

УДК 517.95

ЗАДАЧА ОБ ИНИЦИИРОВАНИИ ДИФФУЗИОННОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА¹

А. Л. Казаков, П. А. Кузнецов, Л. Ф. Спевак

В научной школе А. Ф. Сидорова важное место занимают исследования нелинейных вырождающихся параболических уравнений. В частности, с 80-х годов прошлого века изучается задача об иницировании тепловой волны. Целью настоящего исследования является распространение результатов по данной тематике А. Ф. Сидорова и его учеников, включая авторов статьи, на случай систем соответствующего вида. Показано, что тепловая (диффузионная) волна для системы имеет более сложную (трехчастную) структуру, являющуюся следствием того, что нулевые фронты для искомым функций различны. Доказана теорема существования и единственности кусочно-аналитического решения рассмотренной задачи, которое представлено в виде специальных рядов. Найдено точное решение искомого вида, построение которого сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. Последние удалось проинтегрировать в квадратурах. Предложен алгоритм на основе метода коллокаций, позволяющий эффективно строить приближенное решение рассмотренной задачи на заданном временном промежутке. Выполнены иллюстрирующие численные расчеты. Поскольку доказать утверждение о сходимости метода в данном случае не удалось (подобное для нелинейных вырождающихся уравнений и систем вообще возможно далеко не всегда), для верификации результатов расчетов использованы точные решения — как полученные в данной работе, так и ранее известные.

Ключевые слова: нелинейная параболическая система, вырождение, теорема существования, специальный ряд, точное решение, метод коллокаций, вычислительный эксперимент.

A. L. Kazakov, P. A. Kuznetsov, L. F. Spevak. The problem of diffusion wave initiation for a nonlinear second-order parabolic system.

The study of nonlinear singular parabolic equations occupies a key place in the scientific school of A. F. Sidorov. In particular, the problem on initiating a heat wave has been studied since the 1980s. The present study aims to extend the results of Sidorov and his followers, including the authors, to the case of systems of the corresponding type. We find that the heat (diffusion) wave for the system considered has a more complex (three-part) structure, which follows from the fact that the zero fronts are different for the unknown functions. A theorem on the existence and uniqueness of a piecewise analytical solution, which has the form of special series, is proved. We find an exact solution of the desired type, the construction of which is reduced to the integration of ordinary differential equations (ODEs). We managed to integrate the ODEs by quadratures. In addition, we propose an algorithm based on the collocation method, which allows us to effectively construct an approximate solution on a given time interval. Illustrative numerical calculations are performed. Since we have not managed to prove the convergence in this case (this is far from always possible for nonlinear singular equations and systems), exact solutions, both obtained in this paper and previously known, have been used to verify the calculation results.

Keywords: nonlinear parabolic system, singularity, existence theorem, special series, exact solution, collocation method, computational experiment.

MSC: 35K40, 35K51, 35K65

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-67-86

Введение

В творческом наследии А. Ф. Сидорова [1] важное место занимают работы, в которых были рассмотрены параболические уравнения конвекции и нелинейной фильтрации (теплопроводности). По данной тематике им было опубликовано всего несколько статей [2–4], однако они

¹Исследования А. Л. Казакова и П. А. Кузнецова выполнены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту “Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механике жидкости и газа”, № гос. регистрации 121041300058-1.

отличаются богатством идей, которые стали пионерскими и имели (да и до сих пор имеют) огромный потенциал развития. В частности, значимым результатом, по мнению коллег и соратников Анатолия Федоровича [5], является адаптация разработанного ранее для гиперболических задач метода специальных рядов к решению задачи А. Д. Сахарова об иницировании тепловой волны; в том числе был рассмотрен двумерный случай [6] с переходом в полярные координаты, который, в частности, остался за рамками рассмотрения в работе [7]. В дальнейшем данное направление получило широкое развитие в научной школе А. Ф. Сидорова [8–10]. Был рассмотрен широкий спектр постановок при различных размерностях (см., например, [11–13]). Тем не менее до 2020 г. исследования касались только отдельных уравнений (особняком стоит работа одного из авторов десятилетней давности [14]).

Систематические исследования диффузионных (тепловых) волн для систем двух нелинейных параболических уравнений было начато три года назад работой [15]. Однако до 2022 г. рассматривались только решения, имеющие единый диффузионный фронт, т. е. при совпадении нулевых фронтов для обеих искомым функций [16; 17].

Более интересный с точки зрения приложений (и сложный с точки зрения математики) случай, когда нулевые фронты для двух искомым функций различны, впервые стал объектом изучения в [18]. Была доказана теорема существования и единственности решения типа диффузионной волны для случая, когда нулевые фронты известны, предложен вычислительный алгоритм на основе метода коллокаций с использованием радиальных базисных функций.

Новая постановка потребовала расширить понятие диффузионной (тепловой, фильтрационной) волны, под которой традиционно, со времен А. Ф. Сидорова, понималось составное решение из двух частей: неотрицательной и нулевой, непрерывно состыкованных между собой вдоль некоторой линии (поверхности) — фронта волны. Для случая двух различных нулевых фронтов диффузионная волна состоит уже из трех частей: 1) обе функции положительны; 2) одна из функций положительна, другая равна нулю; 3) обе функции равны нулю (трехчастная структура). Фронтом диффузионной волны по-прежнему является граница, на которой равны нулю обе искомые функции, причем хотя бы одна из них положительна по одну сторону этой границы.

В настоящей работе рассматривается задача об иницировании диффузионной волны заданным краевым режимом для нелинейной параболической системы, которая является аналогом задачи А. Д. Сахарова. Доказывается теорема существования и единственности, обобщающая теорему А. Ф. Сидорова [1] (см. также [7; 11]). При этом показано, что диффузионная волна в данном случае, вообще говоря, имеет трехчастную структуру. Строится пример точного решения, обладающего указанными свойствами. Отметим, что в работе [19], где рассматривается похожий пример, трехчастная структура диффузионной волны ошибочно не учитывается. Также в настоящей статье предложен алгоритм численного решения, основанный на методе коллокаций с применением разложений по радиальным базисным функциям, который был верифицирован с помощью точных решений, в том числе новых.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему параболических уравнений [20] второго порядка

$$u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma}u_x^2 + F(u, v), \quad v_t = vv_{xx} + \frac{1}{\delta}v_x^2 + G(v, u), \quad (1.1)$$

где t, x — скалярные независимые переменные, $u(t, x), v(t, x)$ — неизвестные функции, F, G — известные достаточно гладкие функции своих аргументов такие, что справедливо равенство $F(0, 0) = G(0, 0) = 0$. Наконец, $\sigma, \delta > 0$ — константы. Система (1.1) в литературе именуется системой реакции-диффузии [21] и является обобщением классического уравнения нелинейной теплопроводности [22] (фильтрации [1]), которое в зарубежной литературе именуется “the

porous medium equation" [23]. Такие математические объекты применяются (в различных модификациях) для описания реакционных и диффузионных процессов [21; 24] и моделирования взаимодействия биологических видов [25].

Для системы (1.1) рассмотрим следующие граничные условия:

$$u|_{x=0} = f(t), \quad v|_{x=0} = g(t). \tag{1.2}$$

Здесь $f(t), g(t)$ — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $f(0) = g(0) = 0, f'(0) > 0, g'(0) > 0$. Отметим, что в начале координат параболический тип системы (1.1) вырождается [26]. Вырождающиеся параболические уравнения являются предметом активного изучения с середины прошлого века, когда вышла классическая работа [27], однако обычно речь идет о доказательстве существования решений и изучении их свойств в различных функциональных пространствах без построения решения в явном виде (см., например, [28; 29]). Постановка (1.1), (1.2) в случае одного уравнения является задачей об иницировании тепловой волны [1, с. 10]. Для нее более 30 лет назад доказана теорема существования и единственности кусочно-аналитического решения в виде специального ряда [3; 4] (см. также [7; 11]). В приведенной постановке задача, насколько нам известно, ранее не рассматривалась. Представленные в следующем разделе результаты обобщают исследования А. Ф. Сидорова и его учеников, включая авторов статьи [12; 13].

2. Основная теорема

Под аналитической в точке здесь и далее понимается функция, совпадающая в некоторой ее окрестности со своим тейлоровским разложением. Для удобства введем обозначения

$$f_i = \frac{\partial^i f}{\partial t^i} \Big|_{t=0}, \quad g_i = \frac{\partial^i g}{\partial t^i} \Big|_{t=0}, \quad F_{i,j} = \frac{\partial^{i+j} F}{\partial t^i \partial x^j} \Big|_{t=x=0}, \quad G_{i,j} = \frac{\partial^{i+j} G}{\partial t^i \partial x^j} \Big|_{t=x=0}, \quad i, j = 0, 1, \dots$$

Теорема 1. Пусть для задачи (1.1), (1.2) выполняются следующие условия:

- 1) f, g и F, G — аналитические функции при $t = 0$ и $u = v = 0$ соответственно;
- 2) $f(0) = g(0) = 0, f'(0), g'(0) > 0, F(0, 0) = G(0, 0) = 0$;
- 3) $u_{0,1} \cdot v_{0,1} > 0$.

Тогда при выборе знаков величин $u_{0,1}, v_{0,1}$ задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение, аналитическое в точке $(0, 0)$.

Доказательство. Вначале построим решение задачи (1.1), (1.2) в виде двойных степенных рядов Тейлора

$$u(t, x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} u_{i,j} \frac{t^i x^j}{i! j!}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial^{i+j} u}{\partial t^i \partial x^j} \Big|_{t=x=0}, \tag{2.1}$$

$$v(t, x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} v_{i,j} \frac{t^i x^j}{i! j!}, \quad v_{i,j} = \frac{\partial^{i+j} v}{\partial t^i \partial x^j} \Big|_{t=x=0}. \tag{2.2}$$

Из краевого условия (1.2) следуют равенства $u_{i,0} = f_i, v_{i,0} = g_i$, в которых f_i, g_i — коэффициенты рядов Тейлора

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \frac{t^i}{i!}, \quad g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \frac{t^i}{i!}. \tag{2.3}$$

По условию 1 теоремы ряды (2.3) имеют непустой круг сходимости и сходятся в нем к функциям f и g . Кроме того, согласно условию 2 справедливо равенство $u_{0,0} = v_{0,0} = 0$.

Положим теперь в системе (1.1) t и x равными нулю. Получим равенства

$$f_1 = \frac{1}{\sigma} u_{0,1}^2, \quad g_1 = \frac{1}{\delta} v_{0,1}^2,$$

разрешая которые, найдем коэффициенты

$$u_{0,1} = \pm\sqrt{\sigma f_1}, \quad v_{0,1} = \pm\sqrt{\delta g_1}.$$

Далее коэффициенты определяются индукцией по порядку дифференцирования системы (1.1) по t и x .

Продифференцируем систему (1.1) по t и положим $t = x = 0$:

$$f_2 = f_1 u_{0,2} + \frac{2}{\sigma} u_{0,1} u_{1,1} + F_{1,0}, \quad g_2 = g_1 v_{0,2} + \frac{2}{\delta} v_{0,1} v_{1,1} + G_{1,0}. \quad (2.4)$$

Дифференцирование по x дает систему

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) u_{0,1} u_{0,2} + F_{0,1}, \\ v_{1,1} &= \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) v_{0,1} v_{0,2} + G_{0,1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Коэффициенты $u_{1,1}$, $u_{0,2}$ определяются из первых уравнений систем (2.4) и (2.5):

$$\begin{aligned} u_{0,2} &= \frac{\sigma}{f_1(4+3\sigma)} \left(f_2 \mp 2F_{0,1} \sqrt{\frac{f_1}{\sigma}} - F_{1,0} \right), \\ u_{1,1} &= \frac{(2+\sigma) \left[\pm \sqrt{\sigma f_1} (f_2 - F_{1,0}) - \sigma f_1 F_{0,1} \right]}{f_1(4+3\sigma)} + F_{0,1}. \end{aligned}$$

Коэффициенты $v_{1,1}$, $v_{0,2}$ определяются аналогично из вторых уравнений систем (2.4) и (2.5):

$$\begin{aligned} v_{0,2} &= \frac{\delta}{g_1(4+3\delta)} \left(g_2 \mp 2G_{0,1} \sqrt{\frac{g_1}{\delta}} - G_{1,0} \right), \\ v_{1,1} &= \frac{(2+\delta) \left[\pm \sqrt{\delta g_1} (g_2 - G_{1,0}) - \delta g_1 G_{0,1} \right]}{g_1(4+3\delta)} + G_{0,1}. \end{aligned}$$

Понятно, что на каждом конкретном шаге коэффициенты $u_{i,j}$ будут определяться из первого уравнения системы (1.1), а коэффициенты $v_{i,j}$ — из второго. Применим теперь к первому уравнению исходной системы дифференциальные операторы

$$D[.] = \frac{\partial^n [.]}{\partial t^{n-k} \partial x^k} \Big|_{t=x=0}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Получим равенства

$$\begin{aligned} u_{k+1, n-k} &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{i,j} u_{k-i, n+2-k-j} \\ &+ \frac{1}{\sigma} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{i, j+1} u_{k-i, n+1-k-j} + F_{k, n-k}, \end{aligned} \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Выведем теперь общую рекуррентную формулу. Для этого выделим в (2.7) коэффициенты наивысшего порядка:

$$u_{1, n} - \left(n + \frac{2}{\sigma} \right) u_{0,1} u_{0, n+1} = L_{0, n}, \quad k = 0, \quad (2.8)$$

$$u_{k+1, n-k} - \left[(n-k) + \frac{2}{\sigma} \right] u_{0,1} u_{k, n+1-k} - k f_1 u_{k-1, n+2-k} = L_{k, n-k}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (2.9)$$

$$-n f_1 u_{n-1, 2} - \frac{2}{\sigma} u_{0,1} u_{n, 1} = L_{n, 0} - f_{n+1}, \quad k = n. \quad (2.10)$$

Для удобства здесь использованы следующие обозначения:

$$L_{0,n} = \sum_{j=2}^n C_n^j u_{0,j} u_{0,n+2-j} + \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j u_{0,j+1} u_{0,n+1-j} + F_{0,n},$$

$$L_{k,n-k} = \sum_{\substack{i=0 \\ i+j \neq 0}}^k \sum_{\substack{j=0 \\ i+j \neq n}}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{i,j} u_{k-i,n+2-k-j} + \frac{1}{\sigma} \sum_{\substack{i=0 \\ i+j \neq 0}}^k \sum_{\substack{j=0 \\ i+j \neq n}}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{i,j+1} u_{k-i,n+1-k-j} + F_{k,n-k}.$$

Полагая $k = 0, 1, \dots, n$, получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & b_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & b_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & a_{n-1} & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n,1} \\ u_{n-1,2} \\ u_{n-2,3} \\ \dots \\ u_{2,n-1} \\ u_{1,n} \\ u_{0,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n,0} - f_{n+1} \\ L_{n-1,1} \\ L_{n-2,2} \\ \dots \\ L_{2,n-2} \\ L_{1,n-1} \\ L_{0,n} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

в которой a_m и b_l определяются по формулам

$$a_m = \mp \left(m + \frac{2}{\sigma} \right) \sqrt{\sigma f_1}, \quad m = 0, 1, \dots, n; \quad b_{n-l} = -(n-l)f_1, \quad l = 0, 1, \dots, n-1.$$

Индукцией по n можно показать, что квадратная трехдиагональная матрица в левой части уравнения (2.11) невырождена и, следовательно, обратима. Подробное доказательство данного факта приведено в статье [12, лемма 1, с. 59–60].

Чтобы вывести формулу для $v_{i,j}$, нужно повторить аналогичные рассуждения для второго уравнения системы (1.1). Применяя к нему оператор (2.6), получим формулу

$$v_{k+1,n-k} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j v_{i,j} v_{k-i,n+2-k-j} + \frac{1}{\delta} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j v_{i,j+1} v_{k-i,n+1-k-j} + G_{k,n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.12)$$

Равенства (2.12) также можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} p_0 & q_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & p_1 & q_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p_2 & q_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & p_{n-1} & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_{n,1} \\ v_{n-1,2} \\ v_{n-2,3} \\ \dots \\ v_{2,n-1} \\ v_{1,n} \\ v_{0,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{n,0} - g_{n+1} \\ K_{n-1,1} \\ K_{n-2,2} \\ \dots \\ K_{2,n-2} \\ K_{1,n-1} \\ K_{0,n} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

в котором использованы обозначения

$$p_m = \mp \left(m + \frac{2}{\delta} \right) \sqrt{\delta g_1}, \quad m = 0, 1, \dots, n; \quad q_{n-l} = -(n-l)g_1, \quad l = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$K_{0,n} = \sum_{j=2}^n C_n^j v_{0,j} v_{0,n+2-j} + \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j v_{0,j+1} v_{0,n+1-j} + G_{0,n},$$

$$K_{k,n-k} = \sum_{\substack{i=0 \\ i+j \neq 0}}^k \sum_{\substack{j=0 \\ i+j \neq 1}}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j v_{i,j} v_{k-i,n+2-k-j} + \frac{1}{\delta} \sum_{\substack{i=0 \\ i+j \neq 0}}^k \sum_{\substack{j=0 \\ i+j \neq n}}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j v_{i,j+1} v_{k-i,n+1-k-j} + G_{k,n-k}.$$

Трехдиагональная матрица в левой части (2.13) также невырождена. Отметим, что подобные трехдиагональные системы возникают и при исследовании гиперболических задач [30].

Чтобы получить рекуррентные формулы коэффициентов, воспользуемся методом прогонки [31, §5]. Для удобства введем обозначения

$$u_{i,j} = (\sqrt{f_1})^{-j} U_{i,j}, \quad v_{i,j} = (\sqrt{g_1})^{-j} V_{i,j}. \quad (2.14)$$

Система (2.11) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} A_0 & -n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & A_1 & 1-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A_2 & 2-n & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & A_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & A_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_{n,1} \\ U_{n-1,2} \\ U_{n-2,3} \\ \dots \\ U_{2,n-1} \\ U_{1,n} \\ U_{0,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sqrt{f_1})^0 L_{n,0} - f_{n+1} \\ (\sqrt{f_1})^1 L_{n-1,1} \\ (\sqrt{f_1})^2 L_{n-2,2} \\ \dots \\ (\sqrt{f_1})^{n-2} L_{2,n-2} \\ (\sqrt{f_1})^{n-1} L_{1,n-1} \\ (\sqrt{f_1})^n L_{0,n} \end{pmatrix},$$

система (2.13) — в виде

$$\begin{pmatrix} P_0 & -n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & P_1 & 1-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & P_2 & 2-n & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & P_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & P_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_{n,1} \\ V_{n-1,2} \\ V_{n-2,3} \\ \dots \\ V_{2,n-1} \\ V_{1,n} \\ V_{0,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sqrt{g_1})^0 K_{n,0} - g_{n+1} \\ (\sqrt{g_1})^1 K_{n-1,1} \\ (\sqrt{g_1})^2 K_{n-2,2} \\ \dots \\ (\sqrt{g_1})^{n-2} K_{2,n-2} \\ (\sqrt{g_1})^{n-1} K_{1,n-1} \\ (\sqrt{g_1})^n K_{0,n} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

На главных диагоналях матриц в левых частях стоят элементы

$$A_m = \mp \left(m + \frac{2}{\sigma} \right) \sqrt{\sigma}, \quad P_m = \mp \left(m + \frac{2}{\delta} \right) \sqrt{\delta}, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Предположим теперь, что все коэффициенты $U_{k,n-k}$, $V_{k,n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$ определены. Следуя методу прогонки, представим коэффициент $U_{k,n+1-k}$ в виде

$$U_{k,n+1-k} = \xi_{k+1} U_{k+1,n-k} + \eta_{k+1}, \quad k = 0, \dots, n, \quad (2.16)$$

где ξ_{k+1} , η_{k+1} — пока еще не известные коэффициенты. С помощью формулы (2.16) выражаем коэффициент

$$U_{k-1,n+2-k} = \xi_k U_{k,n+1-k} + \eta_k. \quad (2.17)$$

Подставляя (2.14), (2.16), (2.17) в формулы (2.8), (2.9), (2.10), находим ξ_{k+1} и η_{k+1} :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{1}{A_n}, \quad \dots, \quad \xi_{k+1} = \frac{1}{k\xi_k - A_{n-k}}; \\ \eta_1 &= \frac{(\sqrt{f_1})^n L_{0,n}}{A_n}, \quad \dots, \quad \eta_{k+1} = \frac{(\sqrt{f_1})^{n-k} L_{k,n-k} + k\eta_k}{A_{n-k} - k\xi_k}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Вернемся теперь к формуле (2.16). Положив $k = n$, пользуясь формулой (2.18), найдем коэффициент

$$U_{n,1} = \frac{f_{n+1} - L_{n,0} - n\eta_n}{n\xi_n - A_0}. \quad (2.19)$$

Подставляя (2.18) в (2.17), мы получаем рекуррентную формулу для оставшихся коэффициентов

$$U_{k,n+1-k} = \frac{U_{k+1,n-k}}{k\xi_k - A_{n-k}} + \frac{(\sqrt{f_1})^{n-k} L_{k,n-k} + k\eta_k}{A_{n-k} - k\xi_k}, \quad k = n-1, \dots, 1, 0. \quad (2.20)$$

Аналогичные рассуждения несложно повторить для системы (2.15). Получим равенства

$$V_{n,1} = \frac{g_{n+1} - K_{n,0} - n\nu_n}{n\mu_n - P_0}, \quad (2.21)$$

$$V_{k,n+1-k} = \frac{V_{k+1,n-k}}{k\mu_k - P_{n-k}} + \frac{(\sqrt{g_1})^{n-k} K_{k,n-k} + k\nu_k}{P_{n-k} - k\mu_k}, \quad k = n-1, \dots, 1, 0, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{1}{P_n}, \quad \dots, \quad \mu_{k+1} = \frac{1}{k\mu_k - P_{n-k}}; \\ \nu_1 &= \frac{(\sqrt{g_1})^n K_{0,n}}{P_n}, \quad \dots, \quad \nu_{k+1} = \frac{(\sqrt{g_1})^{n-k} K_{k,n-k} + k\nu_k}{P_{n-k} - k\mu_k}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Таким образом, коэффициенты рядов (2.1), (2.2) определяются однозначно согласно формулам (2.14) и (2.18)–(2.20), (2.21)–(2.23). Формальное решение в виде специальных рядов построено, причем коэффициенты определяются однозначно.

Сходимость рядов доказывается методом мажорант с использованием стандартной процедуры, ранее неоднократно применявшейся авторами. При этом вид системы позволяет построить общую мажоранту для обеих искомых функций и свести доказательство к ранее доказанной теореме 1 для одного уравнения [11; 12].

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Решение задачи (1.1), (1.2) в виде формальных рядов (2.1), (2.2) также строится по описанной в ходе доказательства теоремы 1 процедуре в случае, когда $u_{0,1}v_{0,1} < 0$. Выполнение условия $u_{0,1}v_{0,1} > 0$ требуется для того, чтобы использовать для обеих искомых функций общую мажоранту.

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 1 существует единственное кусочно-аналитическое решение задачи (1.1), (1.2), которое является диффузионной волной, имеющей в общем случае трехчастную структуру, причем выбор знаков величин $u_{0,1}, v_{0,1}$ определяет направление движения волны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определенности предположим, что $u_{0,1} < 0, v_{0,1} < 0$. Тогда из $u_{1,0} > 0, v_{1,0} > 0$ (см. доказательство теоремы) следует, что в окрестности точки $t = 0, x = 0$ при $t \geq 0$ существуют линии $x = a(t), a(0) = 0, a'(0) > 0, x = a_*(t), a_*(0) = 0, a'_*(0) > 0$, являющиеся нулевыми фронтами: $u|_{x=a(t)} = 0, v|_{x=a_*(t)} = 0$.

Пусть для определенности в рассматриваемой окрестности $a_*(t) \geq a(t)$. Тогда при $0 \leq x \leq a(t)$ обе искомые функции неотрицательны, и ряды (2.1), (2.2), построенные при доказательстве теоремы 1, определяют первую часть диффузионной волны.

При $a(t) \leq x \leq a_*(t)$ имеем, что $u(t, x) \leq 0$, поэтому в этой (второй) области диффузионной волны примем $u \equiv 0$. Тогда вторая искомая функция находится из решения задачи

$$v_t = vv_{xx} + \frac{1}{\delta}v_x^2 + G(v, 0), \quad v_{x=a(t)} = v_0(t), \quad (2.24)$$

где $v_0(t) = v(t, a(t)) \geq 0$ — решение (2.2) на фронте $x = a(t)$. Задача (2.24) подпадает под действие ранее доказанных теорем (см., например, [11; 12]), которые гарантируют существование и единственность решения с искомыми свойствами. В частности, существует линия $x = b(t)$, не совпадающая с $x = a_*(t)$, такая, что $v|_{x=b(t)} = 0$, т. е. $x = b(t)$ — фронт диффузионной волны.

Наконец, при $x \geq b(t)$ справедливы тождества $u \equiv 0, v \equiv 0$ (третья часть диффузионной волны, нулевой фон). Можно видеть, что построенная диффузионная волна движется вправо от $x = 0$. Случай $u_{0,1} > 0, v_{0,1} > 0$ рассматривается аналогично, диффузионная волна здесь движется влево.

Следствие доказано.

3. Точные решения

В научной школе А. Ф. Сидорова традиционно значительное внимание уделяется нахождению и исследованию точных решений нелинейных уравнений математической физики. Подобные математические объекты в содержательных случаях отыскать удается нечасто. Как писал сам Анатолий Федорович, “их построение — редкая удача Если решения содержат различные особенности, . . . их естественно использовать в качестве тестов при исследовании приближенных численных методов” [1, с. 15]. В его собственных статьях, посвященных нелинейным параболическим уравнениям, точные решения не рассматривались, однако они представлены и изучены в работах учеников [32; 33].

Построим для задачи (1.1), (1.2) точные решения, которые в дальнейшем будем использовать для тестирования численных расчетов. Ранее авторами были получены и исследованы точные решения нелинейных параболических систем, включая систему (1.1), имеющие вид обобщенной бегущей волны и обобщенно-автомодельные, однако рассматривались только такие решения, у которых нулевые фронты для искомых функций совпадают [15–17]. Здесь мы получим и исследуем решения, у которых для искомых функций нулевые фронты различные.

Рассмотрим систему (1.1) в случае, когда функции $F(u, v)$ и $G(u, v)$ являются линейными:

$$u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma}u_x^2 + \alpha_1u + \alpha_2v, \quad v_t = vv_{xx} + \frac{1}{\delta}v_x^2 + \beta_1u + \beta_2v. \quad (3.1)$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Учитывая линейность слагаемых, не содержащих производные, воспользуемся аддитивным разделением переменных [34] и будем искать решения (3.1) в виде

$$u = \varphi_1(x) + \psi_1(t), \quad v = \varphi_2(x) + \psi_2(t). \quad (3.2)$$

Подставив выражение (3.2) в систему (3.1), получим, что

$$\psi_1'(t) = [\varphi_1(x) + \psi_1(t)]\varphi_1''(x) + \frac{1}{\sigma}[\varphi_1'(x)]^2 + \alpha_1[\varphi_1(x) + \psi_1(t)] + \alpha_2[\varphi_2(x) + \psi_2(t)],$$

$$\psi_2'(t) = [\varphi_2(x) + \psi_2(t)]\varphi_2''(x) + \frac{1}{\delta}[\varphi_2'(x)]^2 + \beta_1[\varphi_1(x) + \psi_1(t)] + \beta_2[\varphi_2(x) + \psi_2(t)].$$

Можно видеть, что необходимым условием разделения переменных в данном случае является выполнение равенств $\varphi_i''(x) = \text{const}$, $i = 1, 2$, т.е. $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ должны быть многочленами второй степени. С учетом того, что постоянные слагаемые можно отнести как к функциям $\varphi_i(x)$, так и к функциям $\psi_i(t)$, будем далее искать точные решения (3.1) в виде

$$u = \phi_1(x + R_1)^2 + \psi_1(t), \quad v = \phi_2(x + R_2)^2 + \psi_2(t), \quad (3.3)$$

где R_1, R_2, ϕ_1, ϕ_2 — константы. Подставим анзац (3.3) в систему (3.1) и разделим переменные. В левых частях полученных равенств находятся $\psi_1'(t)$ и $\psi_2'(t)$ соответственно. Приравняв к нулю содержащие x слагаемые в правых частях и дополнительно потребовав, чтобы $R_1 = R_2 = R$, получим систему алгебраических уравнений

$$\left(2 + \frac{4}{\sigma}\right)\phi_1^2 + \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 = 0, \quad \left(2 + \frac{4}{\delta}\right)\phi_2^2 + \beta_2\phi_2 + \beta_1\phi_1 = 0. \quad (3.4)$$

Приравняв между собой слагаемые, содержащие t , получим систему ОДУ

$$\psi_1'(t) = (2\phi_1 + \alpha_1)\psi_1(t) + \alpha_2\psi_2(t), \quad \psi_2'(t) = (2\phi_2 + \beta_2)\psi_1(t) + \beta_1\psi_1(t). \quad (3.5)$$

Любые константы и функции, удовлетворяющие (3.4), (3.5), позволяют построить решения системы (3.1) вида (3.3). Однако для удобства и наглядности представления положим $\alpha_1 = -2\phi_1$, $\beta_2 = -2\phi_2$. Тогда система (3.4), (3.5) упрощается и принимает вид

$$\frac{4}{\sigma}\phi_1^2 + \alpha_2\phi_2 = 0, \quad \frac{4}{\delta}\phi_2^2 + \beta_1\phi_1 = 0. \quad (3.6)$$

$$\psi'_1(t) = \alpha_2\psi_2(t), \quad \psi'_2(t) = \beta_1\psi_1(t). \quad (3.7)$$

Можно убедиться, что у (3.6) имеется единственное действительное решение, которое может быть представлено в виде $\phi_1 = -0.25\sqrt[3]{\sigma^2\delta\alpha_2^2\beta_1}$, $\phi_2 = -0.25\sqrt[3]{\sigma\delta^2\alpha_2\beta_1^2}$. Из (3.7) следует, что $\psi''_1(t) = \alpha_2\beta_1\psi_1(t)$, $\psi''_2(t) = \alpha_2\beta_1\psi_2(t)$. Будем предполагать, что $\alpha_2\beta_1 = \lambda^2 > 0$. Тогда общее решение полученных дифференциальных уравнений имеет вид $\psi_i(t) = c_{i1}\exp(\lambda t) + c_{i2}\exp(-\lambda t)$, $i = 1, 2$. Из (3.7) имеем (оба уравнения дают одинаковые равенства), что $c_{11} = c_{21}\sqrt{\alpha_2/\beta_1}$, $c_{12} = -c_{22}\sqrt{\alpha_2/\beta_1}$. Условие, которое позволяет рассматривать решение (3.3) как диффузионную волну, порожденную краевым режимом при $x = 0$ (см. (1.2)), таково: $\psi_1(0) = -R^2\phi_1$, $\psi_2(0) = -R^2\phi_2$, т. е.

$$c_{11} + c_{12} = -R^2\phi_1, \quad c_{21} + c_{22} = -R^2\phi_2. \quad (3.8)$$

Из (3.8) имеем, что

$$c_{11} = -\frac{\phi_1 R^2(1 + \kappa)}{2}, \quad c_{12} = -\frac{\phi_1 R^2(1 - \kappa)}{2}, \quad c_{21} = -\frac{\phi_2 R^2(1 + \kappa)}{2\kappa}, \quad c_{22} = \frac{\phi_2 R^2(1 - \kappa)}{2\kappa},$$

где $\kappa = (\phi_2\alpha_2)/(\phi_1\lambda) = (\phi_2\lambda)/(\phi_1\beta_1) = \sqrt[6]{(\delta^2\alpha_2)/(\sigma^2\beta_1)}$. Итак, получено решение (3.1) вида

$$u = u_*(t, x) = \phi_1(x + R)^2 - \frac{\phi_1 R^2}{2} [(1 + \kappa)\exp(\lambda t) + (1 - \kappa)\exp(-\lambda t)], \quad (3.9)$$

$$v = v_*(t, x) = \phi_2(x + R)^2 - \frac{\phi_2 R^2}{2\kappa} [(1 + \kappa)\exp(\lambda t) - (1 - \kappa)\exp(-\lambda t)]. \quad (3.10)$$

Используя гиперболические функции, можно представить $u_*(t, x)$, $v_*(t, x)$ в виде

$$u_* = \phi_1(x + R)^2 - \phi_1 R^2 [\operatorname{ch}(\lambda t) + \kappa \operatorname{sh}(\lambda t)], \quad v_* = \phi_2(x + R)^2 - \frac{\phi_2 R^2}{\kappa} [\operatorname{sh}(\lambda t) + \kappa \operatorname{ch}(\lambda t)].$$

Можно убедиться, что для функций (3.9), (3.10) нулевые фронты существуют и будут различными, если $\kappa \neq \pm 1$. При этом нулевой фронт для функции u_* определяется как

$$u_*|_{(x+R)^2=R^2} [\operatorname{ch}(\lambda t) + \kappa \operatorname{sh}(\lambda t)] = 0,$$

и для функции v_* на этом фронте справедливо равенство

$$v_*|_{u_*=0} = -\frac{\phi_2 R^2(\kappa + 1)(1 - \kappa)}{\kappa} [\exp(\lambda t) - \exp(-\lambda t)] = -\frac{2\phi_2 R^2(\kappa + 1)(1 - \kappa)}{\kappa} \operatorname{sh}(\lambda t). \quad (3.11)$$

Соответственно, нулевой фронт для функции v_* определяется как

$$v_*|_{(x+R)^2=R^2} [\operatorname{sh}(\lambda t) + \kappa \operatorname{ch}(\lambda t)]/\kappa = 0,$$

и для функции u_* на этом фронте справедливо равенство

$$u_*|_{v_*=0} = \frac{\phi_1 R^2(\kappa + 1)(1 - \kappa)}{\kappa} [\exp(\lambda t) - \exp(-\lambda t)] = \frac{2\phi_1 R^2(\kappa + 1)(1 - \kappa)}{\kappa} \operatorname{sh}(\lambda t). \quad (3.12)$$

Пусть $\alpha_2 > 0$, $\beta_1 > 0$, тогда $\phi_1 < 0$, $\phi_2 < 0$, $\kappa > 0$. В этом случае пару функций (3.9), (3.10) можно рассматривать как часть диффузионной волны, порожденной краевым режимом:

$$u|_{x=0} = -\frac{\phi_1 R^2}{2} [(1 + \kappa)\exp(\lambda t) + (1 - \kappa)\exp(-\lambda t) - 2] = -\phi_1 R^2 [\operatorname{ch}(\lambda t) + \kappa \operatorname{sh}(\lambda t) - 1], \quad (3.13)$$

$$v|_{x=0} = -\frac{\phi_2 R^2}{2\kappa} [(1 + \kappa)\exp(\lambda t) - (1 - \kappa)\exp(-\lambda t) - 2] = -\frac{\phi_2 R^2}{\kappa} [\operatorname{sh}(\lambda t) + \kappa \operatorname{ch}(\lambda t) - 1]. \quad (3.14)$$

Можно убедиться, что задача (3.1), (3.13), (3.14) подпадает под действие теоремы 1.

Далее возможны три случая.

1. Если $0 < \kappa < 1$, то правая часть (3.11) положительна, а правая часть (3.12) отрицательна. Это означает, что диффузионная волна при $0 \leq x \leq R[\sqrt{\text{ch}(\lambda t) + \kappa \text{sh}(\lambda t)} - 1]$ определяется равенствами (3.9), (3.10), а при $x \geq R[\sqrt{\text{ch}(\lambda t) + \kappa \text{sh}(\lambda t)} - 1]$ — при решении задачи

$$v_t = vv_{xx} + \frac{1}{\delta}v_x^2 + \beta_2v, \quad v|_{x=R[\sqrt{\text{ch}(\lambda t) + \kappa \text{sh}(\lambda t)} - 1]} = -\frac{2\phi_2 R^2(\kappa + 1)(1 - \kappa)}{\kappa} \text{sh}(\lambda t).$$

2. Если $\kappa > 1$, то правая часть (3.11) отрицательна, а правая часть (3.12) положительна. Это означает, что диффузионная волна при $0 \leq x \leq R[\sqrt{\text{sh}(\lambda x) + \kappa \text{ch}(\lambda x)} - 1]$ определяется равенствами (3.9), (3.10), а при $x \geq R[\sqrt{\text{sh}(\lambda x) + \kappa \text{ch}(\lambda x)} - 1]$ — при решении задачи

$$u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma}u_x^2 + \alpha_1u, \quad u|_{x=R[\sqrt{\text{sh}(\lambda t) + \kappa \text{ch}(\lambda t)} - 1]} = -\frac{2\phi_1 R^2(\kappa + 1)(\kappa - 1)}{\kappa} \text{sh}(\lambda t).$$

3. Если $\kappa = 1$, то нулевые фронты для обеих искомым функций совпадают, и положительная часть диффузионной волны полностью определяется формулами (3.9), (3.10).

4. Численное решение

В научной печати мы не обнаружили сведений о разработке А. Ф. Сидоровым специальных численных методов решения задачи об иницировании тепловой волны. В работах [6; 35] упоминаются расчеты с использованием отрезков специальных рядов. При этом разработка методов построения нелокальных решений задачи (1.1), (1.2) остается актуальной.

За последнее десятилетие для численного решения довольно широкого класса задач для нелинейных параболических уравнений, в том числе задач об иницировании тепловой (диффузионной) волны [13], авторы разработали подход, основанный на дискретизации по времени и итерационном решении квазистационарной задачи для уравнения Пуассона. Для решения возникающей на каждом шаге краевой задачи использовался метод граничных элементов (МГЭ) [36; 37] в сочетании с методом двойственной взаимности (МДВ) [38; 39], а также (в последние годы) метод коллокаций (МК) [40] с применением разложений по радиальным базисным функциям (РБФ) [41; 42]. Подобные методы широко используются для решения различных уравнений математической физики, однако об их применении в случае рассматриваемых нами вырождающихся уравнений параболического типа с произвольным характером нелинейности нам неизвестно. Поскольку МДВ также предполагает использование разложений по РБФ [43], два упомянутых метода довольно близки в плане реализации и получаемых результатов, при этом опыт показал, что для одномерных задач удобнее использовать МК. Применение этих же методов для численного решения систем параболических (одномерных) уравнений [16–18] также показало преимущество метода коллокаций.

В работе [18] исследовано решение системы (1.1) при заданных уравнениях движения фронтов диффузионных волн для искомым функций, причем эти фронты необязательно совпадают:

$$u|_{x=a(t)} = 0, \quad v|_{x=b(t)} = 0, \quad (4.1)$$

где $a(0) = b(0) \geq 0, a'(0) > 0, b'(0) > 0$. Численное решение задачи (1.1), (4.1) строилось по шагам по времени, причем на каждом шаге $t_k = kh, h$ — размер шага, областью определения решения $u(t_k, x)$ являлась известная область $x \in [a(0), a(t_k)]$, а для $v(t_k, x)$ соответственно — область $x \in [a(0), b(t_k)]$. Решение задачи (1.1), (1.2) осложняется тем, что положение нулевых фронтов $a(t_k)$ и $b(t_k)$ заранее не известно, следовательно, неизвестна область решения задачи.

Сделаем следующую замену переменных: поменяем местами искомую функцию и пространственную переменную в обоих уравнениях системы (1.1), при этом пространственную переменную во втором уравнении обозначим y . Подобные замены неоднократно использовались в аналогичных задачах А. Ф. Сидоровым [1]. На каждом шаге по времени будем иметь

систему

$$x_t x_u^2 = u x_{uu} - \frac{1}{\sigma} x_u - F(u, v) x_u^3, \quad y_t y_v^2 = v y_{vv} - \frac{1}{\delta} y_v - G(u, v) y_v^3, \quad (4.2)$$

где $x(t_k, u)$ — функция, обратная к $u(t_k, x)$, а $y(t_k, v)$ — обратная к $v(t_k, x)$. В момент $t = t_k$ сформулируем следующую задачу в известной области $u \in [0, l]$, $v \in [0, L]$, $l = f(t_k)$, $L = g(t_k)$:

$$x_{uu} = \frac{1}{u} \left(x_t x_u^2 + \frac{1}{\sigma} x_u + F(u, v) x_u^3 \right), \quad y_{vv} = \frac{1}{v} \left(y_t y_v^2 + \frac{1}{\delta} y_v + G(u, v) y_v^3 \right), \quad (4.3)$$

$$x|_{u=l} = 0, \quad y|_{v=L} = 0. \quad (4.4)$$

Отметим, что ранее (см. [18]) мы рассматривали случаи, когда функции источников в системе зануляются вдоль нулевого фронта каждой функции, т. е. справедливо $F(0, v) = G(u, 0) = 0$. В данной работе полагается лишь, что $F(0, 0) = G(0, 0) = 0$. Это означает, что на одном из фронтов (который ближе к началу координат) источник соответствующего уравнения, вообще говоря, не зануляется. Более общая постановка потребовала дополнительных выкладок при разработке алгоритма численного решения. Не нарушая общности, будем далее полагать, что в любой момент времени в условиях (1.2) $f(t) \leq g(t)$, соответственно, в (4.1) $a(t) \leq b(t)$.

Из условий (4.1) на нулевых фронтах волн следуют соотношения

$$x_u|_{u=0} = -\frac{2}{\sigma a'(t_k) + \sqrt{\sigma^2 [a'(t_k)]^2 - 4\sigma F(0, v(t_k, a(t_k)))}}, \quad y_v|_{v=0} = -\frac{1}{\delta b'(t_k)}. \quad (4.5)$$

Во втором равенстве (4.5) учтено, что $u = 0$ при $x = b(t)$. Выполнить условия (4.5) точно невозможно, поскольку функции $a(t)$ и $b(t)$ неизвестны. Используя квадратичные аппроксимации этих функций на промежутке $t \in [t_{k-1}, t_k]$, уравнения (4.5) можно привести к следующему разностному виду [13]:

$$\begin{aligned} \frac{2[x(t_k, 0) - x(t_{k-1}, 0)]}{h} &= -\frac{1}{\sigma x_u(t_k, 0)} - \frac{1}{\sigma x_u(t_{k-1}, 0)} \\ &- F(0, v(t_k, a(t_k))) x_u(t_k, 0) - F(0, v(t_{k-1}, a(t_{k-1}))) x_u(t_{k-1}, 0), \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\frac{2[y(t_k, 0) - y(t_{k-1}, 0)]}{h} = -\frac{1}{\delta y_v(t_k, 0)} - \frac{1}{\delta y_v(t_{k-1}, 0)}.$$

Уравнения (4.6) связывают значения каждой искомой функции и ее производной на текущем шаге t_k и предыдущем шаге t_{k-1} . Для использования этих уравнений на первом шаге необходимо знать эти значения в начальный момент $t = 0$. Очевидно, что $x(0, 0) = y(0, 0) = 0$. Для нахождения $x_u(0, 0)$ и $y_v(0, 0)$ возьмем полные производные по времени в условиях (4.4): $(x_t + x_u f'(t))|_{u=f(t)} = 0$, $(y_t + y_v g'(t))|_{v=g(t)} = 0$. Отсюда, при $u = f(t)$, $v = g(t)$

$$x_t = -x_u f'(t), \quad y_t = -y_v g'(t). \quad (4.7)$$

Подставив (4.7) в систему (4.2), при $t = 0$ имеем $x_u(0, 0) = -1/\sqrt{\sigma f'(t)}$, $y_v(0, 0) = -1/\sqrt{\delta g'(t)}$. Следовательно, условия (4.6) можно использовать и на первом шаге. Таким образом, мы получили дополнительные граничные условия для системы (4.3), связывающие значения искомых функций и их производных в граничной точке:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2x(t_k, u)}{h} + \frac{1}{\sigma x_u(t_k, u)} + F(u, v(t_k, a(t_k))) x_u(t_k, 0) \right) \Big|_{u=0} \\ &= \frac{2x(t_{k-1}, 0)}{h} - \frac{1}{\sigma x_u(t_{k-1}, 0)} - F(0, v(t_{k-1}, a(t_{k-1}))) x_u(t_{k-1}, 0) = R^*, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\left(\frac{2y(t_k, v)}{h} + \frac{1}{\delta y_v(t_k, v)} \right) \Big|_{v=0} = \frac{2y(t_{k-1}, 0)}{h} - \frac{1}{\delta y_v(t_{k-1}, 0)} = S^*.$$

Итак, на произвольном шаге t_k мы имеем задачу (4.3), (4.4), (4.8) для системы двух уравнений Пуассона, где $u \in [0, l]$, $v \in [0, L]$. Ее решение будем искать в виде $x(t_k, u) = R(u) + r(u)$, $y(t_k, v) = S(v) + s(v)$, где $R(u), S(v)$ — частное решение системы (4.3) в момент t_k , $r(u), s(v)$ — решение соответствующей задачи для однородной системы

$$r'' = 0, \quad r|_{u=l} = -R(l),$$

$$\left(\frac{2(R(u) + r(u))}{h} + \frac{1}{\sigma(R'(u) + r'(u))} + F(u, v(t_k, a(t_k)))(R'(u) + r'(u)) \right) \Big|_{u=0} = R^*, \quad (4.9)$$

$$s'' = 0, \quad s|_{v=L} = -S(L), \quad \left(\frac{2(S(v) + s(v))}{h} + \frac{1}{\delta(S'(v) + s'(v))} \right) \Big|_{v=0} = S^*. \quad (4.10)$$

Поскольку правые части уравнений (4.3) зависят от искомых функций, решение строится итерационно, в соответствии со следующей процедурой:

$$R_0 = 0, \quad S_0 = 0,$$

$$r_n = c(u - l) - R_n(l), \quad s_n = d(v - L) - S_n(L), \quad (4.11)$$

$$x_n = R_n + r_n, \quad y_n = S_n + s_n,$$

$$R''_{n+1} = \frac{1}{u} \left((x_n)_t (x_n)_u^2 + \frac{1}{\sigma} (x_n)_u + F(u, v) (x_n)_u^3 \right), \quad (4.12)$$

$$S''_{n+1} = \frac{1}{v} \left((y_n)_t (y_n)_v^2 + \frac{1}{\delta} (y_n)_v + G(u, v) (y_n)_v^3 \right),$$

где $x_n, R_n, r_n, y_n, S_n, s_n$ — n -е итерации решений, c и d — отрицательные корни квадратных уравнений, получаемых подстановкой решений (4.11) в соответствующие граничные условия задачи (4.9), (4.10): $[2l - hF(0, v(t_k, a(t_k)))]c^2 + A_n c + B_n = 0$; $2Ld^2 + C_n d + D_n = 0$, где

$$A_n = 2 [R_n(l) - R_n(0) + (l - hF(0, v(t_k, a(t_k))))R'_n(0)] + R^* h,$$

$$B_n = (2 [R_n(l) - R_n(0)] + R^* h) R'_n(0) - hF(0, v(t_k, a(t_k)))[R'_n(0)]^2 - \frac{h}{\sigma},$$

$$C_n = 2 [S_n(L) - S_n(0) + LS'_n(0)] + S^* h, \quad D_n = (2 [S_n(L) - S_n(0)] + S^* h) S'_n(0) - \frac{h}{\delta}.$$

Система уравнений (4.12) решается методом коллокаций [40] с помощью разложения правых частей по системе РБФ $\varphi^{(k)}(z) = \varphi^{(k)}(|z - z_k|)$, где z_k — точки коллокации. Для каждой $\varphi^{(k)}(z)$ существует функция $\psi^{(k)}(z)$ такая, что $d^2\psi^{(k)}/dz^2 = \varphi^{(k)}$. Расположим точки коллокации u_1, u_2, \dots, u_K на отрезке $[0, l]$, а точки коллокации v_1, v_2, \dots, v_M — на отрезке $[0, L]$. Тогда разложения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \left((x_n)_t (x_n)_u^2 + \frac{1}{\sigma} (x_n)_u + F(u, v) (x_n)_u^3 \right) &= \sum_{k=1}^K \alpha_{n+1}^{(k)} \varphi^{(k)}(u), \\ \frac{1}{v} \left((y_n)_t (y_n)_v^2 + \frac{1}{\delta} (y_n)_v + G(u, v) (y_n)_v^3 \right) &= \sum_{m=1}^M \beta_{n+1}^{(m)} \varphi^{(m)}(v). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Коэффициенты $\alpha_{n+1}^{(k)}, \beta_{n+1}^{(m)}$ в правых частях (4.13) определяются из решения двух систем линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{u} \left((x_n)_t (x_n)_u^2 + \frac{1}{\sigma} (x_n)_u + F(u, v) (x_n)_u^3 \right) \Big|_{u=u_i} = \sum_{k=1}^K \alpha_{n+1}^{(k)} \varphi^{(k)}(u_i), \quad i = 1, \dots, K, \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{v} \left((y_n)_t (y_n)_v^2 + \frac{1}{\delta} (y_n)_v + G(u, v) (y_n)_v^3 \right) \Big|_{v=v_j} = \sum_{m=1}^M \beta_{n+1}^{(m)} \varphi^{(m)}(v_j), \quad j = 1, \dots, M. \quad (4.15)$$

Производные по времени вычисляются методом конечных разностей с использованием решения на предыдущем шаге. Значение переменной v в левой части (4.14) вычисляется как решение уравнения $y_n(v) = x_n(u_i)$. Значение переменной u в левой части (4.15) вычисляется как решение уравнения $x_n(u) = y_n(v_j)$. При этом, если $x_n(0) < y_n(v_j) \leq y_n(0)$, то принимается значение $u = 0$ (такая ситуация возможна, поскольку $a(t_k) < b(t_k)$).

Решив системы (4.14), (4.15), получим следующую итерацию частного решения (4.3):

$$R_{n+1} = \sum_{k=1}^K \alpha_{n+1}^{(k)} \varphi^{(k)}(u), \quad S_{n+1} = \sum_{m=1}^M \beta_{n+1}^{(m)} \varphi^{(m)}(v).$$

Итерационный процесс останавливается, когда n -я и $(n + 1)$ -я итерации достаточно близки, и в качестве решения задачи (4.3), (4.4) в момент t_k принимаются непрерывно дифференцируемые по пространственным переменным функции $x(t_k, u) = R_{n+1}(u) + r_{n+1}(u)$, $y(t_k, v) = S_{n+1}(v) + s_{n+1}(v)$. При этом будут найдены положения нулевых фронтов в момент t_k : $a(t_k) = x(t_k, 0)$, $b(t_k) = y(t_k, 0)$. Непрерывность позволяет определить без потери точности обратные функции $u(t_k, x)$, $x \in [a(0), a(t_k)]$, и $v(t_k, x)$, $x \in [b(0), b(t_k)]$, являющиеся приближенным решением задачи (1.1), (1.2) на шаге t_k .

5. Вычислительный эксперимент

Для верификации предложенного численного алгоритма оценим погрешность численных решений относительно известных точных решений.

Пример 1. Пусть в системе (1.1) $F(u, v) = v$, $Q(u, v) = u$, $\sigma = \delta$. В этом случае система является связанной и имеет точное решение

$$u(t, x) = v(t, x) = ke^t \left[\frac{k}{\sigma} (e^t - 1) - x \right]. \quad (5.1)$$

В условиях (1.2), соответствующих решению (5.1), $f(t) = g(t) = k^2 e^t (e^t - 1) / \sigma$. Функции, определяющие движение нулевого фронта (см. (4.2)), для (5.1) имеют вид $a(t) = b(t) = k(e^t - 1) / \sigma$. Во всех просчитанных вариантах функции $u(t, x)$ и $v(t, x)$ совпадали с точностью до погрешности вычислений с плавающей точкой. Погрешность численного алгоритма оценивалась как наибольшее отклонение приближенного решения от решения (5.1). В табл. 1 (второй столбец) приведены погрешности решений при $k = 0.2$ для различных значений $\sigma = \delta$ и шага по времени h . В третьем столбце табл. 1 показаны погрешности определения нулевого фронта $a(t) = b(t)$. Результаты расчетов демонстрируют сходимость алгоритма относительно шага по времени, а также хорошую точность решения.

Пример 2. В качестве примера применения численного алгоритма для построения диффузионных волн с различными фронтами, т. е. при $f(x) \neq g(t)$, была решена задача, рассмотренная в примере разд. 3. Примем в системе (3.1) $\alpha_2 = \beta_1 = 1$, $\sigma = 8$, $\delta = 3.375$, $R = 1$. Тогда $\lambda = 1$, $\phi_1 = -1.5$, $\phi_2 = -1.125$, $\alpha_1 = 3$, $\beta_2 = 2.25$, $\kappa = 0.75$. Решение (3.9), (3.10) принимает вид

$$u = 1.3125e^t + 0.1875e^{-t} - 1.5(x + 1)^2, \quad v = 1.3125e^t - 0.1875e^{-t} - 1.125(x + 1)^2. \quad (5.2)$$

Тогда $f(t) = 1.3125e^t + 0.1875e^{-t} - 1.5$, $g(t) = 1.3125e^t - 0.1875e^{-t} - 1.125$. Решение (5.2) “работает” при $0 \leq x \leq a(t) = \sqrt{0.875e^t + 0.125e^{-t}} - 1$.

При $x = a(t)$ зануляется функция u , и тогда для v имеем задачу в области $x \geq a(t)$:

$$v_t = vv_{xx} + v_x^2 + v, \quad v|_{x=a(t)} = 0.328125(e^t - e^{-t}). \quad (5.3)$$

Т а б л и ц а 1

Погрешности численных решений

σ	h	t	Погрешность решения	Погрешность фронта
7	0.1	0.5	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$
7	0.1	1	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$
7	0.05	0.5	$5.6 \cdot 10^{-5}$	$5.2 \cdot 10^{-5}$
7	0.05	1	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$
7	0.025	0.5	$2.6 \cdot 10^{-5}$	$2.7 \cdot 10^{-5}$
7	0.025	1	$7.5 \cdot 10^{-5}$	$6.8 \cdot 10^{-5}$
8	0.1	0.5	$8.5 \cdot 10^{-5}$	$7.9 \cdot 10^{-5}$
8	0.1	1	$2.2 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$
8	0.05	0.5	$4.4 \cdot 10^{-5}$	$4.1 \cdot 10^{-5}$
8	0.05	1	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$
8	0.025	0.5	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$
8	0.025	1	$5.8 \cdot 10^{-5}$	$5.3 \cdot 10^{-5}$
9	0.1	0.5	$6.8 \cdot 10^{-5}$	$6.4 \cdot 10^{-5}$
9	0.1	1	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$
9	0.05	0.5	$3.5 \cdot 10^{-5}$	$3.3 \cdot 10^{-5}$
9	0.05	1	$8.9 \cdot 10^{-5}$	$8.3 \cdot 10^{-5}$
9	0.025	0.5	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$
9	0.025	1	$4.6 \cdot 10^{-5}$	$4.3 \cdot 10^{-5}$

Здесь решение в явном виде выписать не представляется возможным, но задачу можно решить численно, используя ранее полученные результаты авторов, что и было сделано.

На рис. 1 численное решение задачи (3.1), (1.2) при заданных параметрах сравнивается с точным решением (5.2) при $t = 1$. Сравнение демонстрирует корректность численного решения задачи об иницировании волны для системы при разных нулевых фронтах у искомых функций. При тех же значениях параметров были численно решены задача (5.3), а также система (3.1) в области $x \geq a(t)$ при граничных условиях, соответствующих точному решению (5.2). На рис. 2 сравниваются полученные в этих двух задачах функции $v(t, x)$ в два момента времени. Графики демонстрируют различие решения, построенного при условии $u(t, x) = 0$, и решения с учетом гладкой при $x = a(t)$ функции $u(t, x)$, удовлетворяющей, как

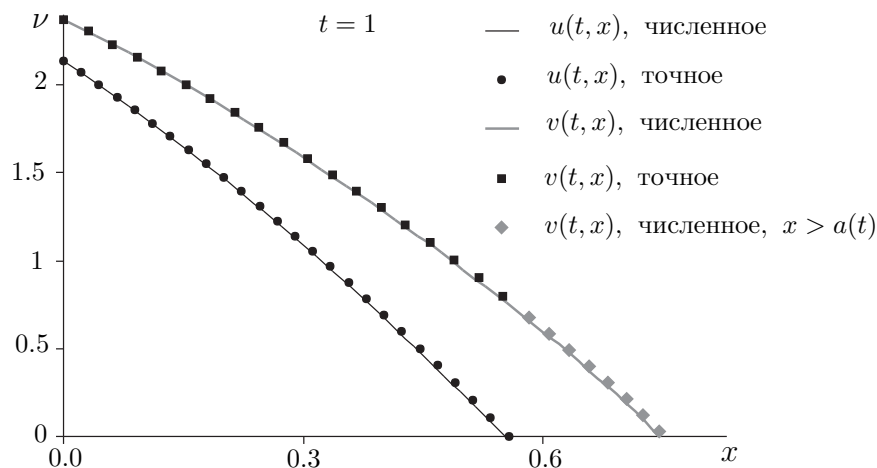
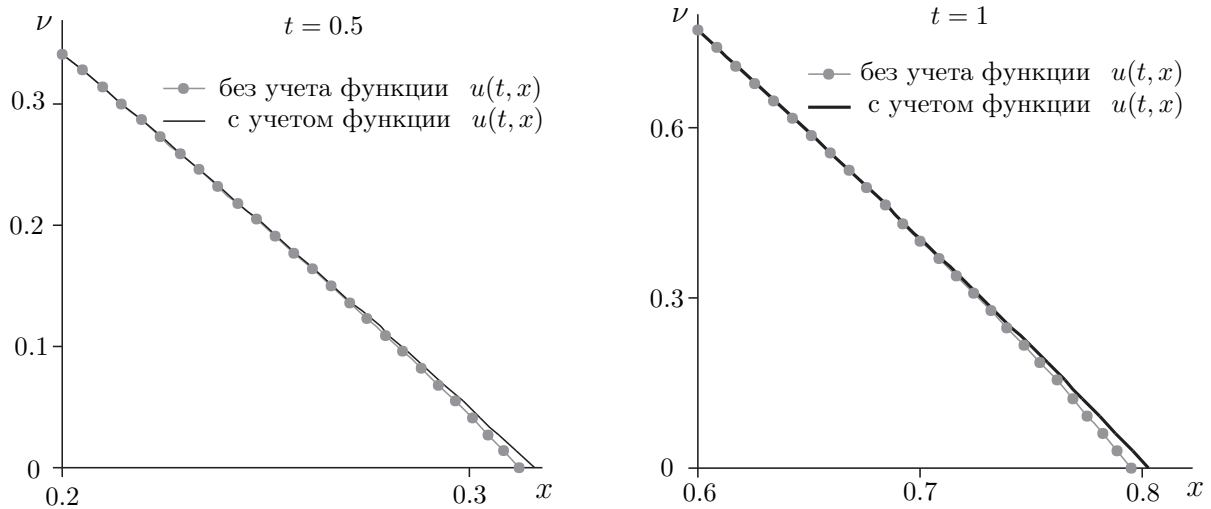


Рис. 1. Сравнение численного и точного решений.

Рис. 2. Иллюстрация влияния функции $u(t, x)$.

и $v(t, x)$, системе. Таким образом, решение задачи (5.3) на отрезке $x \in [a(t), b(t)]$, где $b(t)$ — точка, в которой $v(t, x)$ впервые обращается в нуль, является той самой третьей частью диффузионной волны в момент t .

Заключение

Одной из важнейших традиций научной школы А. Ф. Сидорова, заложенных еще ее основателем, является параллельное развитие численных и аналитических методов механики сплошных сред, причем среди последних ключевую роль играют метод специальных рядов и построение точных решений. В этом плане представленная работа, в которой рассмотрена задача об иницировании диффузионной волны для нелинейной параболической системы «реакция-диффузия», является вполне традиционной, поскольку содержит в себе теорему существования и единственности, при доказательстве которой строится решение рассмотренной задачи в виде специального ряда, точные решения и новый численный метод, основанный на методе коллокаций и радиальных базисных функциях.

Среди полученных результатов особого внимания, по нашему мнению, заслуживает доказательство того, что иницированная произвольным краевым режимом диффузионная волна, вообще говоря, имеет трехчастную структуру. Это обстоятельство существенно усложняет исследование, поскольку для двух искомых функций приходится строить не один, как ранее, а два нулевых фронта, при этом последние, вообще говоря, заранее не известны и определяются одновременно с решением задачи.

Проведенное исследование, по нашему убеждению, является только первым шагом на большом пути по изучению задачи об иницировании диффузионных волн для параболических систем (напомним, что соответствующая задача для одного уравнения привлекает внимание исследователей уже около 40 лет). Так, напрашивается увеличение количества независимых переменных и/или числа уравнений в системе. Также более глубокого изучения заслуживает вопрос о построении новых точных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сидоров А.Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
2. Васин В.В., Сидоров А.Ф. О некоторых методах приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1983. № 7. С. 13–27.

3. **Сидоров А.Ф.** О некоторых классах решений уравнения нестационарной фильтрации // Численные методы механики сплошной среды: сб. науч. тр. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1984. Т. 15, № 2. С. 121–133.
4. **Сидоров А.Ф.** Аналитические представления решений нелинейных параболических уравнений типа нестационарной фильтрации // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 1. С. 47–51.
5. **Осипов Ю.С., Бердышев В.И., Ильин А.М., Короткий А.И., Самофалов В.В., Титов С.С., Ульянов О.Н., Хайруллина О.Б.** Анатолий Фёдорович Сидоров (1933–1999) // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 2. С. 3–9.
6. **Сидоров А.Ф.** О некоторых аналитических представлениях решений нелинейного уравнения нестационарной фильтрации // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости: сб. науч. тр. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1987. С. 247–257.
7. **Баутин С.П.** Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003. 88 с.
8. **Коврижных О.О.** О построении асимптотического решения нелинейного вырождающегося параболического уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 10. С. 1487–1493.
9. **Ваганова Н.А.** Построение новых классов решений нелинейного уравнения фильтрации с помощью специальных согласованных рядов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 2. С. 10–20.
10. **Filimonov M.Yu.** Representation of solutions of boundary value problems for nonlinear evolution equations by special series with recurrently calculated coefficients // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1268, article no. 012071. doi: 10.1088/1742-6596/1268/1/012071
11. **Казаков А.Л., Лемперт А.А.** О существовании и единственности решения краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, № 2. С. 97–105.
12. **Казаков А.Л., Кузнецов П.А.** Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 2. С. 56–65. doi: 10.17377/SIBJIM.2018.21.205
13. **Казаков А.Л., Нефедова О.А., Спевак Л.Ф.** Решение задач об иницировании тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности методом граничных элементов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2019. Т. 59, № 6. С. 1047–1062. doi: 10.1134/S0044466919060085
14. **Казаков А.Л.** Применение характеристических рядов для построения решений нелинейных параболических уравнений и систем с вырождением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 114–122.
15. **Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Lempert A.A.** Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type // Symmetry. 2020. Vol. 12, № 6. P. 999. doi: 10.3390/SYM12060921
16. **Казаков А.Л., Спевак Л.Ф.** Точные и приближенные решения вырождающейся системы реакция-диффузия // Прикладная механика и техническая физика. 2021. Т. 62, № 4. С. 169–180. doi: 10.15372/PMTF20210417
17. **Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф.** Построение решений краевой задачи с вырождением для нелинейной параболической системы // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24, № 4. С. 64–78. doi: 10.33048/SIBJIM.2021.24.405
18. **Казаков А.Л., Спевак Л.Ф.** Решения нелинейной вырождающейся системы реакция-диффузия типа диффузионных волн с двумя фронтами // Прикладная механика и техническая физика. 2022. Т. 63, № 6(376). С. 104–115. doi: 10.15372/PMTF20220612
19. **Kosov A.A., Semenov E.I.** Distributed model of space exploration by two types of interacting robots and its exact solutions // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1847, article no. 012007. doi: 10.1088/1742-6596/1847/1/012007
20. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 738 с.
21. **Grindrod P.** Patterns and waves: theory and applications of reaction-diffusion equations. NY: Clarendon Press, 1991. 256 p.
22. **Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.** Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
23. **Vazquez J.** The porous medium equation: mathematical theory. Oxford: Clarendon Press, 2007. 624 p. doi: 10.1093/acprof:oso/9780198569039.001.0001

24. **Bekezhanova V.B., Stepanova I.V.** Evaporation convection in two-layers binary mixtures: equations, structure of solution, study of gravity and thermal diffusion effects on the motion // *Appl. Math. Comput.* 2022. Vol. 414, article no. 126424. doi: 10.1016/j.amc.2021.126424
25. **Cantrell R.S., Cosner C.** *Spatial ecology via reaction-diffusion equations.* Chichester: Wiley, 2003. 432 p.
26. **DiBenedetto E.** *Degenerate parabolic equations.* NY: Springer-Verlag, 1993. 388 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0895-2
27. **Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу Юй-Линь.** Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // *Изв. АН СССР. Сер. математическая.* 1958. Т. 22, вып. 5. С. 667–704.
28. **Степанова Е.В., Шишков А.Е.** Начальная эволюция носителей решений квазилинейных параболических уравнений с вырождающимся абсорбционным потенциалом // *Мат. сборник.* 2013. Т. 204, № 3. С. 79–106.
29. **Antontsev S.N., Shmarev S.I.** *Evolution PDEs with nonstandard growth conditions: Existence, uniqueness, localization, blow-up.* Paris: Atlantis Press, 2015. 409 p. doi: 10.2991/978-94-6239-112-3
30. **Баутин С.П., Казаков А.Л.** *Обобщенная задача Коши и ее приложения.* Новосибирск: Наука, 2006. 399 с.
31. **Годунов С.К., Рябенький В.С.** *Разностные схемы (введение в теорию).* М.: Наука, 1977. 440 с.
32. **Рубина Л.И.** О характеристиках и решениях одномерного нестационарного уравнения фильтрации // *Прикладная математика и механика.* 2005. Т. 69, № 5. С. 829–836.
33. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Об одном методе решения уравнения нелинейной теплопроводности // *Сиб. мат. журн.* 2012. Т. 53, № 5. С. 1091–1101.
34. **Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.** *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики.* М.: Физматлит, 2005. 256 с.
35. **Сидоров А.Ф.** Некоторые новые аналитические методы исследования нелинейных волновых процессов в газовой динамике // *Фундамент. исследования надежности и качества машин.* 1990. С. 48–37.
36. **Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C.** *Boundary element techniques.* Berlin: Springer-Verlag, 1984. 464 p.
37. **Banerjee P.K., Butterfield R.** *Boundary element methods in engineering science.* London: McGraw-Hill Book Company, 1981. 452 p.
38. **Nardini N., Brebbia C.A.** A new approach to free vibration analysis using boundary elements // *Appl. Math. Modelling.* 1983. Vol. 7. P. 157–162.
39. **Wrobel L.C., Brebbia C.A., Nardini D.** The dual reciprocity boundary element formulation for transient heat conduction // *Finite elements in water resources VI.* Berlin: Springer-Verlag, 1986. P. 801–811.
40. **Chen C.S., Chen W., Fu Z.J.** *Recent advances in radial basis function collocation methods.* Berlin; Heidelberg: Springer, 2013. 165 p. doi: 10.1007/978-3-642-39572-7
41. **Buhmann M.D.** *Radial basis functions.* Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 259 p. doi: 10.1017/CBO9780511543241
42. **Fornberg B., Flyer N.** Solving PDEs with radial basis functions // *Acta Numerica.* 2015. Vol. 24. P. 215–258. doi: 10.1017/S0962492914000130
43. **Golberg M.A., Chen C.S., Bowman H.** Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* 1999. Vol. 23. P. 285–296. doi: 10.1016/S0955-7997(98)00087-3

Поступила 15.02.2023

После доработки 16.03.2023

Принята к публикации 20.03.2023

Казаков Александр Леонидович

д-р физ.-мат. наук

гл. науч. сотрудник

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН

г. Иркутск

e-mail: kazakov@icc.ru

Кузнецов Павел Александрович

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН

г. Иркутск

e-mail: kuznetsov@icc.ru

Спевак Лев Фридрихович

канд. техн. наук

зав. Лабораторией прикладной механики

Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: lfs@imach.uran.ru

REFERENCES

1. Sidorov A.F. *Izbrannyye trudy: Matematika. Mekhanika* [Selected works: Mathematics. Mechanics]. Moscow: Fizmatlit, 2001, 576 p.
2. Vasin V.V., Sidorov A.F. Some methods of the approximate solution for differential and integral equations. *Iz. VUZ. Math.*, 1983, vol. 27, no. 7, pp. 14–33.
3. Sidorov A.F. On some classes of solutions of the nonsteady filtration equation. In: *Computational Methods of Continuum Mechanics*, 1984, vol. 15, no. 2, pp. 121–133 (in Russian).
4. Sidorov A.F. Analytic representations of solutions of nonlinear parabolic equations of time-dependent filtration *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, 1985, vol. 31, pp. 40–44.
5. Osipov Yu.S., Berdyshev V.I., Il'in A.M., Korotkiy A.I., Samofalov V.V., Titov S.S., Ul'yanov O.N., Khayrullina O.B. Anatoliy Fyodorovich Sidorov (1933–1999). *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2003, suppl. 2, pp. S1–S7.
6. Sidorov A.F. On some analytical representations of solutions of the nonlinear equation of nonsteady filtration. In: *Computational Methods of Continuum Mechanics*, 1987, pp. 247–257 (in Russian).
7. Bautin S.P. *Analiticheskaya teplovaya volna* [Analytical heat wave]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2003, 88 p. (in Russian). ISBN: 978-5-9221-0443-2.
8. Kovrizhnykh O.O. On construction of an asymptotic solution to the degenerate nonlinear parabolic equation. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2003, vol. 43, no. 10, pp. 1430–1436.
9. Vaganova N.A. Constructing of new classes of solutions of a nonlinear filtration equation by special consistent series. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2003, suppl. 2, pp. S182–S193.
10. Filimonov M.Yu. Representation of solutions of boundary value problems for nonlinear evolution equations by special series with recurrently calculated coefficients. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1268, article no. 012071. doi: 10.1088/1742-6596/1268/1/012071
11. Kazakov A.L., Lempert A.A. Existence and uniqueness of the solution of the boundary-value problem for a parabolic equation of unsteady filtration. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 251–258. doi: 10.1134/S0021894413020107
12. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On the analytic solutions of a special boundary value problem for a nonlinear heat equation in polar coordinates. *J. Appl. Industr. Math.*, 2018, vol. 12, pp. 255–263. doi: 10.1134/S1990478918020060
13. Kazakov A.L., Nefedova O.A., Spevak L.F. Solution of the problem of initiating the heat wave for a nonlinear heat conduction equation using the boundary element method. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 6, pp. 1015–1029. doi: 10.1134/S0965542519060083
14. Kazakov A.L. Application of characteristic series for constructing solutions of nonlinear parabolic equations and systems with degeneracy. *Tr. Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 2, pp. 114–122 (in Russian).
15. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Lempert A.A. Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type. *Symmetry*, 2020, vol. 12, no. 6, pp. 999–1013. doi: 10.3390/SYM12060921
16. Kazakov A.L., Spevak L.F. Exact and approximate solutions of a degenerate reaction-diffusion system. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys.*, 2021, vol. 62, no. 4, pp. 673–683. doi: 10.1134/S0021894421040179

17. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. Construction of solutions to a boundary value problem with a singularity for a nonlinear parabolic system. *J. Appl. and Industr. Math.*, 2021, vol. 15, no. 4, pp. 1–13. doi: 10.1134/S1990478921040050
18. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. Diffusion-wave type solutions with two fronts to a nonlinear degenerate reaction-diffusion system. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys.*, 2022, vol. 63, no. 6, pp. 1–10. doi: 10.1134/S0021894422060128
19. Kosov A.A., Semenov E.I. Distributed model of space exploration by two types of interacting robots and its exact solutions *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1847, article no. 012007. doi: 10.1088/1742-6596/1847/1/012007
20. Ladyzenskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. Ser. Translations of Mathematical monographs, vol. 23, Providence: Amer. Math. Soc., 1968. ISBN: 978-0-8218-1573-1 Original Russian text was published in Ladyzenskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa*, Moscow, Nauka Publ., 1967, 738 p.
21. Grindrod P. *Patterns and waves: theory and applications of reaction-diffusion equations*. NY, Clarendon Press, 1991, 256 p.
22. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. *Blow-up in quasilinear parabolic equations*. Berlin, Walter de Gruyter, 1995, 554 p. doi: 10.1515/9783110889864. Original Russian text was published in Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilineinykh parabolicheskikh uravnenii*, Moscow, Nauka Publ., 1987, 480 p.
23. Vazquez J. *The porous medium equation: mathematical theory*. Oxford, Clarendon Press, 2007, 624 p. doi: 10.1093/acprof:oso/9780198569039.001.0001.
24. Bekezhanova V.B., Stepanova I.V. Evaporation convection in two-layers binary mixtures: equations, structure of solution, study of gravity and thermal diffusion effects on the motion. *Appl. Math. Comput.*, 2022, vol. 414, article no. 126424. doi: 10.1016/j.amc.2021.126424
25. Cantrell R.S., Cosner C. *Spatial ecology via reaction-diffusion equations*, Chichester, Wiley, 2003, 432 p.
26. DiBenedetto E. *Degenerate parabolic equations*. NY, Springer-Verlag, 1993, 388 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0895-2.
27. Oleinik O.A., Kalashnikov A.S., Czhou Juj-lin. The Cauchy problem and boundary problems for equations of the type of non-stationary filtration. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1958, vol. 22, no. 5, pp. 667–704 (in Russian).
28. Stepanova K.V., Shishkov A.E. Initial evolution of supports of solutions of quasilinear parabolic equations with degenerate absorption potential. *Sbornik: Math.*, 2013, vol. 204, no. 3, pp. 383–410. doi: 10.1070/SM2013v204n03ABEH004305
29. Antontsev S.N., Shmarev S.I. *Evolution PDEs with nonstandard growth conditions: Existence, uniqueness, localization, blow-up*. Paris: Atlantis Press, 2015, 409 p. doi: 10.2991/978-94-6239-112-3
30. Bautin S.P., Kazakov A.L. *Obobshchennaya zadacha Koshi i ee prilozheniya* [Generalized Cauchy Problem with Applications]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2006, 399 p.
31. Godunov S.K., Ryaben'kiy V.S. *Raznostnye skhemy (vvedenie v teoriyu)* [Difference schemes (An introduction to the theory)]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 440 p.
32. Rubina L.I. On the characteristics and solutions of the one-dimensional non-stationary seepage equation. *J. Appl. Math. Mech.*, 2005, vol. 69, no. 5, pp. 743–750. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2005.09.009
33. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. On some method for solving a nonlinear heat equation. *Sib. Math. J.*, 2012, vol. 53, no. 5, pp. 872–881. doi: 10.1134/S0037446612050126
34. Polyenin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. *Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki* [Solution methods for nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow: Fizmatlit, 2005, 256 p.
35. Sidorov A.F. Some new analytical methods of exploring of nonlinear wave processes in gas dynamics. In: *Fundamental investigations of reliability and quality of machines*, 1990, pp. 37–48 (in Russian).
36. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. *Boundary element techniques*. Berlin, Springer-Verlag, 1984, 464 p.
37. Banerjee P.K., Butterfield R. *Boundary element methods in engineering science*. London, McGraw-Hill Book Company, 1981, 452 p.
38. Nardini N., Brebbia C.A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. *Appl. Math. Modelling*, 1983, vol. 7, pp. 157–162.
39. Wrobel L.C., Brebbia C.A., Nardini D. The dual reciprocity boundary element formulation for transient heat conduction. In: *Finite elements in water resources VI*, Berlin, Springer-Verlag, 1986, pp. 801–811.

40. Chen C.S., Chen W., Fu Z.J. *Recent advances in radial basis function collocation methods*, Berlin, Heidelberg, Springer, 2013, 165 p. doi: 10.1007/978-3-642-39572-7
41. Buhmann M.D. *Radial basis functions*, Cambridge: Cambridge University Press, 2003, 259 p. doi: 10.1017/CBO9780511543241
42. Fornberg B., Flyer N. Solving PDEs with radial basis functions. *Acta Numerica*, 2015, vol. 24, pp. 215–258. doi: 10.1017/S0962492914000130
43. Golberg M.A., Chen C.S., Bowman H. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1999, vol. 23, pp. 285–296. doi: 10.1016/S0955-7997(98)00087-3

Received February 15, 2023

Revised March 16, 2023

Accepted March 20, 2023

Funding Agency: The research by A. L. Kazakov and P. A. Kuznetsov was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the project “Analytical and numerical methods of mathematical physics in problems of tomography, quantum field theory, and fluid mechanics” (No. of state registration: 121041300058-1).

Alexandr Leonidovich Kazakov, Dr. Phys.-Math. Sci., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: kazakov@icc.ru .

Pavel Alexandrovich Kuznetsov, Cand. Sci. (Phys. Math.), Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: kuznetsov@icc.ru .

Lev Fridrikhovich Spevak, Cand. Sci. (Engineering Sciences), Institute of Engineering Science of UB RAS, Yekaterinburg, 620049 Russia, e-mail: lfs@imach.uran.ru .

Cite this article as: A. L. Kazakov, P. A. Kuznetsov, L. F. Spevak, The problem of diffusion wave initiation for a nonlinear second-order parabolic system. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 67–86 .