ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 2 2023

УДК 517.518.832

ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ В КРУГЕ ФУНКЦИИ ПО ГРАНИЧНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ ЕЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТИ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ВСПЛЕСКОВ

Н. И. Черных

В работе предложен простой для численной реализации способ приближенного восстановления аналитической в круге функции $f(z)$ по известным (или произвольно задаваемым) граничным значениям ее вещественной части (при условии ее непрерывности) при помощи интерполяционных всплесков. Несмотря на то что хорошо известны точные аналитические формулы для решения этой задачи, явные формулы аппроксимации функции $f(z)$, предложенные здесь, применять на практике значительно проще, поскольку использование ранее известных точных формул требуют привлечения численных методов интегрирования при вычислении сверток функций с ядрами Пуассона или Шварца. Для используемых в работе аппроксимаций при любом $p \geq 2$ получены эффективные оценки сверху погрешности приближения аналитических в круге функций интерполяционными всплесками в пространствах $L_p(0, 2\pi)$, которые позволяют по требуемой точности восстановления функции $f(z)$ определять параметры этих всплесков. Отметим, что при непрерывности вещественной части $f(z)$ на границе круга нельзя гарантировать непрерывность $f(z)$ в замыкании круга, поэтому в общем случае оценка погрешности аппроксимации $f(z)$ в равномерной метрике (при $p = \infty$) невозможна.

Ключевые слова: кратномасштабная аппроксимация, масштабирующая функция, интерполяционные всплески, тригонометрические полиномы, порядок аппроксимации, приближение функций.

N. I. Chernykh. Reconstruction of a function analytic in a disk from the boundary values of its real part using interpolation wavelets.

For a function $f(z)$ analytic in a disk, a method of approximate reconstruction from known (or arbitrarily specified) boundary values of its real part (under the condition of its continuity) using interpolation wavelets is proposed; the method is easy to implement numerically. Despite the fact that there are known exact analytical formulas for solving this problem, the explicit formulas for approximating the function $f(z)$ proposed here are much easier to apply in practice, since the previously known exact formulas lead to the necessity to apply numerical integration methods when calculating convolutions of functions with Poisson or Schwartz kernels. For the approximations used in this paper, effective upper bounds are obtained for the error of approximation of functions analytic in the disk by interpolation wavelets in the spaces $L_p(0, 2\pi)$ for any $p \geq 2$. These estimates can be used to find the parameters of the wavelets from a desired accuracy of recovering the function $f(z)$. Note that if the real part of $f(z)$ is continuous on the boundary of the disk, then the continuity of $f(z)$ in the closure of the disk cannot be guaranteed; that is why it is impossible to estimate the approximation error for $f(z)$ in the uniform metric (for $p = \infty$) in the general case.

Keywords: multiresolution approximation, scaling function, interpolation wavelets, trigonometric polynomials, approximation order, function approximation.

MSC: 42A10, 42B35, 65T60

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-287-293

Введение

Задачу восстановления аналитической функции

$$f(z) = u(r, x) + iv(r, x), \quad z = re^{ix}, \tag{0.1}$$

в круге комплексной плоскости по заданным значениям ее вещественной части на границе этого круга достаточно решить для единичного круга $K_1 = \{z \colon |z| \leq 1\}$. Отметим несколько известных точных формул решения этой задачи. Самый очевидный способ — разложить периодическую функцию $u(1, x)$ в тригонометрический ряд Фурье

$$u(1, x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

вычислив его коэффициенты, и продолжить ряд внутрь круга по формуле

$$u(r,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (r < 1).$$

Далее этот ряд и тригонометрически сопряженный к нему ряд

$$v(r,x) = \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

подставить в формулу (0.1), получив представление функции $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{a_0 + ib_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k) z^k. \tag{0.2}$$

Ясно, что при любом способе для вычисления мнимой константы ib_0 требуется дополнительная информация, например, задание значения функции $f(z)$ при $z = 0$: $f(0) = (a_0 + ib_0)/2$. Еще один способ восстановления функций $u(r,x)$ и $v(r,x)$ возможен с использованием ядра Пуассона и его сопряженного в виде [1, гл. VI]

$$u(r,x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(1,\xi) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(x-\xi) + r^2}\, d\xi,$$

$$v(r,x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(1,\xi) \frac{2r\sin(x-\xi)}{1 - 2r\cos(x-\xi) + r^2}\, d\xi.$$

Подстановка этих формул в (0.1) равносильна записи функции $f(z)$ в виде формулы Шварца [1, гл. VI]

$$f(z) = u(r,x) + iv(r,x) = \frac{ib_0}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(1,\xi) \frac{e^{i\xi} + z}{e^{i\xi} - z}\, d\xi \tag{0.3}$$

(тоже с точностью до ib_0).

Применение формул (0.2) и (0.3) очень удобно для теоретического исследования свойств восстановленной функции $f(z)$, однако при практической реализации этих формул придется применять численные формулы приближенного интегрирования, используя значения функции $u(1,x)$ на достаточно "густой" сетке на промежутке $[0, 2\pi)$ и получая приближенное представление функции $f(z)$, все более точное, чем меньше шаг сетки. Нам представляется (см. далее предложенный алгоритм), что если функция $u(1,x)$ является непрерывной на периоде, то для восстановления функции $f(z)$ выгоднее использовать интерполяционные всплески. Они будут построены в следующих разделах. Применение их ортогонального варианта выглядит здесь менее удачно, поскольку снова возникает проблема приближенного вычисления определенных интегралов.

1. Построение интерполяционных всплесков

Вначале дадим некоторые определения и изложим свойства применяемых в работе интерполяционных периодических всплесков — базисных функций подпространств кратномасштабной аппроксимации (КМА) пространства $C_{2\pi}$ непрерывных 2π-периодических функций. Такие базисы для пространства $C^0(\mathbb{R})$ непрерывных функций на оси $\mathbb{R}$ и быстро убывающих на бесконечности, вероятно, впервые появились в 1933 г. в работе В. А. Котельникова [2] и были составлены из сжатий и сдвигов синк-функции $K(x) = \sin \pi x / \pi x$. Ю. Н. Субботин [3] в 1972 г., развивая теорию приближения функций сплайнами, построил базисы пространства $C_{2\pi}$ на сгущающихся сетках по схеме, очень похожей на возникшую позже схему Мейера [4]. Вначале он построил базисы возрастающей по вложению последовательности подпространств полиномиальных сплайнов, в совокупности всюду плотных в $C_{2\pi}$, а затем на их основе (без применения преобразования Фурье) — и интерполяционный базис всего пространства $C_{2\pi}$. И фактически это построение конкретной системы всплесков (т. е. КМА) было сделано задолго до появления первых теоретических работ по ним. Следует также отметить, что начало построению ортогональных всплесков положено еще раньше — в 1910 г. в работе А. Хаара [5].

Возникновение и систематическое развитие теории всплесков связано с именами И. Мейера, А. Гроссмана, Ж. Морле, Ж. Стрёмберга, С. Малла, И. Дебеши, Ч. Чуи, К. И. Осколкова и других математиков. Возможно, одни из первых результатов по всплескам были доложены И. Мейером (с названием “ондолеты”) на семинаре Бурбаки в 1985 – 1986 гг.

В настоящей работе мы используем для дальнейшего развития и применения интерполяционные всплески типа Мейера, порожденные заданным преобразованием Фурье $\widehat{\varphi}(\omega) := \widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega)$, сосредоточенным на отрезке $[-(1+\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2]$ при $\varepsilon \in (0, 1/3]$. Помимо четности относительно нуля предполагается также, что функция $\widehat{\varphi}(\omega)$ является кусочно-гладкой на всей числовой оси $\mathbb{R}$, тождественно равной 1 при $|\omega| \le (1-\varepsilon)/2$, а при $(1-\varepsilon)/2 < |\omega| \le (1+\varepsilon)/2$ доопределенной таким образом, что почти всюду на $\mathbb{R}$ будет

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\omega + n) = 1. \tag{1.1}$$

Известно (см., например, [6]), что последнее равенство гарантирует следующее свойство интерполяции: $\varphi(k) = \delta_{k,0}$ $(k \in \mathbb{Z})$, где $\delta_{k,0}$ — символ Кронекера.

В работе [6] по обратному преобразованию Фурье $\widehat{\varphi}(\omega)$ были построены и изучены свойства 2π-периодизации системы функций $\varphi(2^j x - k)$ $(j, k \in \mathbb{Z}_+)$. При этом вычислять саму функцию $\varphi(x)$ через обратное преобразование Фурье от функции $\widehat{\varphi}(\omega)$ оказалось не нужно, потому что полученная система растяжений и сдвигов периодизированной функции $\varphi(x)$ выражается явно через значения функции $\widehat{\varphi}(\omega)$ в системе точек $\{\nu/2^j\}$ $(\nu = \overline{1, N_{j,+\varepsilon}})$, $N_{j,+\varepsilon} = [2^{j-1}(1+\varepsilon)]$ (см. ниже формулу (1.3)) и является системой тригонометрических полиномов порядка $N_{j,+\varepsilon}$. В [6] также построены еще две функции $\widetilde{\varphi}(\omega)$, порождающие по той же схеме уже интерполяционно-ортогональные 2π-периодические всплески. Там эти функции были обозначены через $\widehat{\varphi}_1(\omega)$ и $\widehat{\varphi}_2(\omega)$, а через $\widehat{\varphi}_3(\omega)$ была обозначена определенная выше функция $\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega)$. Функция $\widehat{\varphi}_2(\omega)$ определяется следующим образом:

$$\widehat{\varphi}_2(\omega) = \widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega) + i \cdot \operatorname{sign}\omega \cdot \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)\big(\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1) + \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega+1)\big).$$

Функцию $\widehat{\varphi}_1(\omega)$ выписывать не будем, поскольку в дальнейшем изложении она не участвует. Здесь снова справедливо равенство $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}_2(\omega+n) \equiv 1$ $(\omega \in \mathbb{R})$. Следовательно, для самих функций $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$ имеют место равенства $\varphi_s(l) = \delta_{l,0}$ $(l \in \mathbb{Z},\ s = 2, 3)$.

В данной работе, имея описанные функции $\widehat{\varphi}_2(\omega)$ и $\widehat{\varphi}_3(\omega)$, следуя И. Мейеру [4], определяем (но не вычисляем!) кратномасштабные аппроксимации (КМА) пространства $C^0(R)$, а именно, возрастающие по вложению с ростом j системы подпространств $\widetilde{V}_{s,j}$ с интерполяционными базисами

$$\{\varphi_s^{j,k}(x) = \varphi_s(2^j x - k) \colon k \in \mathbb{Z}\} \quad (j \in \mathbb{Z};\ s = 2, 3), \tag{1.2}$$

для которых выполнены условия интерполяции

$$\varphi_s^{j,k}\Big(\frac{l}{2^j}\Big) = \delta_{k,l} \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Следует заметить, что определять любую функцию $\widehat{\varphi}(\omega)$ не конкретной формулой (как это было у И. Мейера), а с помощью свойств, указанных в абзаце перед формулой (1.1), предложили Д. Оффин и К. И. Осколков [7].

После 2π-периодизации систем (1.2) получаются две системы тригонометрических полиномов степени $N_{j,+\varepsilon} = [2^{j-1}(1+\varepsilon)]$

$$\Big\{\Phi_3^{j,k}(x) = 2^{-j+1}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{N_{j,+\varepsilon}} \widehat{\varphi}_\varepsilon^2\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\cos\nu\Big(x - \frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Big) \ \ \big(k = \overline{0, 2^j - 1}; j \in \mathbb{Z}_+\big)\Big\}, \tag{1.3}$$

$$\Big\{\Phi_2^{j,k}(x) = \Phi_3^{j,k}(x) - 2^{-j+1}\sum_{\nu=N_{j,-\varepsilon}}^{N_{j,+\varepsilon}} \widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\Big(\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big) - 1\Big)\sin\nu\Big(x - \frac{2\pi k}{2^j}\Big) \ \ \big(k = \overline{0, 2^j - 1}; j \in \mathbb{Z}_+\big)\Big\}, \tag{1.4}$$

где $N_{j,-\varepsilon} = [2^{j-1}(1-\varepsilon)]$. Данные системы функций являются интерполяционными на сетках точек $\{2\pi l/2^j\}$ $\big(l = \overline{0, 2^j - 1};\ j \in \mathbb{Z}_+\big)$, образуют базисы подпространств $V_{s,j}$ 2π-периодических КМА пространства $C_{2\pi}$, причем система (1.4) является интерполяционно-ортогональной (т. е. ортонормированной при умножении на $2^{j/2}$). Соответствующие пространства $\widetilde{V}_{s,j}$ обладают всеми свойствами КМА, а именно,

$$\widetilde{V}_{s,j} \subset \widetilde{V}_{s,j+1}, \quad \bigcap_j \widetilde{V}_{s,j} = \widetilde{V}_{s,0} = \{\mathrm{const}\,\}, \quad \overline{\bigcup_{s,j} \widetilde{V}_{s,j}} = C_{2\pi} \quad (s = 2, 3).$$

Кроме того, если взять прямые дополнения $W_{s,j}$ подпространств $\widetilde{V}_{s,j}$ до $\widetilde{V}_{s,j+1}$, то, объединяя их базисы, получим интерполяционный базис

$$\Big\{1, \Psi_s^{j,k}(x) = \Phi_s^{j+1,2k-1}(x) \ \ \big(k = \overline{1, 2^j};\ j \in \mathbb{Z}_+\big)\Big\}$$

всего пространства $C_{2\pi}$, так что для любой функции $g \in C_{2\pi}$ будет иметь место итерационно определяемое разложение

$$g(x) = g(0) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^j}\Big(g\Big(\frac{2\pi(2k-1)}{2^{j+1}}\Big) - S_{2^{j-1}}\Big(\frac{2\pi(2k-1)}{2^{j+1}}, g\Big)\Big)\Psi_s^{j,k}(x), \tag{1.5}$$

где $S_n(x,g)$ — частная сумма порядка n этого же ряда (1.5). Для практических вычислений ряд заменяется частной суммой с указанием соответствующей оценки погрешности аппроксимации. Но в нашем случае частные суммы порядка 2^j просто совпадают с интерполяционными проекциями $\mathrm{Pr}^{\mathrm{int}}_{\widetilde{V}_{s,j}} g(x)$ функции g на подпространство $\widetilde{V}_{s,j}$, а именно, имеет место равенство

$$S_{2^j}(x,g) = \mathrm{Pr}^{\mathrm{int}}_{\widetilde{V}_{s,j}} g(x) = \sum_{k=1}^{2^j} g\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Phi_s^{j,k}(x) \quad (s = 2, 3). \tag{1.6}$$

2. Оценка погрешности аппроксимации функций, аналитических в единичном круге

Для формулировки основного результата данной работы дадим некоторые определения. Пусть $E_n(g)_{C_{2\pi}}$ — величина наилучшего приближения в равномерной метрике 2π-периодической непрерывной функции g тригонометрическими полиномами порядка n и $L_{s,j}$ — константа Лебега оператора интерполяционного проектирования $\mathrm{Pr}^{\mathrm{int}}_{\widetilde{V}_{s,j}}$ функций $g \in C_{2\pi}$ на подпространство $\widetilde{V}_{s,j}$, т. е.

$$L_{s,j} = \sup_{g: \|g\|_{C_{2\pi}} \le 1} \big\|\mathrm{Pr}^{\mathrm{int}}_{\widetilde{V}_{s,j}} g\big\|_{C_{2\pi}} = \Big\|\sum_{k=1}^{2^j} |\Phi_s^{j,k}(x)|\Big\|_{C_{2\pi}} \quad (s = 2, 3). \tag{2.1}$$

Пусть также $L_p(0,2\pi)$ $(p \ge 1)$ — пространство 2π-периодических функций, абсолютно интегрируемых на периоде с p-й степенью с обычным определением нормы

$$\|g\|_p = \|g\|_{L_p(0,2\pi)} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |g(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Отметим еще, что далее через $\widetilde{g}(x)$ обозначается функция, тригонометрически сопряженная функции $g(x)$.

При $0<r<1$ определим гармонические в K_1 полиномы

$$\Phi_3^{j,k}(r,x) = 2^{-j+1}\biggl(\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{2^j-1} r^\nu \widehat{\varphi}_3^2\Bigl(\frac{\nu}{2^j}\Bigr)\cos\nu\Bigl(x-\frac{2\pi k}{2^j}\Bigr)\biggr) \quad (k=\overline{0,2^j-1},\ j\in\mathbb{Z}),$$

а по заданной функции $u(1,x)=\operatorname{Re} f(e^{ix})$ (см. введение) — полиномы

$$u_{j,3}(r,x) = \sum_{k=1}^{2^j} u\Bigl(1,\frac{2\pi k}{2^j}\Bigr)\Phi_3^{j,k}(r,x),$$

$$u_{j,2}(r,x) = u_{j,3}(r,x) + \sum_{\nu=N_{j,-\varepsilon}}^{N_{j,+\varepsilon}} r^\nu \widehat{\varphi}_\varepsilon\Bigl(\frac{\nu}{2^j}\Bigr)\Bigl(\widehat{\varphi}_\varepsilon\Bigl(\frac{\nu}{2^j}\Bigr)-1\Bigr)\sin\nu\Bigl(x-\frac{2\pi k}{2^j}\Bigr)$$

и положим

$$v_{j,s}(r,x) = \widetilde{u}_{j,s}(r,x) \quad (s=2,3).$$

Теорема. *Для любой аналитической в единичном круге K_1 функции $f(z)$ $(z=re^{ix})$ с непрерывной граничной функцией $u(1,x)=\operatorname{Re} f(e^{ix})$ и вещественным значением в нуле, $\Im f(0)=0$, при $|z|\le 1$, $0<\varepsilon\le 1/3$ и $p\ge 2$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned}&\biggl(\int\limits_0^{2\pi} \bigl|f(z)-(u_{j,s}(r,x)+iv_{j,s}(r,x))\bigr|^p\,dz\biggr)^{1/p}\\
&\le \bigl\|u(1,x)-\operatorname{Pr}^{\text{int}}_{\widetilde{V}_{s,j}}(u(1,x))\bigr\|_p + \bigl\|\widetilde{u}(1,x)-\widetilde{\operatorname{Pr}}^{\text{int}}_{\widetilde{V}_{s,j}}(u(1,x))\bigr\|_p\\
&\le (1+C_{\varepsilon,s})(1+4\pi p)E_{N_{j,-\varepsilon}}(u(1,\cdot))_{C_{2\pi}} \quad (s=2,3),\end{aligned}$$

где $C_{\varepsilon,s}$ — положительные константы, зависящие от параметра ε и выбранной в разд. 1 *функции $\widehat{\varphi}_\varepsilon$, определенные ниже в формулах* (2.3).

Доказательство. Авторы работы [7] заметили, что для любого тригонометрического полинома $T_{N_{j,-\varepsilon}}(x)$ порядка $N_{j,-\varepsilon}=[2^{j-1}(1-\varepsilon)]$ и систем функций типа (1.3) и (1.4) (т.е. с описанными в разд. 1 свойствами функции $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$) справедливо тождество $\operatorname{Pr}^{\text{int}}_{\widetilde{V}_{s,j}} T_{N_{j,-\varepsilon}}(x) \equiv T_{N_{j,-\varepsilon}}(x)$. Поэтому в силу неравенства Лебега из (1.6) и (2.1) для любой функции $g\in C_{2\pi}$ очевидно следует неравенство

$$\bigl\|g(x)-\operatorname{Pr}^{\text{int}}_{\widetilde{V}_{s,j}} g(x)\bigr\|_{C_{2\pi}} \le (1+L_{s,j})E_{N_{j,-\varepsilon}}(g)_{C_{2\pi}}, \tag{2.2}$$

где $L_{s,j}$ — константа Лебега оператора интерполяционного проектирования (см. (2.1)). Константы $L_{s,j}$ уже оценены в [6, леммы 2 и 3]. Из [6] следует, что в (2.2) при $s=2$ и 3 соответственно имеем

$$\begin{aligned}L_{3,j} &\le C_{\varepsilon,3} = \Bigl(\frac{4}{\pi^2}+\varepsilon+1\Bigr)\bigvee_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}\bigl(\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega)\bigr)'_\omega,\\
L_{2,j} &\le C_{s,2} = L_{3,j} + \Bigl(\frac{4}{\pi^2}+\varepsilon+1\Bigr)\bigvee_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}\bigl(\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)\widehat{\varphi}_\varepsilon(1-\omega)\bigr)'_\omega,\end{aligned} \tag{2.3}$$

где $\bigvee_a^b g(\omega)$ обозначает вариацию функции $g(\omega)$ на отрезке $[a,b]$. Из оценок (2.2) и (2.3) получаем, что

$$\|g(x)-S_{2^j}(x,g)\|_{C_{2\pi}}=\|g(x)-\mathrm{Pr}^{\mathrm{int}}_{\widetilde{V}_{s,j}}g(x)\|_{C_{2\pi}}\le(1+C_{\varepsilon,s})E_{N_{j,-\varepsilon}}(g)_{C_{2\pi}}\quad(s=2,3). \tag{2.4}$$

Перепишем неравенство (2.4) для непрерывной функции $g(x)=u(1,x)$ в виде

$$\big\|u(1,\cdot)-\mathrm{Pr}^{\mathrm{int}}_{\widetilde{V}_{s,j}}(u(1,\cdot))\big\|_{C_{2\pi}}\le(1+C_{\varepsilon,s})\big\|u(1,\cdot)-T_{N_{j,-\varepsilon}}(\cdot)\big\|_{C_{2\pi}}, \tag{2.5}$$

где $T_{N_{j,-\varepsilon}}(x)$ — тригонометрические полиномы наилучшего приближения порядка $N_{j,-\varepsilon}$ по системам (1.3) и (1.4), построенные для функции $g(x)=u(1,x)$. Пусть $T_{N_{j,-\varepsilon}}(r,x)$ $(0<r<1)$ — соответствующие им гармоничные в K_1 полиномы порядка $N_{j,-\varepsilon}$, а $\widetilde{T}_{N_{j,-\varepsilon}}(r,x)$ — их тригонометрически сопряженные. К сожалению, непрерывность функции $g(x)$ обеспечивает для тригонометрически сопряженной функции $\widetilde{g}(x)$ только включение $\widetilde{g}\in L_p(0,2\pi)$ при $1\le p<\infty$ (а не ее непрерывность). Но поскольку $C_{2\pi}\subset L_p(0,2\pi)$, то при любом $p\ge2$ из неравенства $\|\widetilde{g}(x)\|_p\le 2p\|g(x)\|_p$ для функций $\widetilde{g}(x)$, тригонометрически сопряженных с $g(x)$ (см. [8, неравенство (14.5) на с. 566–567]), получаем следующее неравенство:

$$\big\|v(r,x)-\widetilde{T}_{N_{j,-\varepsilon}}(r,x)\big\|_p=\big\|\widetilde{u}(r,x)-\widetilde{T}_{N_{j,-\varepsilon}}(r,x)\big\|_p\le 2p\big\|u(r,x)-T_{N_{j,-\varepsilon}}(r,x)\big\|_p$$

$$\le 4\pi p\big\|u(r,x)-T_{N_{j,-\varepsilon}}(r,x)\big\|_{C_{2\pi}}\le 4\pi p\big\|u(1,x)-T_{N_{j,-\varepsilon}}(x)\big\|_{C_{2\pi}}\le 4\pi p(1+C_{s,\varepsilon})E_{N_{j,-\varepsilon}}(u(1,x))_{C_{2\pi}}.$$

Из (2.5) и последнего неравенства следует справедливость сформулированной теоремы.

Автор выражает благодарность В. Т. Шевалдину за добрые советы при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маркушевич А.И.** Краткий курс теории аналитических функций. Изд. 3-е, исп. и доп. М.: Наука, 1966. 388 с.
2. **Котельников В.А.** О пропускной способности “эфира” и проволоки в электросвязи (Приложение) // Успехи физ. наук. 2006. Т. 176, № 7. С. 762–770. doi: 10.3367/UFNr.0176.200607h.0762
3. **Субботин Ю.Н.** Приближение сплайнами и гладкие базисы в $C[0,2\pi)$ // Мат. заметки. 1972. Т. 12, № 1. С. 43–51.
4. **Meyer Y.** Ondelettes et opérateurs. Hermann, Paris, 1990. Vol. I–II.
5. **Haar A.** Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. 1910. Vol. 69. P. 331–371. doi 10.1007/BF01456326 .
6. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Интерполяционно-ортогональные системы всплесков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 153–161.
7. **Offin D., Oskolkov K.** A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constr. Approx. 1993. Vol. 9. P. 319–325.
8. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.

Поступила 3.04.2023
После доработки 24.04.2023
Принята к публикации 15.05.2023

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: chernykh@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Markushevich A.I. *Kratkii kurs teorii analiticheskikh funktsii* [A short course in the theory of analytic functions]. Moscow: Nauka Publ., 1966. 388 p. (in Russian).
2. Kotel'nikov V.A. On the capacity of "ether" and wire in telecommunications (Application). *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 2006, vol. 176, no. 7, pp. 762–770 (in Russian). doi: UFNr.0176.200607h.0762
3. Subbotin Yu.N. Spline approximation and smooth bases in $C[0, 2\pi)$. *Math. Notes*, 1972, vol. 12, iss. 1, pp. 459–463. doi: 10.1007/BF01094391
4. Meyer Y. *Ondelettes et opérateurs.* Hermann, Paris, 1990, vol. I–II.
5. Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. *Math. Ann.*, 1910, vol. 69, pp. 331–371. doi: 10.1007/BF01456326
6. Subbotin Yu.N., Chernykh N.I. Interpolating-orthogonal wavelet system. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2009, vol. 264, suppl. 1, pp. S107–S115. doi: 10.1134/S0081543809050083
7. Offin D., Oskolkov K. A note on orthonormal polynomial bases and wavelets. *Constr. Approx.*, 1993, vol. 9, pp. 319–325.
8. Bari N.K. A treatise on trigonometric series. Oxford; NY: Pergamon Press, 1964. Original Russian text published in Bari N.K. Trigonometricheskie rjady, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 936 p.

Received April 3, 2023
Revised April 24, 2023
Accepted May 15, 2023

Nikolai Ivanovich Chernykh, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: chernykh@imm.uran.ru .

Cite this article as: N. I. Chernykh. Reconstruction of a function analytic in a disk from the boundary values of its real part using interpolation wavelets. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 287–293 .