

УДК 517.9

## АССИМИЛЯЦИЯ ГРАНИЧНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ В МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНОЙ РЕАКЦИИ-КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

А. И. Короткий, И. А. Цепелев

Исследуются прямая и обратная задачи для модели стационарной реакции-конвекции-диффузии. Прямая задача состоит в нахождении решения соответствующей краевой задачи при заданных параметрах модели. Указываются условия разрешимости прямой задачи, приводятся априорные оценки на решение, установлена непрерывная зависимость решения прямой задачи от ряда параметров. Обратная задача состоит в нахождении априори не известного коэффициента поглощения в среде, характеризующего поглощение некоторой субстанции (или сток тепла) в химическом процессе. Дополнительной информацией для решения обратной задачи являются результаты измерения концентрации вещества (или температуры) на доступной части границы области, содержащей соответствующую среду (области изменения пространственной переменной). Доказано, что обратная задача некорректна. Приведены примеры, показывающие, что обратная задача неустойчива по отношению к возмущению измеряемой величины и может иметь несколько решений. Для решения обратной задачи предложен вариационный метод, основанный на минимизации некоторого подходящего функционала невязки (целевого функционала). Исследованы экстремальные свойства задачи минимизации функционала невязки. Найдена явная аналитическая формула для вычисления градиента функционала невязки и выписаны соответствующие сопряженная система и система оптимальности. Указано несколько устойчивых итерационных методов минимизации функционала невязки. Приведены результаты численного моделирования решения обратной задачи.

Ключевые слова: уравнение реакции-конвекции-диффузии, прямая задача, обратная задача, функционал невязки, градиент функционала, сопряженная система, вариационный метод, градиентные методы минимизации.

**A. I. Korotkii, I. A. Tsepelev. Assimilation of boundary data for reconstructing the absorption coefficient in a model of stationary reaction–convection–diffusion.**

Direct and inverse problems for a model of stationary reaction–convection–diffusion are studied. The direct problem is to find a solution to the corresponding boundary value problem for given parameters of the model. Solvability conditions are specified for the direct problem, a priori estimates of the solution are presented, and the continuous dependence of the solution to the direct problem on a number of parameters is established. The inverse problem consists in finding the a priori unknown absorption coefficient of the medium, which characterizes the decay of some substance (or the heat sink) in a chemical process. The results of measuring the concentration of a substance (or its temperature) on an available part of the boundary of the domain filled with the corresponding medium (the domain of change of the spatial variable) are used as additional information for solving the inverse problem. It is proved that the inverse problem is ill-posed. Examples are given demonstrating that the inverse problem is unstable with respect to changes of the measured value and can have several solutions. To solve the inverse problem, a variational method based on the minimization of some appropriate residual functional (a target functional) is suggested. The extremal properties of the problem of minimizing the residual functional are studied. An explicit analytical formula is found for calculating the gradient of the residual functional, and the corresponding adjoint system and optimality system are written. Several stable iterative methods for minimizing the residual functional are specified. Results of numerical simulation of the solution to the inverse problem are presented.

Keywords: reaction–convection–diffusion equation, direct problem, inverse problem, residual functional, functional gradient, adjoint system, variational method, gradient minimization methods.

MSC: 35Q30, 76D05, 76T10, 76T15

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-87-103

### Введение

Одна из основных задач в области охраны окружающей среды заключается в мониторинге ее состояния и оценке рисков аномальных явлений [1; 2]. Математическое моделирование становится неотъемлемой частью работы специалистов в этой области, приводит к необходимости

построения и исследования моделей, описывающих природные процессы. Параметры, входящие в математическую модель, являются важными характеристиками этих процессов. Знание полного набора параметров модели позволяет провести адекватное компьютерное моделирование тех или иных техногенных процессов, составить реальные прогнозы рисков. Однако полный набор характеристических параметров модели не всегда бывает известен, и возникает необходимость определения недостающих параметров тем или иным способом (последние из упомянутых задач называются обратными). Совершенствование методов математического моделирования, в том числе и методов решения обратных задач, делает такие методы исследования и контроля все более и более эффективными.

В работе изучаются прямая и обратная задачи для модели стационарной реакции-конвекции-диффузии. Такие модели часто используются при исследовании различных гидродинамических, тепловых и диффузионных процессов, в частности, при описании процессов распространения примесей в атмосфере и водоемах, при моделировании загрязнения грунтовых вод, в микроэлектронике при описании диффузии электрически заряженных примесей в твердом теле [1; 2].

Прямая задача состоит в нахождении решения соответствующей краевой задачи при известных данных о параметрах модели (решение прямой задачи иногда будем называть состоянием модели). Обратная задача заключается в нахождении некоторых априори не известных параметров модели по некоторым известным (измеренным) дополнительным данным о состоянии модели. В данном случае этими известными данными являются результаты измерения состояния модели на некоторой части границы области ее задания, где прямое измерение состояния возможно. Математическая постановка прямой задачи приводит к краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка, обратной задачи — к обобщенной задаче Коши для эллиптического уравнения, которая, как правило, является некорректной.

Для прямой задачи вводится понятие обобщенного решения, доказываются его существование и единственность. Доказано, что прямая задача является корректно поставленной, установлены соответствующие априорные оценки на решение и доказана непрерывная зависимость решения от некоторых параметров модели.

Доказано, что обратная задача является некорректно поставленной, она может иметь несколько решений и неустойчива по отношению к возмущению измеряемых граничных данных. Описываются вариационный метод и алгоритм решения обратной задачи [3–5]. Приводятся результаты численного моделирования решения обратной задачи, показывающие работоспособность построенного алгоритма.

Ранее, в работах [6; 7] рассматривались подобные прямые и обратные задачи, отличающиеся математическими моделями и восстанавливаемыми параметрами.

## 1. Постановка задачи

Охарактеризуем кратко содержательную сторону задачи. В некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ,  $m = 2, 3$ , содержащей неоднородную сплошную среду, находящуюся под воздействием некоторых внутренних и внешних определяющих состояние среды факторов (режимов), рассматривается установившееся (стационарное) распределение температуры (или концентрации какого-либо вещества в среде). Математическая модель распределения температуры (концентрации) в области  $\Omega$  представляет собой краевую задачу для безразмерного уравнения реакции-конвекции-диффузии [8–11]

$$LT \equiv \operatorname{div}(k \nabla T) - (\mathbf{u}, \nabla T) - qT = f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$T = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (1.2)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$  — точка пространства  $\mathbb{R}^m$ ;  $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x}))$  — вектор скорости движения среды в точках  $\mathbf{x}$  области  $\Omega$ ;  $T = T(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , — температура (концентрация рассматриваемого вещества) среды в области  $\Omega$ ;  $k = k(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , — коэффициент теплопроводности (диффузии) среды в области  $\Omega$ ;  $q = q(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , — коэффициент поглощения в точках области  $\Omega$ , характеризующий скорость поглощения некоторой субстанции в среде или сток тепла (вещества) в результате химических превращений;  $f = f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , — объемная плотность образования или стока тепла (вещества) в области  $\Omega$ ;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали в точках границы  $\Gamma$  области  $\Omega$ .

Пусть граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  условно разделена на две части:  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  ( $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ ,  $\text{mes } \Gamma_1 > 0$ ,  $\text{mes } \Gamma_2 > 0$ ). На этих частях границы заданы граничные условия (1.2) и (1.3). Допустим, что на участке границы  $\Gamma_3 \subset \Gamma_2$ ,  $\text{mes } \Gamma_3 > 0$ , возможно прямое измерение (наблюдение) температуры (концентрации вещества) среды, заключенной в области  $\Omega$  (см. рис. 1).

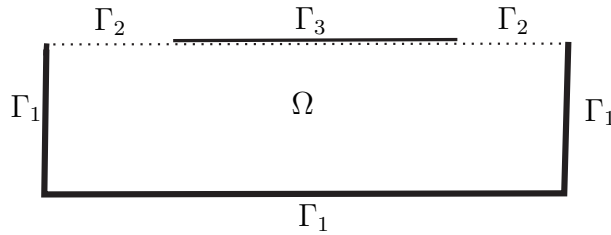


Рис. 1. Модельная область и ее граница.

Задача состоит в том, чтобы по этим измерениям (наблюдениям) определить априори не известный коэффициент поглощения  $q$  в области  $\Omega$ . Эту задачу далее будем называть обратной задачей.

Кроме этой того в статье будет рассматриваться задача, которую условимся называть прямой. Она состоит в нахождении распределения температуры (концентрации)  $T$  в области  $\Omega$  в результате решения краевой задачи (1.1)–(1.3) при всех заданных параметрах модели.

Далее, рассуждая о содержательной стороне задачи, для краткости и определенности, в работе будем упоминать только температуру.

Уточним постановки прямой и обратной задач. Будем считать, что  $\Omega$  является ограниченной строго липшицевой областью в  $\mathbb{R}^m$  [12, с. 212, 30] или областью с достаточно гладкой границей (например, класса  $C^1$ ) [12, с. 31; 13, с. 9; 14, с. 67]. Части  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  границы  $\Gamma$  считаются открытыми и регулярными на  $\Gamma$  [11, с. 28],  $\Gamma_3$  — открытая регулярная часть границы  $\Gamma_2$ .

Далее будут использоваться пространства Лебега  $L_p(\Omega)$ ,  $L_p(\Gamma)$ ,  $p \geq 1$ , пространства Соболева  $W_p^l(\Omega)$ ,  $p \geq 1$ ,  $l \geq 1$  [10–16], а также их векторные аналоги  $\mathbf{L}_p(\Omega)$ ,  $\mathbf{L}_p(\Gamma)$ ,  $\mathbf{W}_p^l(\Omega)$ , нормы в которых определяются обычным образом [10, с. 41, 112; 12, с. 467]. Кроме того, будут использоваться гильбертовы пространства [10, с. 41, 112; 12, с. 467; 15, с. 62]

$$\mathbf{H}(\Omega) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma, \text{ div } \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega \},$$

$$H_0^1(\Omega) = \{ v \in W_2^1(\Omega) : v = 0 \text{ на } \Gamma_1 \}.$$

Отметим, что в подпространстве  $\mathbf{H}(\Omega)$  пространства  $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$  обычная норма эквивалентна полунорме, определяемой равенством [10, с. 41, 112; 12, с. 69, 467; 15, с. 62]

$$\| \mathbf{u} \|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} [ (\nabla u_1, \nabla u_1) + \dots + (\nabla u_m, \nabla u_m) ] dx;$$

в подпространстве  $H_0^1(\Omega)$  пространства  $W_2^1(\Omega)$  обычная норма эквивалентна полунорме, определяемой равенством [12, с. 69; 15, с. 62]

$$\| v \|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla v) dx.$$

Пусть далее для определенности

$$\begin{aligned} k &\in C^1(\bar{\Omega}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad q \in Q, \quad f \in L_2(\Omega); \\ 0 < \mu_1 &\leq k(\mathbf{x}) \leq \mu_2, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad \mu_1 = \text{const} \leq \mu_2 = \text{const}; \\ \|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|_{\mathbb{R}^m} &\leq \mu_3, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mu_3 = \text{const} \geq 0; \\ Q &= \{q \in L_\infty(\Omega) : 0 \leq q(\mathbf{x}) \leq \mu_4, \mathbf{x} \in \Omega\}, \quad \mu_4 = \text{const} \geq 0. \end{aligned}$$

Все рассматриваемые в работе числовые величины и пространства считаются вещественными, измеримость и интегрируемость понимаются по Лебегу, определения используемых пространств имеются в [10–16].

При указанных условиях на параметры краевой задачи (1.1)–(1.3) она может не иметь классического решения. Введем понятие обобщенного решения краевой задачи (1.1)–(1.3), следуя [10–13; 15].

Умножим равенство (1.1) на пробную функцию  $g \in H_0^1(\Omega)$ , результат проинтегрируем по области  $\Omega$ . Применим формулу интегрирования по частям [12, с. 70; 15, с. 75], перебросив часть производных с функции  $T$  на функцию  $g$ , имеем

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_1} k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} g \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} g \, d\Gamma - \int_{\Omega} k (\nabla T, \nabla g) \, dx \\ &= \int_{\Gamma} T(\mathbf{u}, \mathbf{n}) g \, d\Gamma - \int_{\Omega} T(g \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla g)) \, dx + \int_{\Omega} q T g \, dx + \int_{\Omega} f g \, dx. \end{aligned}$$

Учитывая граничные свойства функций  $T$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $g$  и соленоидальность векторного поля  $\mathbf{u}$ , получим

$$\int_{\Omega} k (\nabla T, \nabla g) \, dx = \int_{\Omega} T(\mathbf{u}, \nabla g) \, dx - \int_{\Omega} q T g \, dx - \int_{\Omega} f g \, dx. \quad (1.4)$$

Для функций  $T \in W_2^1(\Omega)$  и  $g \in W_2^1(\Omega)$  все элементы в равенстве (1.4) определены корректно, интегралы существуют и конечны.

Обобщенным решением краевой задачи (1.1)–(1.3) назовем функцию  $T \in H_0^1(\Omega)$ , удовлетворяющую интегральному равенству (1.4) для любой функции  $g \in H_0^1(\Omega)$ .

Прямая задача состоит в нахождении обобщенного решения  $T$  краевой задачи (1.1)–(1.3) при заданных параметрах  $k$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $q$ ,  $f$  этой краевой задачи.

Поскольку далее будет важна зависимость решения прямой задачи от параметра  $q \in Q$ , то это решение иногда будем обозначать символом  $T = T[q]$ .

Уточним детали обратной задачи. Пусть  $\gamma$  — оператор взятия следа  $\gamma T$  на  $\Gamma_3$  для функций  $T \in H_0^1(\Omega)$ . Оператор  $\gamma : H_0^1(\Omega) \ni T \rightarrow \gamma T \in L_2(\Gamma_3)$  линеен и вполне непрерывен [12, с. 79; 15, с. 74]. Множество всех допустимых коэффициентов  $Q$  выпукло, ограничено, замкнуто и, следовательно, слабо компактно в  $L_2(\Omega)$ . Пусть  $\Xi = \gamma T[Q]$  — множество всех возможных следов на  $\Gamma_3$  решений  $T \in T[Q]$ , оно компактно в  $L_2(\Gamma_3)$ . Введем в рассмотрение оператор

$$A : L_2(\Omega) \supset Q \ni q \longrightarrow \xi \in \Xi \subset L_2(\Gamma_3). \quad (1.5)$$

Обратная задача состоит в решении нелинейного операторного уравнения

$$Aq = \xi.$$

## 2. Разрешимость и устойчивость прямой задачи

Перепишем равенство (1.4) в виде

$$B(T, \omega) = F(\omega), \quad (2.1)$$

$$B(T, \omega) = \int_{\Omega} k(\nabla T, \nabla \omega) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} T(\mathbf{u}, \nabla \omega) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} q T \omega d\mathbf{x}, \quad F(\omega) = - \int_{\Omega} f \omega d\mathbf{x}.$$

Правая часть в (2.1) является линейной непрерывной формой на  $H_0^1(\Omega)$

$$|F(\omega)| = \left| \int_{\Omega} f \omega d\mathbf{x} \right| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|\omega\|_{L_2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|\omega\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Левая часть в (2.1) определяет билинейную непрерывную коэрцитивную форму на  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ . Проверим непрерывность билинейной формы

$$\begin{aligned} |B(T, \omega)| &= \left| \int_{\Omega} k(\nabla T, \nabla \omega) d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\Omega} T(\mathbf{u}, \nabla \omega) d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\Omega} q T \omega d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \mu_2 \int_{\Omega} |(\nabla T, \nabla \omega)| d\mathbf{x} + \|T\|_{L_2(\Omega)} \|(\mathbf{u}, \nabla \omega)\|_{L_2(\Omega)} + \mu_4 \|T\|_{L_2(\Omega)} \|\omega\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \mu_2 \|\nabla T\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \omega\|_{L_2(\Omega)} + \|T\|_{L_2(\Omega)} \mu_3 \|\nabla \omega\|_{L_2(\Omega)} + \mu_4 \|T\|_{W_2^1(\Omega)} \|\omega\|_{W_2^1(\Omega)} \\ &\leq (\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) \|T\|_{W_2^1(\Omega)} \|\omega\|_{W_2^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Проверим коэрцитивность билинейной формы. Предварительно заметим, что

$$\int_{\Omega} T(\mathbf{u}, \nabla T) d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{u}, \mathbf{n}) T^2 d\Gamma = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} B(T, T) &= \int_{\Omega} k(\nabla T, \nabla T) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} q T^2 d\mathbf{x} \\ &\geq \mu_1 \int_{\Omega} (\nabla T, \nabla T) d\mathbf{x} = \frac{\mu_1}{2} \int_{\Omega} (\nabla T, \nabla T) d\mathbf{x} + \frac{\mu_1}{2} \int_{\Omega} (\nabla T, \nabla T) d\mathbf{x} \\ &\geq \frac{\mu_1}{2} \int_{\Omega} (\nabla T, \nabla T) d\mathbf{x} + \frac{\mu_1}{2} c_{\Omega}^{-2} \int_{\Omega} T^2 d\mathbf{x} \geq \min \left\{ \frac{\mu_1}{2}, \frac{\mu_1}{2} c_{\Omega}^{-2} \right\} \|T\|_{W_2^1(\Omega)}^2 = \nu \|T\|_{W_2^1(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

где  $\nu = \min \{ 2^{-1} \mu_1, 2^{-1} \mu_1 c_{\Omega}^{-2} \}$ ,  $c_{\Omega}$  — константа из неравенства Пуанкаре — Фридрихса [15, с. 62, 116; 17, с. 195, 344; 18, с. 360, 361, 374].

Воспользуемся теперь теоремой Лакса — Мильграма [17, с. 386], примененной к равенству (2.1) в пространстве  $H_0^1(\Omega)$ . Из этой теоремы следует существование единственного обобщенного решения  $T$  краевой задачи (1.1)–(1.3) из пространства  $H_0^1(\Omega)$ , в силу этой же теоремы справедлива оценка

$$\|T\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \nu^{-1} \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (2.2)$$

Заметим, что константа  $\nu$  в этом неравенстве не зависит от конкретных значений параметров  $k$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $q$ ,  $f$  краевой задачи (1.1)–(1.3) и ее решения. Она является единой для всех параметров из соответствующих множеств допустимых параметров.

Сформулируем получившийся результат в виде теоремы.

**Теорема 2.1.** Краевая задача (1.1) – (1.3) имеет единственное обобщенное решение  $T \in H_0^1(\Omega)$ , для которого справедливы равенство

$$\int_{\Omega} k(\nabla T, \nabla T) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} q T^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} f T d\mathbf{x} = 0$$

и априорная оценка (2.2). Если последовательность  $\{q_n\} \subset Q$  слабо в  $L_2(\Omega)$  сходится к элементу  $q_0 \in Q$ , то  $T[q_n] \rightarrow T[q_0]$  сильно в  $H_0^1(\Omega)$ . Множество  $T[Q]$  компактно в  $H_0^1(\Omega)$ .

**Доказательство.** Осталось доказать заключительную часть теоремы. Пусть последовательность  $\{q_n\} \subset Q$  слабо в  $L_2(\Omega)$  сходится к элементу  $q_0 \in Q$ . Из оценки (2.2) следует ограниченность последовательности  $\{T[q_n]\}$  в гильбертовом пространстве  $H_0^1(\Omega)$ . Тогда из этой последовательности можно выделить подпоследовательность  $\{T[q_{n_p}]\}$ , которая слабо в  $H_0^1(\Omega)$  сходится к некоторому элементу  $T_0 \in H_0^1(\Omega)$ . Тогда из теорем вложения [12, с. 77; 15, с. 84] следует, что  $T[q_{n_p}] \rightarrow T_0$  сильно в  $L_4(\Omega)$  при  $p \rightarrow \infty$ . Запишем интегральное равенство, определяющее обобщенное решение  $T[q_{n_p}]$ ,

$$\int_{\Omega} k(\nabla T[q_{n_p}], \nabla g) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} T[q_{n_p}](\mathbf{u}, \nabla g) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} q_{n_p} T[q_{n_p}] g d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f g d\mathbf{x}.$$

В этом равенстве возможен предельный переход при  $p \rightarrow \infty$ . После перехода к пределу получим равенство

$$\int_{\Omega} k(\nabla T_0, \nabla g) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} T_0(\mathbf{u}, \nabla g) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} q_0 T_0 g d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f g d\mathbf{x}.$$

Проверим предельный переход во втором слева выражении (как наиболее трудном). Предварительно отметим, что из теоремы о компактном вложении  $H_0^1 \subset L_4(\Omega)$  [12, с. 77; 15, с. 84] имеем  $g \in L_4(\Omega)$ ,  $T[q_{n_p}] \rightarrow T_0$  сильно в  $L_4(\Omega)$ , значит,  $T[q_{n_p}]g \rightarrow T_0 g$  сильно в  $L_2(\Omega)$ . Поэтому

$$\int_{\Omega} q_{n_p} (T[q_{n_p}] g) d\mathbf{x} \rightarrow \int_{\Omega} q_0 (T_0 g) d\mathbf{x}.$$

Отсюда следует, что  $T_0 = T[q_0]$ . В силу единственности обобщенного решения краевой задачи (1.1) – (1.3) получаем, что для самой последовательности  $T[q_n] \rightarrow T[q_0]$  сильно в  $L_4(\Omega)$  и слабо в  $H_0^1(\Omega)$ .

Осталось проверить, что  $T[q_n] \rightarrow T[q_0]$  сильно в  $H_0^1(\Omega)$ . Для этого достаточно показать, что  $\|T[q_n]\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow \|T[q_0]\|_{H_0^1(\Omega)}$ . Ясно, что

$$\|T[q_n]\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} k(\nabla T[q_n], \nabla T[q_n]) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} q_n T[q_n]^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f T[q_n] d\mathbf{x}.$$

При  $n \rightarrow \infty$  имеем

$$- \int_{\Omega} q_n T[q_n]^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f T[q_n] d\mathbf{x} \rightarrow - \int_{\Omega} q_0 T[q_0]^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f T[q_0] d\mathbf{x}.$$

Значит,

$$\|T[q_n]\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow \|T[q_0]\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

В гильбертовом пространстве из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость  $T[q_n] \rightarrow T[q_0]$  сильно в  $H_0^1(\Omega)$ . Поскольку оператор

$$L_2(\Omega) \supset Q \ni q \rightarrow T[q] \in T[Q] \subset L_2(\Omega)$$

слабо→сильно непрерывен, то образ  $T[Q]$  слабо компактного множества  $Q$  при таком отображении компактен в  $H_0^1(\Omega)$ .

Теорема доказана.

Рассмотрим на  $H_0^1(\Omega)$  два квадратичных функционала

$$E(v) = B(v, v) - 2F(v),$$

$$Y(v) = G(v, v) - 2F(v), \quad G(v, \omega) = \int_{\Omega} k(\nabla v, \nabla \omega) dx + \int_{\Omega} q v \omega dx.$$

Поскольку  $\langle v, (\mathbf{u}, \nabla v) \rangle_{L_2(\Omega)} = 0$  для любого  $v \in H_0^1(\Omega)$ , то  $E(v) = Y(v)$  для любого  $v \in H_0^1(\Omega)$ , и поэтому функционалы  $E(v)$  и  $Y(v)$  имеют на  $H_0^1(\Omega)$  одинаковые множества точек минимума. Функционал  $Y$  эквивалентен квадрату нормы пространства  $H_0^1(\Omega)$ , поэтому он слабо полунепрерывен снизу на  $H_0^1(\Omega)$  и имеет на  $H_0^1(\Omega)$  хотя бы одну точку минимума. Кроме того, этот функционал строго выпуклый на  $H_0^1(\Omega)$  и поэтому может иметь только одну точку минимума на  $H_0^1(\Omega)$ . Обозначим ее  $v_*$ . Следовательно, функционал  $E$  также будет иметь на  $H_0^1(\Omega)$  только одну точку минимума  $v_*$  и

$$E(v_*) \leq E(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Билинейная форма  $B(v, w)$  симметрична на  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ . Действительно, для любых  $v \in H_0^1(\Omega)$  и  $w \in H_0^1(\Omega)$  имеем

$$B(v, w) = B(w, v) - \langle v, (\mathbf{u}, \nabla w) \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle w, (\mathbf{u}, \nabla v) \rangle_{L_2(\Omega)} = B(w, v).$$

Покажем теперь, что точка минимума  $v_*$  является решением вариационного уравнения

$$B(v_*, v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.3)$$

Фиксируем произвольное  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Тогда для любого  $\lambda \in \mathbb{R}$  имеем

$$\begin{aligned} E(v_* + \lambda v) &= B(v_* + \lambda v, v_* + \lambda v) - 2F(v_* + \lambda v) \\ &= B(v_*, v_*) + \lambda B(v_*, v) + \lambda B(v, v_*) + \lambda^2 B(v, v) - 2F(v_*) - 2\lambda F(v) \\ &= E(v_*) + \lambda^2 B(v, v) + \lambda B(v_*, v) + \lambda B(v, v_*) - 2\lambda F(v) \geq E(v_*), \end{aligned}$$

следовательно, для любого  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda^2 B(v, v) + \lambda B(v_*, v) + \lambda B(v, v_*) - 2\lambda F(v) \geq 0,$$

поэтому  $B(v_*, v) + B(v, v_*) - 2F(v) = 0$ , значит,  $B(v_*, v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$ .

Вариационное уравнение (2.3) может иметь только одно решение (поскольку это решение должно совпасть с обобщенным решением краевой задачи (1.1)–(1.3), которое, как доказано в теореме 2.1, единственно). Отсюда следует, что решение вариационного уравнения (2.3) будет точкой глобального минимума функционала  $E$  на  $H_0^1(\Omega)$ . Следовательно, элемент  $v_*$  будет точкой глобального минимума функционала  $E$  на множестве  $H_0^1(\Omega)$  тогда и только тогда, когда он будет решением вариационного уравнения (2.3).

Выведем одно полезное равенство для решения вариационного равенства (2.3). Для произвольного  $v \in H_0^1(\Omega)$  имеем

$$\begin{aligned} E(v) - E(v_*) &= E(v_* + (v - v_*)) - E(v_*) \\ &= B(v_* + (v - v_*), v_* + (v - v_*)) - 2F(v_* + (v - v_*)) - E(v_*) \\ &= B(v_*, v_*) + B(v - v_*, v - v_*) - 2F(v_*) + 2[B(v_*, v - v_*) - F(v - v_*)] - E(v_*) \\ &= E(v_*) + B(v - v_*, v - v_*) - E(v_*) = B(v - v_*, v - v_*), \end{aligned}$$

$$E(v) - E(v_*) = B(v - v_*, v - v_*),$$

$$B(v, v) - B(v_*, v_*) = B(v - v_*, v - v_*) + 2(F(v) - F(v_*)).$$

Покажем, что функционал  $E: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируем по Фреше в любой точке пространства  $H_0^1(\Omega)$ . Фиксируем произвольный элемент  $v \in H_0^1(\Omega)$  и дадим ему произвольное приращение  $h \in H_0^1(\Omega)$ . Найдем приращение функционала  $E(v + h) - E(v)$  и выделим в нем главную линейную часть

$$\begin{aligned} E(v + h) - E(v) &= B(v + h, v + h) - 2F(v + h) - E(v) \\ &= B(v, v) + 2B(v, h) + B(h, h) - 2F(v) - 2F(h) - E(v) \\ &= 2B(v, h) - 2F(h) + B(h, h) = D_F(v, h) + o(\|h\|_{H_0^1(\Omega)}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} o(\|h\|_{H_0^1(\Omega)}) &= B(h, h) = \int_{\Omega} k(\nabla h, \nabla h) dx + \int_{\Omega} q h^2 dx = \|h\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \\ D_F(v, h) &= 2B(v, h) - 2F(h) \\ &= 2 \int_{\Omega} k(\nabla v, \nabla h) dx + 2 \int_{\Omega} (\mathbf{u}, \nabla v) h dx + 2 \int_{\Omega} q v h dx - 2 \int_{\Omega} f h dx. \end{aligned}$$

Форма  $D_F(v, h)$  линейна и непрерывна по  $h$ , и в силу единственности дифференциала Фреше эта форма есть дифференциал Фреше. По теореме Рисса о представлении линейного непрерывного функционала над гильбертовым пространством имеем  $D_F(v, h) = \langle P(v), h \rangle_{H_0^1(\Omega)}$ , производная Фреше функционала  $E$  в точке  $v \in H_0^1(\Omega)$  определяется равенством  $E'(v) = P(v)$ . Поскольку точка глобального минимума  $v_*$  является внутренней точкой пространства  $H_0^1(\Omega)$ , то  $E'(v_*) = 0$  или, что равносильно,  $D_F(v_*, h) = 2B(v_*, h) - 2F(h) = 0$  для любого  $h \in H_0^1(\Omega)$ . Последнее равенство совпадает с уже известным равенством (2.3).

Проверим, что функционал  $B(v) = B(v, v)$  является сильно выпуклым на  $H_0^1(\Omega)$ . Действительно, для любых  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,  $w \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  имеем

$$\begin{aligned} B(\alpha v + (1 - \alpha)w) &= \alpha^2 B(v) + 2\alpha(1 - \alpha)B(v, w) + (1 - \alpha)^2 B(w) \\ &= \alpha B(v) + (1 - \alpha)B(w) - \alpha(1 - \alpha)B(v - w), \end{aligned}$$

поэтому  $E(\alpha v + (1 - \alpha)w) = \alpha E(v) + (1 - \alpha)E(w) - \alpha(1 - \alpha)B(v - w)$ . Перепишем это равенство в виде

$$E(\alpha v + (1 - \alpha)w) - E(w) = \alpha(E(v) - E(w)) - \alpha(1 - \alpha)B(v - w).$$

Положим в этом равенстве  $w = v_*$  и учтем, что  $0 \leq E(\alpha v + (1 - \alpha)v_*) - E(v_*)$ . В результате получим  $(1 - \alpha)B(v - v_*) \leq E(v) - E(v_*)$ . При  $\alpha = 0$  имеем  $B(v - v_*) \leq E(v) - E(v_*)$ . Пусть  $\{v_k\}$  — произвольная последовательность, минимизирующая функционал  $E$  на  $H_0^1(\Omega)$ ,

$$E(v_k) \rightarrow E(v_*) = E_* = \min\{E(v) : v \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Положим в предыдущем равенстве  $v = v_k$ , это дает неравенство

$$\|v_k - v_*\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = B(v_k - v_*) \leq E(v_k) - E_*, \quad (2.4)$$

из которого при  $k \rightarrow \infty$  имеем  $v_k \rightarrow v_*$  в  $H_0^1(\Omega)$ .

Сформулируем получившиеся результаты в виде теоремы.



**Теорема 2.2.** *Единственное обобщенное решение  $T$  краевой задачи (1.1) – (1.3) является единственной точкой глобального минимума квадратичного функционала  $E$  на множестве  $H_0^1(\Omega)$ . Функционал  $E$  дифференцируем по Фреше в любой точке пространства  $H_0^1(\Omega)$ . Дифференциал Фреше в точке  $v \in H_0^1(\Omega)$  имеет вид  $D_F(v, h) = 2B(v, h) - 2F(h)$ . В точке глобального минимума  $v_* = T$  справедливо вариационное уравнение Эйлера – Лагранжа  $B(T, v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$ . Всякая минимизирующая функционал  $E$  на множестве  $H_0^1(\Omega)$  последовательность  $\{v_k\}$  сильно в  $H_0^1(\Omega)$  сходится к точке минимума  $v_* \in H_0^1(\Omega)$ , причем имеет место оценка (2.4). Для обобщенного решения  $T$  и произвольного  $v \in H_0^1(\Omega)$  справедливо равенство*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} k(\nabla v, \nabla v) dx + \int_{\Omega} q v^2 dx - \int_{\Omega} k(\nabla T, \nabla T) dx - \int_{\Omega} q T^2 dx \\ &= \int_{\Omega} k(\nabla(v - T), \nabla(v - T)) dx + \int_{\Omega} q(v - T)^2 dx + 2 \int_{\Omega} f(T - v) dx. \end{aligned}$$

### 3. Некорректность (неустойчивость) обратной задачи

Покажем неустойчивость обратной задачи по отношению к малым возмущениям результата наблюдения (измерения)  $\xi \in \Xi$ . Для этого достаточно показать, что оператор (1.5) не может иметь непрерывного обратного оператора. Действительно, предположим, что оператор  $A$  имеет непрерывный обратный оператор  $A^{-1}$ . Тогда, с одной стороны,  $A^{-1}(A) = E$ , с другой стороны, единичный оператор  $E$  должен быть вполне непрерывным, поскольку оператор  $A$  вполне непрерывен, а оператор  $A^{-1}$  непрерывен. Однако, единичный оператор не может быть вполне непрерывным. Следовательно, предположение о том, что оператор  $A$  имеет непрерывный обратный оператор  $A^{-1}$ , неверно. Отсюда следует неустойчивость обратной задачи по отношению к малым возмущениям наблюдаемых величин.

Проиллюстрируем неустойчивость обратной задачи на примере.

**Пример 3.1.** Уточним параметры модели. Пусть  $m = 2$ ,  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $k = 1$ ,  $\mathbf{u} = 0$ ,  $f = \sin(\pi x_1)$ ,  $q \geq 0$ ,  $T = 0$  на  $\Gamma_1 = \{(0, x_2) : 0 < x_2 < 1\} \cup \{(x_1, 0) : 0 < x_1 < 1\} \cup \{(1, x_2) : 0 < x_2 < 1\}$ ,  $\partial T / \partial \mathbf{n} = 0$  на  $\Gamma_2 = \{(x_1, 1) : 0 < x_1 < 1\}$ . Температура измеряется на  $\Gamma_3 = \Gamma_2$ . Постоянному параметру  $q \geq 0$  соответствует решение прямой задачи

$$T[q] = \sin(\pi x_1) \left[ \frac{\exp(\lambda x_2)}{\lambda^2(1 + \exp(2\lambda))} + \frac{\exp(\lambda(2 - x_2))}{\lambda^2(1 + \exp(2\lambda))} - \frac{1}{\lambda^2} \right], \quad \lambda^2 = q + \pi^2.$$

Отсюда следует, что

$$\gamma T[q] = T[q](x_1, 1) = -\sin(\pi x_1) \left[ \frac{(1 - \exp(\lambda))^2}{\lambda^2(1 + \exp(2\lambda))} \right], \quad 0 < x_1 < 1, \quad (3.1)$$

$$\gamma T[q] \rightarrow 0 \iff \left[ \frac{(1 - \exp(\lambda))^2}{\lambda^2(1 + \exp(2\lambda))} \right] \rightarrow 0 \iff q \rightarrow +\infty. \quad (3.2)$$

Таким образом, из (3.2) получаем, что если для некоторой последовательности неотрицательных постоянных коэффициентов  $\{q_n\}$  имеем  $\xi_n = \gamma T[q_n] \rightarrow 0$  в  $L_2(\Gamma_3)$  или даже в  $C[0, 1]$ , то  $q_n \rightarrow +\infty$  и, следовательно, не сходится ни к какому постоянному коэффициенту.

Ясно также из (3.1), что не существует постоянного коэффициента  $q = \text{const} \geq 0$ , при котором  $\gamma T[q] = T[q](x_1, 1) = 0$ ,  $0 < x_1 < 1$ . Более того, не существует допустимой функции  $q \in Q$ ,  $q = q(x_2)$ ,  $0 < x_2 < 1$ , для которой  $\gamma T[q] = 0$ .

Сформулируем получившиеся результаты в виде теоремы.

**Теорема 3.1.** *Обратная задача некорректна, она не может иметь непрерывного обратного оператора к оператору  $A$ , она неустойчива по отношению к возмущению измеряемой (наблюдаемой) величины.*

#### 4. О единственности решения обратной задачи

Прежде всего заметим, что обратная задача разрешима тогда и только тогда, когда  $\xi \in \Xi$ . Оказывается, при заданном  $\xi \in \Xi$  обратная задача может иметь несколько решений. Приведем соответствующий пример.

**Пример 4.1.** Уточним параметры модели. Пусть  $m = 2$ ,  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $k = 1$ ,  $\mathbf{u} = 0$ ,  $f = 0$ ,  $q \in Q$ ,  $T = 0$  на  $\Gamma_1 = \{(0, x_2) : 0 < x_2 < 1\} \cup \{(x_1, 0) : 0 < x_1 < 1\} \cup \{(1, x_2) : 0 < x_2 < 1\}$ ,  $\partial T / \partial \mathbf{n} = 0$  на  $\Gamma_2 = \{(x_1, 1) : 0 < x_1 < 1\}$ . Измерения температуры производятся на  $\Gamma_3 = \Gamma_2$ . Ясно, что для любого допустимого коэффициента  $q \in Q$  имеем  $T[q] = 0$  в области  $\Omega$ . Следовательно,  $\gamma T[q] = 0$  на  $\Gamma_3$ . Таким образом, нулевому следу  $\xi = 0$  соответствует целое множество коэффициентов  $q \in Q$ , для каждого из которых  $\gamma T[q] = \xi = 0$ . Что и требовалось показать.

Опишем класс моделей, для которых соответствующие обратные задачи имеют единственное решение.

**Пример 4.2.** Пусть  $m = 2$ ,  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $k = 1$ ,  $\mathbf{u} = 0$ ,  $q \in Q$ ,  $T = 0$  на  $\Gamma_1 = \{(0, x_2) : 0 < x_2 < 1\} \cup \{(x_1, 0) : 0 < x_1 < 1\} \cup \{(1, x_2) : 0 < x_2 < 1\}$ ,  $\partial T / \partial \mathbf{n} = 0$  на  $\Gamma_2 = \{(x_1, 1) : 0 < x_1 < 1\}$ . Измерения производятся на  $\Gamma_3 = \Gamma_2$ .

Пусть

$$f = \sigma \omega(x_1) \quad \sigma = \text{const} > 0; \quad \omega''(x_1) = -\lambda^2 \omega(x_1), \quad 0 < x_1 < 1; \quad \omega(0) = 0 = \omega(1);$$

$$q = \text{const} \in [0, \mu_4]; \quad \eta^2 = q + \lambda^2.$$

Тогда решение прямой задачи представимо в виде

$$T = \omega(x_1) W(x_2); \quad W''(x_2) = \eta^2 W(x_2) + \sigma, \quad 0 < x_2 < 1; \quad W(0) = 0 = W'(1). \quad (4.1)$$

Ясно, что решение краевой задачи из (4.1) имеет вид

$$W(x_2) = C_1 \exp(\eta x_2) + C_2 \exp(-\eta x_2) - \frac{\sigma}{\eta^2},$$

$$C_1 = \frac{\sigma}{\eta^2 (1 + \exp(2\eta))}, \quad C_2 = \frac{\sigma \exp(2\eta)}{\eta^2 (1 + \exp(2\eta))}.$$

Отсюда находим

$$W(1) = \frac{2\sigma \exp(\eta)}{\eta^2 (1 + \exp(2\eta))}. \quad (4.2)$$

Поскольку далее будет важна зависимость  $W(1)$  от  $\eta$  (от  $q$ ), введем обозначение  $W[\eta](1)$  ( $W[\eta(q)](1)$ ). Обозначим правую часть в (4.2) символом  $\Upsilon(\eta)$ . Таким образом, в краткой записи  $\Upsilon(\eta) = W[\eta](1)$ .

Функция  $\Upsilon = \Upsilon(\eta)$  определена на промежутке  $(0, +\infty)$ , положительна на этом промежутке и строго монотонно убывает на нем, в силу того, что  $\Upsilon'(\eta) < 0$ ,  $\eta \in (0, +\infty)$ . Кроме того,

$$\lim_{\eta \rightarrow +0} \Upsilon(\eta) = +\infty, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \Upsilon(\eta) = +0.$$

Следовательно, каково бы ни было число  $W(1) \in (0, +\infty)$  найдется единственное число  $\eta \in (0, +\infty)$  такое, что  $\Upsilon(\eta) = W(1)$ .

Аналогично получаем, каково бы ни было число  $W(1) \in \Upsilon(\Theta)$ , где  $\Theta = [\lambda, \sqrt{\mu_4 + \lambda^2}]$ , найдется единственное число  $q \in [0, \mu_4]$  такое, что  $\Upsilon(\eta(q)) = W(1)$ . Это означает, что обратная задача в условиях примера имеет единственное решение.

Сформулируем получившиеся результаты в виде теоремы.

**Теорема 4.1.** *Обратная задача может иметь несколько решений. В условиях примера 4.2 обратная задача имеет единственное решение.*

## 5. Вариационный метод решение обратной задачи

Для решения обратной задачи воспользуемся вариационным методом [3–5]. Преобразуем исходную обратную задачу в экстремальную задачу на минимум некоторого подходящего функционала.

Приведем некоторые эвристические соображения, позволяющие сформулировать обратную задачу как некоторую вариационную задачу. Пусть наблюдаемый след  $\xi_* \in \Xi$  соответствует некоторому коэффициенту реакции  $q_* \in Q$ , т.е.  $\xi_* = \gamma T[q_*]$ . Рассмотрим неотрицательный функционал невязки (целевой функционал)

$$J(q) = \int_{\Gamma_3} (T[q] - \xi_*)^2 d\Gamma.$$

Данный функционал примет нулевое значение при  $q = q_*$ , поскольку  $\xi_* = \gamma T[q_*]$ . С другой стороны, всякий элемент  $q^* \in Q$ , на котором функционал невязки примет нулевое значение, можно принять за решение обратной задачи. Итак, искомым коэффициент  $q_* \in Q$  является минимизирующим элементом вариационной задачи

$$J(q) \rightarrow \inf : q \in Q. \quad (5.1)$$

Таким образом, от решения исходной обратной задачи можно перейти к решению вариационной задачи (5.1)

Сформулируем некоторый результат о минимизации функционала (5.1).

**Теорема 5.1.** *Вариационная задача (5.1) имеет на множестве  $Q$  хотя бы одну точку минимума. Множество  $Q_*$  всех точек минимума функционала  $J$  на множестве  $Q$  слабо компактно в пространстве  $L_2(\Omega)$ . Всякая минимизирующая последовательность задачи (5.1) слабо в пространстве  $L_2(\Omega)$  сходится ко множеству  $Q_*$ .*

**Доказательство** утверждений теоремы опирается на теорему Вейерштрасса о достижимости точек минимума непрерывным функционалом на компактном множестве [19, с. 502, 505]. И еще следует учесть, что множество  $Q$  компактно в слабой топологии пространства  $L_2(\Omega)$ , а функционал  $J$  непрерывен на  $Q$  в слабой топологии этого пространства. Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично [19, с. 505].

Теорема доказана.

## 6. Нахождение градиента целевого функционала и сопряженной задачи

Вычислим градиент функционала невязки  $J$ . Дадим аргументу  $q \in Q$  допустимое приращение  $h$ :  $q+h \in Q$ . Найдем приращение функционала  $J(q+h) - J(q)$  и выделим в нем главную линейную часть. Преобразуем приращение функционала

$$\begin{aligned} J(q+h) - J(q) &= \|T[q+h] - \xi\|_{L_2(\Gamma_3)}^2 - \|T[q] - \xi\|_{L_2(\Gamma_3)}^2 \\ &= 2 \langle T[q+h] - T[q], T[q] - \xi \rangle_{L_2(\Gamma_3)} + \|T[q+h] - T[q]\|_{L_2(\Gamma_3)}^2 \\ &= 2 \langle z, T[q] - \xi \rangle_{L_2(\Gamma_3)} + o(\|h\|_{L_2(\Omega)}). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Разность решений  $z = T[q+h] - T[q]$  удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k \nabla z) - (\mathbf{u}, \nabla z) - qz - hT[q] - hz &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ z &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ k \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Умножим (6.2) на пробную скалярную функцию  $w = w(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , результат проинтегрируем по области  $\Omega$ , воспользуемся формулой интегрирования по частям, формулами Грина и учтем граничные условия для  $z$  и свойства векторной функции  $\mathbf{u}$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} z \left( \operatorname{div} (k \nabla w) + (\mathbf{u}, \nabla w) - q w \right) dx - \int_{\Omega} h T[q] w dx - \int_{\Omega} h z w dx \\ + \int_{\Gamma_1} k \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma - \int_{\Gamma_2} k \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} z d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Пусть функция  $w$  удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} (k \nabla w) + (\mathbf{u}, \nabla w) - q w = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.4)$$

и граничным условиям

$$w = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (6.5)$$

$$k \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_3, \quad (6.6)$$

$$k \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 2(T[q] - \xi), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (6.7)$$

Систему (6.4)–(6.7) назовем сопряженной задачей к задаче (1.1)–(1.3). Поскольку далее будет важна зависимость решения сопряженной задачи от параметров  $q \in Q$  и  $\xi \in \Xi$ , то это решение иногда будем обозначать символом  $w = w[q, \xi]$ .

По аналогии с понятием обобщенного решения краевой задачи (1.1)–(1.3) введем понятие обобщенного решения краевой задачи (6.4)–(6.7). Обобщенным решением сопряженной краевой задачи (6.4)–(6.7) назовем функцию  $w \in H_0^1(\Omega)$ , удовлетворяющую интегральному равенству

$$\int_{\Omega} k (\nabla w, \nabla v) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} w (\mathbf{u}, \nabla v) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} q w v d\mathbf{x} + 2 \int_{\Gamma_3} (T[q] - \xi) v d\Gamma \quad (6.8)$$

для любой функции  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

**Теорема 6.1.** *При любых  $q \in Q$  и  $\xi \in \Xi$  сопряженная краевая задача (6.4)–(6.7) имеет единственное обобщенное решение  $w = w[q, \xi] \in H_0^1(\Omega)$ , для которого справедливо равенство*

$$\int_{\Omega} k (\nabla w, \nabla w) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} q w^2 d\mathbf{x} - 2 \int_{\Gamma_3} (T[q] - \xi) w d\Gamma = 0$$

и справедлива априорная оценка

$$\|w\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \nu^{-1} 2C \|T[q] - \xi\|_{L_2(\Gamma_3)}.$$

Если последовательность  $\{q_n\} \subset Q$  слабо в  $L_2(\Omega)$  сходится к элементу  $q_0 \in Q$ , последовательность  $\{\xi_n\} \subset \Xi$  сильно в  $L_2(\Gamma_3)$  сходится к элементу  $\xi_0$ , то последовательность решений сопряженной задачи  $\{w_n = w_n[q_n, \xi_n]\}$  сходится сильно в  $H_0^1(\Omega)$  к решению сопряженной задачи  $w_0 = w_0[q_0, \xi_0]$ .

**Доказательство.** Основные этапы доказательства теоремы повторяют этапы доказательства теоремы 2.1. Константа  $C$  — постоянная из теоремы вложения [15, с. 77]  $\|v\|_{L_2(\Gamma_3)} \leq C \|v\|_{W_2^1(\Omega)}$ .  $\square$

Подставим (6.4)–(6.7) в (6.3), в результате получим

$$\int_{\Omega} h T[q] w \, dx + \int_{\Omega} h z w \, dx + 2 \int_{\Gamma_3} z (T[q] - \xi) \, d\Gamma = 0. \quad (6.9)$$

Из (6.1) и (6.9) следует  $J(q + h) - J(q) = - \int_{\Omega} h T[q] w \, dx + o(\|h\|_{L_2(\Omega)})$ .

Таким образом, градиент целевого функционала вычисляется по формуле

$$\nabla J(q) = -T[q] w [q, \xi], \quad (6.10)$$

где  $w = w [q, \xi]$  — решение сопряженной задачи (6.4)–(6.7).

Опишем кратко последовательность действий при вычислении градиента  $\nabla J(q)$  функционала  $J$  в точке  $q \in Q$ . Сначала для данного  $q \in Q$  находится решение  $T [q]$  прямой задачи (1.1)–(1.3). Затем составляется и решается сопряженная задача (6.4)–(6.7), ее решение  $w = w [q, \xi]$  и решение прямой задачи  $T [q]$  подставляются в формулу (6.10), дающую искомый градиент.

**Теорема 6.2.** *При любых  $q \in Q$  и  $\xi \in \Xi$  справедливо равенство*

$$2 \int_{\Gamma_3} T [q] (T [q] - \xi) \, d\Gamma = - \int_{\Omega} f w [q, \xi] \, dx. \quad (6.11)$$

*Доказательство.* Положим в (1.4)  $g = w$ , в (6.8) положим  $v = T [q]$ , а затем из одного равенства вычтем другое. В результате получим (6.11).  $\square$

## 7. Необходимое условие минимума функционала невязки

Из (6.8) вытекает следующее условие минимума функционала невязки на множестве  $Q$ , которое сформулируем в виде теоремы.

**Теорема 7.1.** *Для минимизирующего элемента  $q_* \in Q_*$  и любых элементов  $q \in Q$ ,  $\xi \in \Xi$  выполняется неравенство*

$$\langle \nabla J(q_*), q - q_* \rangle_{L_2(\Omega)} = - \int_{\Omega} T [q_*] w [q_*, \xi] (q - q_*) \, dx \geq 0. \quad (7.1)$$

*Если  $q_*$  является внутренней точкой множества  $Q$ , то  $\nabla J(q_*) = 0$ .*

Систему уравнений (1.1)–(1.3), (6.4)–(6.7) и условие оптимальности (7.1) часто называют системой оптимальности.

Сформулированное необходимое условие минимума функционала невязки можно представить в форме интегрального принципа максимума

$$\int_{\Omega} T [q_*] w [q_*, \xi] q_* \, dx = \max \left\{ \int_{\Omega} T [q_*] w [q_*, \xi] q \, dx : q \in Q \right\}$$

или в виде локального принципа максимума

$$T [q_*](x) w [q_*, \xi](x) q_*(x) = \max \{ T [q_*](x) w [q_*, \xi](x) s : s \in [0, \mu_4] \}, \quad x \in \Omega.$$

## 8. Метод минимизации функционала невязки

Для решения вариационной задачи (5.1) применяется метод градиентного спуска [19–22]. Классическая формула градиентного спуска имеет вид

$$q^{(n+1)} = q^{(n)} - \lambda^{(n)} \nabla J(q^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.1)$$

где  $q^{(0)}$  — начальное приближение;  $\lambda^{(n)}$  — шаг спуска по минус градиенту;  $\nabla J(q^{(n)})$  — градиент функционала  $J$  в точке  $q^{(n)}$ .

Шаг спуска в градиентном методе (8.1) может вычисляться методом наискорейшего спуска

$$\lambda^{(n)} = J(q^{(n)}) \|\nabla J(q^{(n)})\|^{-2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для минимизации функционала невязки часто используется метод проекции градиента (см. [19–22]), классическая формула которого имеет вид

$$q^{(n+1)} = Pr(q^{(n)} - \lambda^{(n)} \nabla J(q^{(n)})), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $Pr$  — оператор проектирования на множество  $Q$ .

## 9. Численное моделирование решения обратной задачи

Для численного моделирования задачи (1.5) рассмотрим случай  $m = 2$ ,  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $k = 1$ ,  $\mathbf{u} = 0$ ,  $f = 1$ ,  $0 \leq q \leq 2$ ,  $T = 0$  на  $\Gamma_1 = \{(0, x_2) : 0 < x_2 < 1\} \cup \{(x_1, 0) : 0 < x_1 < 1\} \cup \{(1, x_2) : 0 < x_2 < 1\}$ ,  $\partial T / \partial \mathbf{n} = 0$  на  $\Gamma_2 = \{(x_1, 1) : 0 < x_1 < 1\}$  (см. рис. 1). Измерение температуры  $\xi(\cdot)$  производится на  $\Gamma_3 = \Gamma_2$ . Пусть требуется восстановить функцию

$$q_* = q_*(x_1, x_2) = 16 x_1 x_2 (1 - x_1) (1 - x_2).$$

В качестве начального приближения принималась функция  $q^{(0)} = q^{(0)}(x_1) = 0$ ,  $0 < x_1 < 1$ . Результаты измерений зашумлялись равномерно распределенной случайной величиной  $\text{Rand}$

$$\xi^*(x_1) = \xi(x_1) + 10^{-5} \text{Rand}(x_1), \quad 0 < \text{Rand}(x_1) < 1, \quad x_1 \in [0, 1].$$

Для численного моделирования решения обратной задачи были разработаны программные коды в пакете OpenFOAM. Для численных расчетов в области  $\Omega$  строилась сетка из  $10^4$  прямоугольных ячеек. Для аппроксимации краевых задач (1.1)–(1.3) и (6.4)–(6.7) применялся метод конечных объемов.

На рисунках на вертикальных осях откладываются: на рис. 2 — невязка  $J_n = J(q^{(n)})$ , на рис. 3 — норма градиента  $\nabla_n = \|\nabla J(q^{(n)})\|_{L_2(\Omega)}^2$ , на рис. 4 — точность  $\delta_n = \|q^{(n)} - q_*\|_{L_2(\Omega)}$ .

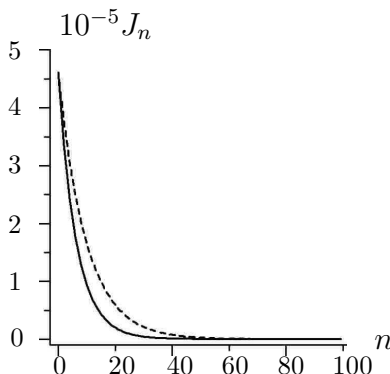


Рис. 2. Невязка.

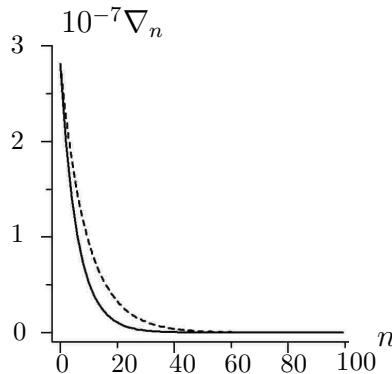


Рис. 3. Градиент.

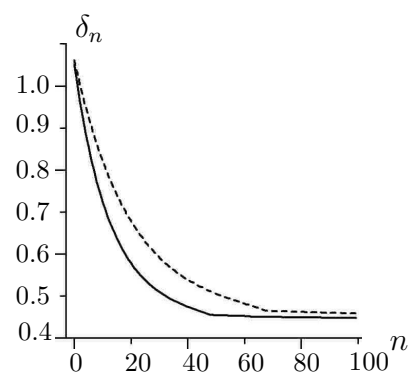


Рис. 4. Точность.

На горизонтальных осях откладываются номера итераций. Графики при расчетах с зашумленными данными изображены пунктирными линиями. Построенные приближения доставляют решение обратной задачи менее чем за 50 итераций с относительной погрешностью  $\approx 0.022$  ( $\delta_n / \|q_*\|_{L_2(\Omega)}$ ). Время расчетов 100 итераций на одном ядре Intel Xeon 2.2 ГГц  $\approx 15$  с. Далее итерационный процесс на данной сетке стабилизируется и не приводит к заметному уменьшению погрешности восстановления. При дальнейшем измельчении сетки погрешность вычислений уменьшается.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Марчук Г.И.** Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.
2. **Моисеев Н.Н.** Человек и ноосфера. М.: Молодая гвардия, 1990. 352 с.
3. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
4. **Иванов В.К., Васин В.К., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и их приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
5. **Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с.
6. **Короткий А.И., Ковтунов Д.А.** Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 88–97.
7. **Короткий А.И., Цепелев И.А., Исмаил-Заде А.Т.** Ассимиляция данных о свободной поверхности потока жидкости для нахождения ее вязкости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 2. С. 143–157. doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-143-157
8. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961, 652 p. ISBN: 048664071X.
9. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
10. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. 204 с.
11. **Алексеев Г.В., Терешко Д.А.** Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 365 с.
12. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
13. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.
14. **Adams R.A.** Sobolev spaces. NY: Acad. Press, 1975. 268 p.
15. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
16. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.
17. **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 590 с.
18. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 5. М.: Физматлит, 1959. 657 с.
19. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
20. **Nocedal J., Wright S.J.** Numerical optimization. NY: Springer, 1999. 664 p. ISBN: 0-387-30303-0.
21. **Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O.** Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems. Berlin, NY: Walter de Gruyter, 2008. 202 p. (Radon Ser. Comp. Appl. Math.; vol. 6). ISBN: 311020827X.
22. **Wolfe P.** Convergence conditions for ascent methods II: Some corrections // SIAM Review. Vol. 13. 1971. P. 85–188. doi: 10.1137/1013035

Поступила 3.03.2023  
 После доработки 17.03.2023  
 Принята к публикации 20.03.2023

Короткий Александр Илларионович  
 д-р физ.-мат. наук, профессор  
 зав. отделом

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург  
e-mail: korotkii@imm.uran.ru

Цепелев Игорь Анатольевич  
канд. физ.-мат. наук  
старший науч. сотрудник  
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН  
г. Екатеринбург  
e-mail: tsepelev@imm.uran.ru

## REFERENCES

1. Marchuk G.I. *Mathematical models in environmental problems*. Amsterdam, Elsevier, 1986, 218 p. Original Russian text was published in Marchuk G.I. *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchei sredy*, Moscow, Nauka Publ., 1982, 319 p.
2. Moiseev N.N. *Chelovek i noosphera* [Human and the noosphere], Moscow, Molodaya Gvardiya Publ., 1990, 352 p. ISBN 5-235-01070-1.
3. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. *Solutions of Ill-Posed Problems*. Washington DC, Winston and Sons, 1977, 137 p. ISBN:0470991240. Translated to Russian under the title *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1979, 288 p.
4. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of Linear Ill-Posed Problems and its applications*, Utrecht, VSP, 2002, 281 p. ISBN: 906764367X. Original Russian text published in Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ih prilozheniya*, Moscow: Mir Publ., 1978, 206 p.
5. Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and applications*. Berlin, Walter de Gruyter, 2011, 475 p. ISBN: 3110224011. Original Russian text published in Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi*, Novosibirsk, Sibirskoe Nauchn. Izd., 2009, 457 p.
6. Korotkii A.I., Kovtunov D.A. Reconstruction of boundary regimes in the inverse problem of thermal convection of a high-viscosity fluid. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2006, vol. 255, suppl. 2, pp. 81–92. doi: 10.1134/S0081543806060071
7. Korotkii A.I., Tsepelev I.A., Ismail-Zadeh A.T. Assimilating data on the free surface of a fluid flow to constrain its viscosity. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2022, vol. 319, Suppl. 1, pp. 162–174. doi: 10.1134/S0081543822060141
8. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford: Clarendon Press, 1961, 652 p. ISBN: 048664071X.
9. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid mechanics*. Pergamon, Oxford, 1987, 539 p. ISBN: 9781483161044. Original Russian text published in Landau L.D., Lifshits E.M. *Gidrodinamika*, Moscow, Nauka Publ., 1986, 736 p.
10. Ladyzhenskaya O.A. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. NY: Gordon and Breach, 1987, 224 p. ISBN: 0677207603. Original Russian text published in Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoi neshhimaemoi zhidkosti*, Moscow, Fitmatgiz, 1961, 204 p.
11. Alekseev G.V., Tereshko D.A. *Analiz i optimizatsiya v gidrodinamike vyazkoi zhidkosti* [Analysis and optimization in viscous fluid dynamics]. Vladivostok, Dal'nauka Publ., 2008, 365 p. ISBN: 5804410458.
12. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva, N.N. Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa [Linear and quasilinear equations of elliptic type]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 576 p.
13. Mikhailov V.P. *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 392 p.
14. Adams R.A. *Sobolev spaces*. NY, Acad. Press, 1975, 268 p.
15. Ladyzhenskaya O.A. *The boundary value problems of mathematical physics*. Berlin, Heidelberg, NY, Springer-Verlag, 1985, 322 p. doi: 10.1007/978-1-4757-4317-3 Original Russian text was published in Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki*, Moscow, Nauka Publ., 1973, 408 p.
16. Sobolev S.L. *Some application of functional analysis in mathematical physics*. Providence: Amer. Math. Soc., 1991, 286 p. ISBN 5-02-013756-1. Original Russian text was published in Sobolev S.L. *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike*, Moscow, Nauka Publ., 1988, 336 p.
17. Rektorys K. *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike i tekhnike* [Variational methods in mathematics, science and engineering]. Moscow, Mir Publ., 1985, 590 p.



18. Smirnov V.I. *Kurs vysshei matematiki* [A course of higher mathematics], vol. 5. Moscow: Fizmatlit Publ., 1959, 657 p.
19. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization Methods]. Moscow, Faktorial Press, 2002, 824 p. ISBN 5-88688-056-9.
20. Nocedal J., Wright S.J. *Numerical optimization*. NY, Springer, 1999. 664 p. ISBN-10: 0-387-30303-0.
21. Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O. *Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems*. Radon Ser. Comp. Appl. Math., vol. 6, Berlin, NY, Walter de Gruyter, 2008, 202 p. ISBN: 311020827X.
22. Wolfe P. Convergence conditions for ascent methods II: Some corrections. In: *SIAM Review*, vol. 13, 1971, pp. 85–188. doi: 10.1137/1013035

Received March 3, 2023

Revised March 17, 2023

Accepted March 20, 2023

*Alexander Illarionovich Korotkii*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: korotkii@imm.uran.ru .

*Igor Anatolievich Tsepelev*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: tsepelev@imm.uran.ru .

Cite this article as: Korotkii A.I., Tsepelev I.A. Assimilation of boundary data for reconstructing absorption coefficient in a model of stationary reaction-convection-diffusion. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 87–103 .