательной же точки зрения в основу предложенной итерационной процедуры построения субоптимального в основной задаче 1 управления положен так называемый “жадный алгоритм” [7, гл. 16]. Такой подход предписывает в каждый момент времени управлять системой (2.1) наилучшим в смысле критерия (2.8) образом, пока выполняется фазовое ограничение (2.2), а в моменты его нарушения “ничего не делать”, переключаясь на нулевое управление  $\hat{u}$ , которое, как показывают результаты численного моделирования, через некоторое время вновь создает условия для применения очередного оптимального во вспомогательной задаче 2 управления. Общая схема описанной выше процедуры построения субоптимального в основной задаче 1 управления приведена на рис. 3.

## 5. Модельный численный пример

Пусть при вращении стержня вокруг его центра масс соотношение плеча силы к моменту инерции  $k=2.17$ . В начальный момент времени  $t_s = 0$  заданы следующие начальные условия:

$$\vartheta_0 = -20^\circ/c, \quad \omega_0 = 3^\circ/c, \quad \delta_0 = -1.5^\circ.$$

В конечный момент времени  $t_f$  требуется, чтобы  $\vartheta_f = 0^\circ/c$ ,  $\omega_f = 0^\circ/c$ ,  $\delta_f = 0^\circ$ . Допустимое управление должно удовлетворять условию  $|u(t)| \leq 3^\circ/c$ ,  $t \in [t_s, t_f]$ , и на промежутке  $[t_s, t_f]$  обеспечивать выполнение ограничения  $|\delta(t)| \leq 2^\circ/c$ .

### 5.1. Оптимальное управление во вспомогательной задаче быстрогодействия

Для приведенных выше исходных данных оптимальное управление  $u^*$  во вспомогательной задаче 2 имеет следующий вид

$$u^*(t) = \begin{cases} 3, & t \in [0, t_1], \\ -3, & t \in (t_1, t_2], \\ 3, & t \in (t_2, t_f]. \end{cases}$$

Здесь моменты времени переключения имеют следующие значения:  $t_1=1.45$  с,  $t_2=3.517$  с,  $t_f=4.63$  с. Динамика значений угла  $\delta$  и угла наклона стержня относительно вертикали  $\vartheta$  представлена на рис. 4, 5.

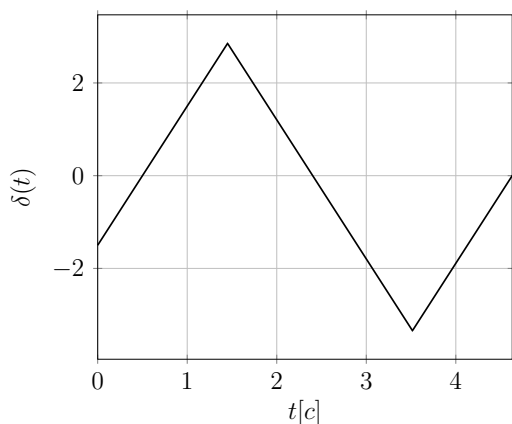


Рис. 4. График функции  $\delta(t)$ ,  $t \in [0, t_f]$ .

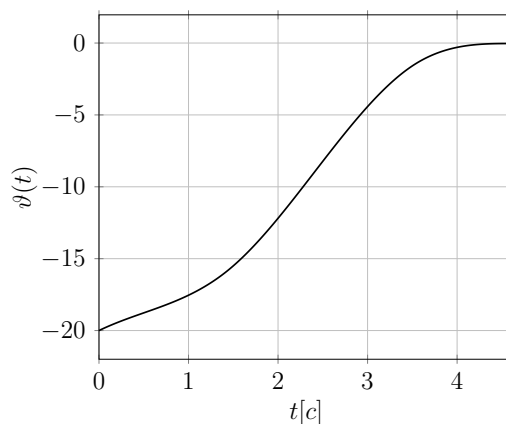


Рис. 5. График функции  $\vartheta(t)$ ,  $t \in [0, t_f]$ .

### 5.2. Субоптимальное управление в основной задаче быстродействия

Субоптимальное управление в основной задаче 1, построенное с помощью описанной выше итерационной процедуры, имеет шесть точек переключения. Структура этого управления следующая

$$u^*(t) = \begin{cases} 3, & t \in [0, 1.17], \\ 0, & t \in (1.17, 1.83], \\ -3, & t \in (1.83, 3.16], \\ 0, & t \in (3.16, 4.63], \\ 3, & t \in (4.63, 5.755], \\ -3, & t \in (5.755, 6.325], \\ 3, & t \in (6.325, 6.43]. \end{cases}$$

На рис. 6, 7 представлена динамика значений угла  $\delta$  и угла наклона стержня относительно вертикали  $\vartheta$ .

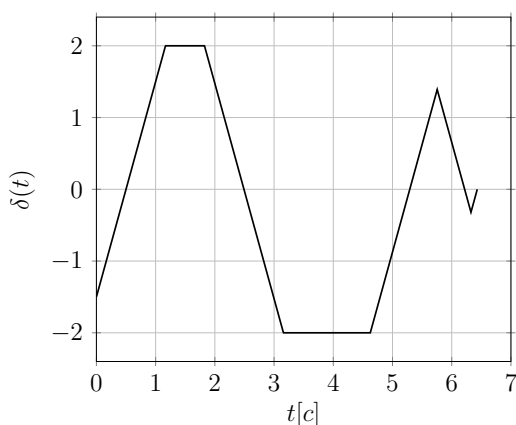


Рис. 6. График функции  $\delta(t)$ ,  $t \in [0, t_f]$ .

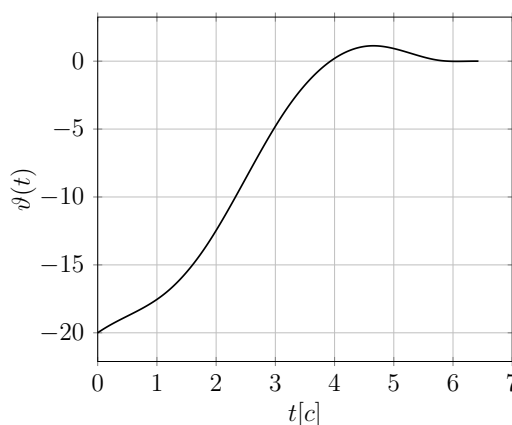


Рис. 7. График функции  $\vartheta(t)$ ,  $t \in [0, t_f]$ .

### Заключение

В работе рассмотрен подход к определению оптимального управления в простейшей задаче быстродействия для линейной динамической системы при наличии ограничения на ее текущее фазовое состояние. Предложена итерационная процедура построения в этой задаче

субоптимального управления, которое является последовательной комбинацией оптимальных управлений во вспомогательных задачах быстрогодействия без фазовых ограничений и нулевого управления. Эмпирически, методом локальных вариаций, показано, что такое управление является оптимальным в исследуемой задаче быстрогодействия с фазовым ограничением. Строгое теоретическое обоснование его оптимальности является предметом дальнейших исследований.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев А.А., Герасюта Н.Ф. Баллистика ракет. М.: Машиностроение, 1970. 244 с.
2. Абгарян К.А., Калязин Э.Л., Мишин В.П. Динамика ракет. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1990. 464 с.
3. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление (линейная теория). М.: Высш. шк., 2001. 239 с.
4. Васильев Ф.П. Методы оптимизации: в 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011. Кн. 1. 620 с.
5. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Изд-во “Факториал пресс”, 2002. 824 с.
6. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1974. 374 с.
7. Кормен Томас Х., Лейзерсон Чарльз И., Ривест Рональд Л., Штайн Клиффорд. Алгоритмы: построение и анализ. 2-е изд. / пер. с англ. М.: Издат. дом “Вильямс”, 2011. 1296 с.

Поступила 8.04.2023

После доработки 31.07.2023

Принята к публикации 1.08.2023

Новиков Дмитрий Александрович  
математик первой категории

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН  
г. Екатеринбург  
e-mail: ya.novikovdmitry@yandex.ru

### REFERENCES

1. Lebedev A.A., Gerasiyuta N.F. *Ballistika raket* [Missile ballistics]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1970, 244 p.
2. Abgaryan K.A., Kalyazin E.L., Mishin V.P. *Dinamika raket* [Missile dynamics], 2nd ed., Moscow: Mashinostroenie Publ., 1990, 464 p. ISBN: 5-217-00354-5.
3. Blagodatskikh V.I. *Vvedenie v optimal'noe upravlenie (lineinaya teoriya)* [Introduction to optimal control (linear theory)]. Moscow: Higher School Publ., 2001, 239 p.
4. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods], in 2 books, Moscow: MTsNMO Publ., 2011, book 1, 620 p.
5. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods], Moscow: Publ. House “Factorial Press”, 2002, 824 p.
6. Vasil'ev F.P. *Lektsii po metodam resheniya ekstremal'nykh zadach* [Lectures on methods for solving extremal problems]. Moscow: Publ. House of Moscow State University, 1974, 374 p.
7. Thomas H. Kormen, Charles I. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein *Introduction to algorithms*. Cambridge: The MIT Press, 2001, 1202 p. Translated to Russian under the title “Algoritmy: postroenie i analiz”, Moscow: Publ. House “Williams”, 2011, 1296 p.

Received April 8, 2023

Revised July 31, 2023

Accepted August 1, 2023

Novikov Dmitrii Aleksandrovich, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,  
e-mail: ya.novikovdmitry@yandex.ru

Cite this article as: D. A. Novikov On the simplest time-optimal problem with phase constraints in control of the spatial orientation of a body. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 62–72.