

УДК 539.3

**АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ<sup>1</sup>****С. А. Бочкарёв, В. П. Матвеев**

Представлены результаты исследований собственных частот колебаний круговых цилиндрических оболочек вращения, полностью или частично заполненных идеальной сжимаемой жидкостью. Толщина оболочек непостоянна в меридиональном направлении и изменяется по различным законам. Поведение упругой конструкции и сжимаемой жидкости описывается в рамках классической теории оболочек и уравнений Эйлера. Эффекты плескания на свободной поверхности жидкости не учитываются. Уравнения движения оболочки совместно с соответствующими геометрическими и физическими соотношениями сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно новых неизвестных. Акустическое волновое уравнение преобразуется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода обобщенных дифференциальных квадратур. Решение сформулированной краевой задачи осуществляется методом ортогональной прогонки Годунова. Для вычисления собственных частот колебаний используется сочетание пошаговой процедуры с последующим уточнением методом деления пополам. Достоверность получаемых результатов подтверждена сравнением с известными численными решениями. Для оболочек с различными комбинациями граничных условий (свободное опирание, жесткое и консольное закрепление) и уровнем заполнения жидкостью исследованы зависимости минимальных частот колебаний, полученных при степенном (линейном и квадратичном, имеющем симметричную и несимметричную формы) и гармоническом (с положительной и отрицательной кривизной) изменениях толщины. Продемонстрировано существование конфигураций, обеспечивающих при аналогичном уровне заполнения жидкостью значительный рост частотного спектра по сравнению с оболочками постоянной толщины при одинаковых ограничениях на вес конструкции.

Ключевые слова: классическая теория оболочек, цилиндрическая оболочка, сжимаемая жидкость, метод ортогональной прогонки Годунова, метод обобщенных дифференциальных квадратур, собственные колебания, переменная толщина.

**S. A. Bochkariev, V. P. Matveenko. Free vibration analysis of a cylindrical shell of variable thickness partially filled with a fluid.**

The paper investigates the natural vibration frequencies of circular cylindrical shells of rotation, completely or partially filled with an ideal compressible fluid. The thickness of the shells is not constant and varies in the meridional direction according to different laws. The behavior of the elastic structure and compressible fluid is described within the framework of the classical shell theory using the Euler equations. The effects of sloshing on the free surface of the fluid are not considered. The equations of motion of the shell together with the corresponding geometric and physical relations are reduced to a system of ordinary differential equations in new unknowns. The acoustic wave equation is transformed to a system of ordinary differential equations by applying the generalized differential quadrature method. The solution to the formulated boundary value problem is found using Godunov's orthogonal sweep method. To calculate the natural frequencies of vibration, a stepwise procedure is used in combination with the refinement by the half-division method. The reliability of the obtained results is verified by comparing them with known numerical solutions. The behavior of minimum vibration frequencies at stepwise (linear and quadratic, having symmetric and asymmetric forms) and harmonic (with positive and negative curvature) variations in thickness is investigated for shells with different combinations of boundary conditions (simple support, rigid clamping and cantilever support) and levels of fluid filling. The study revealed the existence of configurations that provide at similar levels of filling a significant increase in the frequency spectrum compared to shells of constant thickness with the same weight constraints.

Keywords: classical shell theory, cylindrical shell, compressible fluid, Godunov's orthogonal sweep method, generalized differential quadrature method, free vibrations, variable thickness.

MSC: 74F10, 74H15

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-27-40

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках государственного задания, номер государственной регистрации темы АААА-А19-119012290100-8.

## Введение

Тонкостенные конструкции, в том числе взаимодействующие с жидкостью или ее содержащие, широко применяются в авиационной, строительной, химической и других отраслях промышленности. Исходя из требований весовой оптимизации, конструктивных особенностей или даже архитектурных пожеланий такие объекты могут быть спроектированы с неоднородным по толщине профилем. Кроме того переменная толщина стенки может быть следствием как производственных дефектов, так и локальной коррозии, возникшей в процессе эксплуатации изделия. Поскольку даже незначительное варьирование толщины конструкции влияет на ее прочностные и колебательные свойства, изменяя тем самым эксплуатационные характеристики, тщательное изучение этой особенности становится обязательным требованием уже на этапе проектирования.

Количество работ, посвященных анализу оболочек вращения и пластин с неоднородной толщиной, весьма обширно. Об этом свидетельствуют библиографические обзоры в недавних публикациях [1; 2], где представлено описание исследований, выполненных для упругих тел с гладко-переменным или ступенчато-переменным изменением толщины как в осевом, так и окружном направлениях. Наоборот, список работ, посвященных анализу тонкостенных конструкций с переменной толщиной, взаимодействующих с жидкостью, крайне ограничен. В частности, результаты исследований цилиндрических оболочек представлены только в [3; 4]. Аналитическое решение задачи о собственных колебаниях цилиндрической оболочки с линейным изменением толщины рассмотрено в [3]. Конструкция, частично заполненная несжимаемой жидкостью, разбивается по длине на ряд элементов постоянной толщины, объединение которых осуществляется с помощью метода передаточных матриц. Различие в собственных частотах и формах колебаний для консольных оболочек с переменной и эквивалентной постоянной толщиной оценено для пустых, частично и полностью заполненных жидкостью оболочек. Свободные колебания двухслойной жестко закрепленной оболочки переменной толщины, полностью заполненной жидкостью, исследованы в [4] с использованием сплайнов Бикли для аппроксимации перемещений и углов поворота оболочки. Толщина одного из слоев меняется по линейному, экспоненциальному или синусоидальному закону. Проанализировано влияние относительной толщины для каждого закона на частотный спектр. Воздействие жидкости не оценивалось. Таким образом, влияние уровня жидкости на частотный спектр цилиндрической оболочки, толщина которой изменяется по различным законам в меридиональном направлении, остается неизученным. Выполнение такого исследования является целью настоящей работы.

Отмечается [5], что при использовании метода конечных элементов для анализа оболочек вращения с переменной толщиной для качественного описания расчетной области требуется уменьшение размеров конечного элемента, приводящее к росту количества неизвестных и, следовательно, снижению эффективности самого метода. Поэтому наряду с этим методом, как и вышеупомянутыми, в последние десятилетия широкое распространение получили и другие численные или численно-аналитические алгоритмы, например, такие, как метод обобщенных дифференциальных квадратур [6], Виттрика — Уильямса [7], метод Ритца [8], дискретной ортогональной прогонки [9] и другие. В этой работе решение сформулированной краевой задачи также осуществляется методом ортогональной прогонки Годунова [10]. При его использовании для конструкций, взаимодействующих с жидкостью, применяется комбинированный подход, в котором системы обыкновенных дифференциальных уравнений для упругого тела и жидкости решаются совместно. Для преобразования дифференциальных уравнений, описывающих поведение идеальной сжимаемой жидкости, к нормальному виду Коши применяются методы кубической сплайн-аппроксимации [11] или прямых [11–14]. В недавней публикации [15] на примере усеченной конической оболочки, полностью заполненной жидкостью, продемонстрировано, что по сравнению с указанными подходами метод обобщенных дифференциальных квадратур обладает лучшей производительностью.

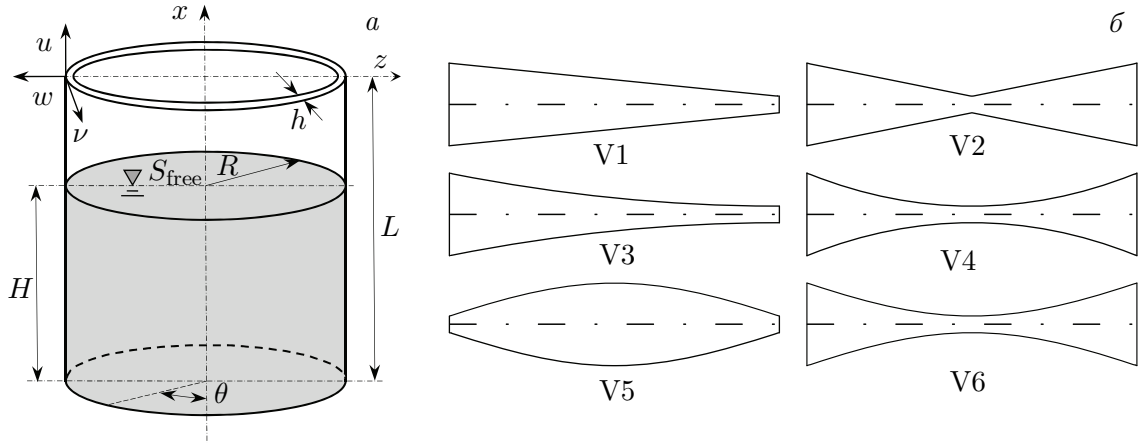


Рис. 1. Расчетная схема цилиндрической оболочки с жидкостью (а) и продольное сечение оболочки с различными вариантами изменения толщины (б).

## 1. Постановка задачи

Рассматривается цилиндрическая оболочка (рис. 1а) радиусом  $R$  и длиной  $L$ , которая полностью или частично на высоту  $H$  заполнена идеальной сжимаемой жидкостью. Толщина оболочки  $h = h(\xi)$  переменна по длине и математически описывается как  $h = h_e g(\xi)$ . Здесь  $h_e$  — эквивалентная толщина, вычисляемая относительно референсной  $h_0$ , и  $g(\xi)$  — функция безразмерной меридиональной координаты  $\xi = x/L$ , определяющая закон изменения толщины. Для каждого из вариантов [16; 17], представленных на рис. 1б (V1 — линейный несимметричный; V2 — линейный симметричный; V3 — квадратичный несимметричный; V4 — квадратичный симметричный; V5 — гармонический выпуклый; V6 — гармонический вогнутый), функция  $g(\xi)$  описывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \text{V1: } g(\xi) &= 1 + k|\xi - 1|, & \text{V2: } g(\xi) &= 1 + k|2\xi - 1|, \\
 \text{V3: } g(\xi) &= 1 + k(\xi - 1)^2, & \text{V4: } g(\xi) &= 1 + k(2\xi - 1)^2, \\
 \text{V5: } g(\xi) &= 1 + k \sin(\pi\xi), & \text{V6: } g(\xi) &= 1 + k[1 - \sin(\pi\xi)],
 \end{aligned}$$

где  $k$  — параметр, характеризующий переменность толщины. Коэффициент  $h_e$ , вычисляемый из условия эквивалентности масс, определяется так:

$$\begin{aligned}
 \text{V1, V2: } h_e &= \frac{2h_0}{2+k}, & \text{V5: } h_e &= \frac{\pi h_0}{2k+\pi}, \\
 \text{V3, V4: } h_e &= \frac{3h_0}{3+k}, & \text{V6: } h_e &= \frac{\pi h_0}{\pi k + \pi - 2k}.
 \end{aligned}$$

При  $k = 0$  толщина оболочки постоянна и равна  $h = h_0$ . Исходя из условия эквивалентности масс ставится задача исследования влияния переменности толщины, определяемой по разным законам, на частотный спектр цилиндрической оболочки при различных уровнях ее заполнения жидкостью и кинематических граничных условиях, задаваемых на краях.

## 2. Основные соотношения

Для классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа — Лява, компоненты вектора деформации  $E_{ij}$  в криволинейной системе координат  $(x, \theta, z)$  могут быть записаны в виде [18]

$$E_{11} = \varepsilon_{11} + z\kappa_{11}, \quad E_{22} = \varepsilon_{22} + z\kappa_{22}, \quad E_{12} = \varepsilon_{12} + 2z\kappa_{12},$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{22} &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), & \varepsilon_{12} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}, & \kappa_{11} &= \frac{\partial \theta_1}{\partial x}, \\ \kappa_{22} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta}, & \kappa_{12} &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta} \right), & \theta_1 &= -\frac{\partial w}{\partial x}, & \theta_2 &= \frac{1}{R} \left( v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $u$ ,  $v$  и  $w$  — меридиональная, окружная и нормальная составляющие вектора перемещений оболочки;  $\theta_i$  — углы поворота недеформируемой нормали.

Физические соотношения, устанавливающие связь между вектором усилий и моментов  $\mathbf{T} = \{T_{11}, T_{22}, S, M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T$  и вектором обобщенных деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}\}^T$ , в матричном виде записываются как

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.2)$$

Здесь величины, составляющие матрицу жесткостей  $\mathbf{D}$ , являются функциями меридиональной координаты  $\xi$  и вычисляются по формулам

$$\bar{a}_{ij}(\xi) = \int_{h(\xi)} \bar{Q}_{ij} dz, \quad \bar{b}_{ij}(\xi) = \int_{h(\xi)} z \bar{Q}_{ij} dz, \quad \bar{c}_{ij}(\xi) = \int_{h(\xi)} z^2 \bar{Q}_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где коэффициенты  $\bar{Q}_{ij}$  определяются известным образом [19] относительно модулей упругости  $E_{11}$  и  $E_{22}$ , коэффициента Пуассона  $\nu_{12}$  и модуля сдвига  $G_{12}$  материала оболочки.

Уравнения движения оболочки имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \theta} - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, & \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \left( Q_{22} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x} \right) - \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial Q_{11}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{22}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} T_{22} - \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p &= 0, \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta} - Q_{11} &= 0, & \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta} - Q_{22} &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $Q_{ii}$  — поперечные силы,  $\rho_0 = \rho_0(\xi) = \int_{h(\xi)} \rho dz$ ,  $\rho$  — плотность материала,  $p$  — гидродинамическое давление, которое в области  $V_f$  в цилиндрической системе координат  $(x, \theta, r)$  описывается акустическим волновым уравнением [20]

$$\nabla^2 p = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (2.4)$$

Здесь  $c$  — скорость звука в жидкости. На смоченной ( $r = R$ ) и свободной ( $x = H$ ) поверхностях, оси вращения оболочки ( $r = 0$ ), нижнем ( $x = 0$ ) и верхнем ( $x = L$ ) краях давление  $p$  удовлетворяет условиям

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} \Big|_{r=R} = -\rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2.5)$$

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} \Big|_{r=0} = 0, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} x = 0: & \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ x = H: & \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, & H = L, \\ p = 0, & H < L, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичные внешние нормали к области жидкости  $V_f$ ,  $\rho_f$  — плотность жидкости. Граничное условие (2.7) при  $x = H < L$  предполагает, что свободная поверхность жидкости  $S_{\text{free}}$  не перемещается, на ней отсутствуют динамическое давление и поверхностное натяжение [21].

Раскладывая все компоненты уравнений (2.1), (2.2) и (2.4) в ряды Фурье по окружной координате  $\theta$ :

$$X(x, \theta) = \sum_{j=0} X_j(x) \cos(j\theta), \quad Y(x, \theta) = \sum_{j=0} Y_j(x) \sin(j\theta),$$

$$X = \{u, w, \theta_1, E_{11}, E_{22}, K_{11}, K_{22}, T_{11}, T_{22}, M_{11}, M_{22}, Q_{11}, p\},$$

$$Y = \{v, \theta_2, E_{12}, K_{12}, S, M_{12}, Q_{22}\},$$

сведем геометрические (2.1) и физические (2.2) соотношения, а также уравнения движения (2.3) к системе восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно новых неизвестных (индекс  $j$  для простоты опущен) [18]:

$$y_1 = T_{11}, \quad y_2 = S + \frac{2M_{12}}{R}, \quad y_3 = M_{11}, \quad y_4 = Q_{11} + \bar{j}M_{12},$$

$$y_5 = u, \quad y_6 = v, \quad y_7 = w, \quad y_8 = \theta_1.$$

Здесь  $j$  — номер гармоники при разложении в ряд Фурье,  $\bar{j} = j/R$ . С учетом этого и принимая во внимание  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y} \exp(i\omega t)$ , искомая система записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = \mathbf{f}(j, \omega, \mathbf{y}), \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{j} \left( \frac{2M_{12}}{R} - y_2 \right) - \omega^2 \rho_0 y_5, & f_2 &= \bar{j} T_{22} - \frac{Q_{22}}{R} - \omega^2 \rho_0 y_6, & f_3 &= y_4 - 2\bar{j} M_{12}, \\ f_4 &= \frac{T_{22}}{R} - \bar{j} Q_{22} - \omega^2 \rho_0 y_7 - p, & f_5 &= \varepsilon_{11}, & f_6 &= \varepsilon_{12} + \bar{j} y_5, & f_7 &= -y_8, & f_8 &= \kappa_{11}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь  $\omega$  — частота колебаний,  $i^2 = -1$ . Входящие в выражения (2.9) величины вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} M_{12} &= \bar{b}_{33} \varepsilon_{12} + 2\bar{c}_{33} \kappa_{12}, & Q_{22} &= -\bar{j} M_{22}, \\ \kappa_{11} &= \frac{\bar{a}_{11} (y_3 - \bar{b}_{12} \varepsilon_{22} - \bar{c}_{12} \kappa_{22}) - \bar{b}_{11} (y_1 - \bar{a}_{12} \varepsilon_{22} - \bar{b}_{12} \kappa_{22})}{\bar{a}_{11} \bar{c}_{11} - \bar{b}_{11}^2}, \\ \varepsilon_{11} &= \frac{y_1 - \bar{a}_{12} \varepsilon_{22} - \bar{b}_{11} \kappa_{11} - \bar{b}_{12} \kappa_{22}}{\bar{a}_{11}}, & T_{22} &= \bar{a}_{12} \varepsilon_{11} + \bar{a}_{22} \varepsilon_{22} + \bar{b}_{12} \kappa_{11} + \bar{b}_{22} \kappa_{22}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{y_2 - 2(\bar{b}_{33} + 2\bar{c}_{33}/R) \bar{j} (y_5/R + y_8)}{\bar{a}_{33} + 4(\bar{b}_{33} + \bar{c}_{33}/R)/R}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \bar{j} y_6 + \frac{y_7}{R}, & \kappa_{22} &= \bar{j} \theta_2, & \theta_2 &= \frac{y_6}{R} - \bar{j} y_7, \\ \kappa_{12} &= \frac{(\varepsilon_{12} + \bar{j} y_5)}{R} - \bar{j} y_8, & M_{22} &= \bar{b}_{12} \varepsilon_{11} + \bar{b}_{22} \varepsilon_{22} + \bar{c}_{12} \kappa_{11} + \bar{c}_{22} \kappa_{22}. \end{aligned}$$

Уравнение (2.4) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом обобщенных дифференциальных квадратур [22]. Для этого область жидкости по радиусу  $r$  делится на  $n$  точек. Тогда производные  $l$ -го порядка от функции  $p(x, r)$  в любой точке  $r_i$  определяются как

$$\frac{\partial^l p(x, r_i)}{\partial r^l} = \sum_{k=1}^n c_{ik}^{(l)} p(x, r_k), \quad i = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, n-1}, \quad (2.10)$$

где весовые коэффициенты  $c_{ik}^{(l)}$  вычисляются по рекуррентным формулам

$$\left. \begin{aligned} c_{ik}^{(1)} &= \frac{M^{(1)}(r_i)}{M^{(1)}(r_k)(r_i - r_k)}, & c_{ii}^{(1)} &= -\sum_{k=1}^n c_{ik}^{(1)}, & M^{(1)}(r_i) &= \prod_{k=1}^n (r_i - r_k), \\ c_{ik}^{(l)} &= l \left( c_{ik}^{(1)} c_{ii}^{(l-1)} - \frac{c_{ik}^{(l-1)}}{r_i - r_k} \right), & c_{ii}^{(l)} &= -\sum_{k=1}^n c_{ik}^{(l)}, \end{aligned} \right\} \quad i \neq k, \quad i, k = \overline{1, n}.$$

С учетом (2.10) граничные условия (2.5) и (2.6) представим в виде

$$\left. \frac{\partial p(x, r_n)}{\partial r} \right|_{r=R} = \sum_{k=1}^n c_{nk}^{(1)} p_k(x) + \rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \left. \frac{\partial p(x, r_1)}{\partial r} \right|_{r=0} = \sum_{k=1}^n c_{1k}^{(1)} p_k(x) = 0,$$

и, переписав их следующим образом:

$$c_{n1}^{(1)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{nk}^{(1)} p_k(x) + c_{nn}^{(1)} p_n(x) + \rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

$$c_{11}^{(1)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{1k}^{(1)} p_k(x) + c_{1n}^{(1)} p_n(x) = 0,$$

получим явные выражения для “крайних” значений

$$p_n(x) = \frac{c_{n1}^{(1)} \sum_{k=2}^{n-1} c_{1k}^{(1)} p_k(x) / c_{11}^{(1)} - \sum_{k=2}^{n-1} c_{nk}^{(1)} p_k(x) - \rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}}{c_{nn}^{(1)} - c_{n1}^{(1)} c_{n1}^{(1)} / c_{11}^{(1)}},$$

$$p_1(x) = -\frac{\sum_{k=2}^{n-1} c_{1k}^{(1)} p_k(x) + c_{1n}^{(1)} p_n(x)}{c_{11}^{(1)}}.$$

Тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений примет вид

$$\begin{aligned} p_{n-1}^{(1)}(x) &= c_{n-11}^{(1)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{n-1k}^{(1)} y_{7+2(k-1)} + c_{n-1n}^{(1)} p_n(x), \\ p_{n-1}^{(2)}(x) &= c_{n-11}^{(2)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{n-1k}^{(2)} y_{7+2(k-1)} + c_{n-1n}^{(2)} p_n(x), \\ y_{7+2(n-1)} &= p_{n-1}(x), \quad y'_{7+2(n-1)} = y_{8+2(n-1)}, \\ y'_{8+2(n-1)} &= -p_{n-1}^{(2)}(x) + y_{7+2(n-1)} \left( \frac{j^2}{r_{n-1}^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) - \frac{p_{n-1}^{(1)}(x)}{r_{n-1}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Принимая во внимание, что в соотношениях (2.9)  $p = p_n$ , совокупное число неизвестных, определяемых системами уравнений (2.8) и (2.11), составляет  $m = 8 + 2(n-1)$ .

Объединенные системы уравнений (2.8), (2.11) решаются методом ортогональной прогонки Годунова с численным интегрированием дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности и соответствующими однородными граничными условиями, задаваемыми на краях оболочки и жидкой среды:

$$y_i \Big|_{x=0} \delta_i + y_{i+4} \Big|_{x=0} (1 - \delta_i) = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (2.12)$$

$$y_i \Big|_{x=L} \delta_{i+4} + y_{i+4} \Big|_{x=L} (1 - \delta_{i+4}) = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (2.13)$$

$$y_i \Big|_{x=0} = 0, \quad i = 10, 12, \dots, m/2, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} y_i|_{x=L} &= 0, \quad i = 10, 12, \dots, m/2, \\ y_i|_{x < L} &= 0, \quad i = 9, 11, \dots, m/2 - 1, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $\delta_i = 0$ , если заданы кинематические, и  $\delta_i = 1$ , если заданы статические граничные условия.

Общее решение систем представляется в виде

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{m/2} C_k \mathbf{y}_k,$$

где  $C_k$  — некоторые константы и  $\mathbf{y}_k$  — совокупность линейно независимых решений объединенных систем, удовлетворяющих граничным условиям (2.12), (2.13). В результате интегрирования по заданному интервалу и удовлетворения граничных условий (2.14), (2.15) получаем алгебраическую систему для определения постоянных  $C_k$

$$\sum_{k=1}^{m/2} C_k f_{ik} = 0, \quad i = 1, m/2. \quad (2.16)$$

Искомая задача сводится к определению таких значений, при которых существует нетривиальное решение системы (2.16). Необходимым условием этого является равенство нулю определителя матрицы:  $|f_{ik}(\omega)| = 0$ . Для вычисления частот  $\omega$ , удовлетворяющих данному условию, используется сочетание пошаговой процедуры и метода деления пополам.

### 3. Численные результаты

В численных примерах рассматриваются свободно опертые ( $v = w = T_{11} = M_{11} = 0$ , SS), жестко заземленные ( $u = v = w = \theta_1 = 0$ , CC) на обоих краях или консольно закрепленные ( $T_{11} = 0$ ,  $S + 2M_{12}/R = 0$ ,  $M_{11} = 0$ ,  $Q_{11} + \bar{j}M_{12} = 0$ , CF) цилиндрические оболочки. На основании исследования сходимости метода обобщенных дифференциальных квадратур, выполненного в работе [15], во всех представленных ниже расчетах область решения в радиальном направлении разбивается на 15 точек. Для представления результатов расчетов вводятся безразмерные параметры уровня заполнения жидкостью  $\psi = H/L$  и относительного изменения низшей собственной частоты колебаний  $\Omega_i(\psi)$  как функции от уровня жидкости  $\psi$  для  $i$ -го закона изменения толщины

$$\Omega_i(\psi) = \frac{\omega_i(\psi) - \omega_0(\psi)}{\omega_i(\psi)} \cdot 100\%.$$

Здесь  $\omega_0(\psi)$  — минимальная частота колебаний оболочки постоянной толщины при аналогичном уровне жидкости. Переменность толщины задается параметром  $\beta = k + 1 = h_{\max}/h_{\min}$ , где  $h_{\max}$  и  $h_{\min}$  — максимальная и минимальная толщина профиля соответственно. Примеры профилей эквивалентной массы при различных значениях параметра  $\beta$  и разных законах изменения толщины приведены в [23].

Верификация результатов, получаемых в рамках описанного алгоритма, осуществлена на следующих примерах. В первом из них рассмотрена пустая ( $\psi = 0$ ) жестко закрепленная (CC) оболочка ( $E_{11} = 181$  ГПа,  $E_{22} = 10.5$  ГПа,  $G_{12} = 7.17$  ГПа,  $\nu_{12} = 0.28$ ,  $\rho = 1600$  кг/м<sup>3</sup>,  $h/R = 0.01$ ,  $R = 0.1$  м), толщина которой изменяется согласно линейному закону в симметричной конфигурации (вариант V2). В табл. 1 приведены минимальные частоты колебаний  $\omega$  (Гц), вычисленные для различных отношений  $L/R$  и разных значений переменности толщины  $\beta$ . Здесь же представлены данные из работы [24], полученные методом конечных элементов. Во втором примере осуществлено сопоставление низших собственных частот колебаний  $\omega$  (Гц) с известными решениями для консольно закрепленной оболочки ( $L = 0.231$  м,  $R = 0.07725$  м,  $h = 0.0015$  м,  $E = 205$  ГПа,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>) постоянной толщины ( $\beta = 1$ ), частично заполненной несжимаемой жидкостью ( $\rho_f = 1000$  кг/м<sup>3</sup>). В табл. 2 представлены результаты,

Т а б л и ц а 1

Сравнение минимальных частот колебаний  $\omega$  (Гц) жестко закрепленной (СС) пустой ( $\psi = 0$ ) оболочки переменной толщины (V2) при различных значениях параметра переменности толщины  $\beta$  и линейных размерах

$\beta$	$L/R = 0.5$		$L/R = 1$		$L/R = 2$		$L/R = 5$	
	Работа [24]	Расчет	Работа [24]	Расчет	Работа [24]	Расчет	Работа [24]	Расчет
1	5101.6	5105.0	1926.6	1929.0	979.7	981.6	449.5	449.7
2	5898.6	5901.7	2141.9	2144.0	1048.4	1048.8	470.4	469.7
3	6359.9	6363.1	2266.9	2268.2	1085.9	1086.7	477.7	477.8
4	6677.3	6680.4	2356.8	2358.3	1113.3	1113.4	482.3	482.0
5	6915.1	6918.3	2419.3	2420.5	1136.4	1136.1	487.5	486.8
6	7102.8	7105.7	2470.0	2470.9	1155.6	1155.0	492.2	491.4
7	7256.1	7258.6	2512.1	2512.8	1171.7	1170.8	496.4	495.4
8	7384.4	7386.5	2547.6	2548.0	1185.3	1184.2	500.1	498.9
9	7493.9	7495.5	2578.0	2578.2	1194.8	1194.2	503.1	502.0

Т а б л и ц а 2

Сравнение собственных частот колебаний  $\omega$  (Гц) консольно закрепленной (СГ) цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью:  $\psi = 0.697$ ,  $\beta = 1$

$\bar{m}$	$j$	Работа [25](эксп.)	Работа [25]	Работа [26]	Работа [28]	Работа [27]	Работа [14]	Расчет
1	1	—	1407.4	—	1407.3	1419.6	1399.5	1405.3
	2	582.0	672.7	664.5	669.8	669.5	668.8	668.9
	3	522.0	543.1	538.0	542.0	541.4	539.8	539.9
	4	798.0	806.0	799.1	806.8	803.1	799.3	799.6
	5	1196.0	1188.4	1178.8	1195.5	1181.9	1172.6	1173.3
	6	1679.7	—	1657.3	1693.6	1665.4	1648.5	1649.4
2	3	1394.0	1425.3	1412.2	1434.0	1419.6	1417.7	1417.9
	4	1244.0	1253.2	1239.2	1261.4	1250.3	1246.5	1246.7
	5	1546.0	1553.8	1535.7	1557.7	1549.4	1544.4	1544.8
	6	—	—	2092.0	2119.7	—	2092.7	2093.5

определенные в рамках как описанного алгоритма, так и натуральных наблюдений [25], различных реализаций метода конечных элементов [25–27], комбинации методов конечных элементов и граничных интегральных уравнений [28]. В [14] также используется метод ортогональной прогонки Годунова, но для преобразования волнового уравнения задействован метод прямых, требующий значительно большей степени дискретизации области жидкости для обеспечения сходимости решения. В табл. 2 через  $\bar{m}$  обозначено количество полуволн в меридиональном направлении. Из представленных в табл. 1 и 2 данных следует, что получаемые результаты хорошо согласуются с ранее опубликованными численными решениями.

На рис. 2а приведены зависимости минимальных частот колебаний  $\omega$  (Гц) от безразмерного уровня заполнения сжимаемой ( $c = 1500$  м/с) жидкостью  $\psi$ , полученные для оболочек постоянной толщины ( $\beta = 1$ ) при различных комбинациях граничных условий. Представленные результаты демонстрируют известную закономерность — с увеличением уровня заполнения собственные частоты колебаний конструкции снижаются вследствие возрастания присоединенной массы жидкости [29]. При этом в зависимости от геометрических размеров конструкции и физико-механических свойств материала может происходить изменение номера окружной гармоники  $j$ , отвечающей минимальной частоте [30–32]. При выбранных параметрах как в случае постоянной, так и для большинства вариантов переменной толщины изменения формы



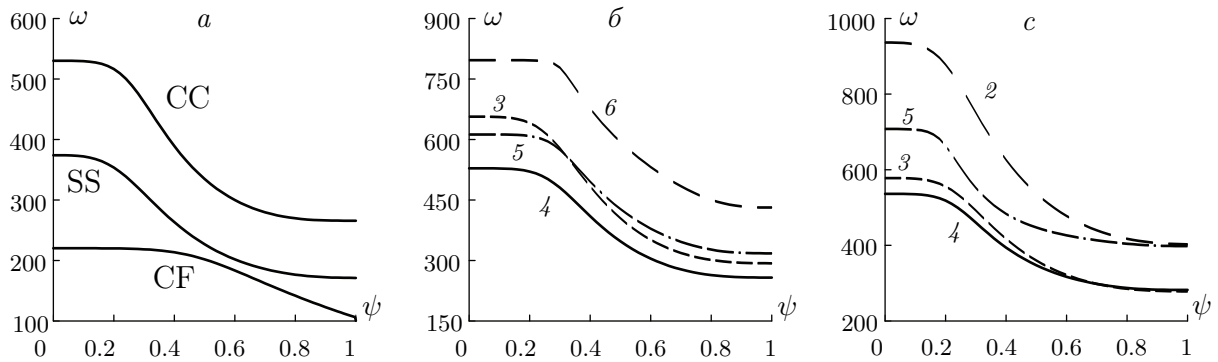


Рис. 2. Зависимости низших собственных частот  $\omega$  (Гц) для различных граничных условий (а) и частот колебаний, полученных для разных значений окружной гармоники  $j$  (б,с), от безразмерного уровня заполнения жидкостью  $\psi$ : а —  $\beta = 1$ ; б — CC, V3,  $\beta = 2$ ; с — CC, V5,  $\beta = 2$ .

колебаний с ростом столба жидкости не происходит. Эти две особенности демонстрируются на графиках, приведенных на рис. 2б и 2с. Здесь отображены зависимости частот колебаний  $\omega$  (Гц) от уровня заполнения  $\psi$  жестко закрепленной оболочки, толщина которой меняется по различным законам, для нескольких окружных гармоник  $j$ . На рисунках приводятся моды (их номера указаны под кривыми), соответствующие частоты колебаний которых близки к минимальному значению для каждой из рассмотренных конфигураций. Полученные графики позволяют оценить степень эволюции частот для разных законов изменения толщины с повышением уровня жидкости. Для ограниченного количества конфигураций различная чувствительность окружных гармоник к присоединенной массе жидкости обеспечивает смену форм с низшей частотой колебаний (рис. 2с), тогда как для других этот фактор не имеет решающего значения. В силу этого возможность управления формой колебаний за счет подбора подходящего закона изменения толщины имеет ограниченный характер, даже несмотря на то что для некоторых переменных профилей окружные моды, отвечающие минимальным частотам, отличны от постоянного.

На рис. 3–5 приведены зависимости относительного изменения низшей собственной частоты колебаний  $\Omega$  от безразмерного уровня заполнения  $\psi$ , полученные для оболочек с различными комбинациями граничных условий, толщина которых меняется по различным законам с разными коэффициентами переменности  $\beta$ . Номера кривых соответствуют законам изменения толщины. Демонстрируемые зависимости наглядно иллюстрируют преимущества или недостатки переменного профиля по сравнению с постоянным для оболочек с различными комбинациями граничных условий и одинаковым весом для конкретного уровня заполнения жидкостью. Характерные изломы на графиках (например, CF,  $\beta = 2$ , законы V4 и V6), имеющие место при определенном значении  $\psi$ , обусловлены изменением гармоники в окружном направлении  $j$  с минимальной частотой колебаний, как это продемонстрировано на рис. 2с (кривые  $j = 3$  и  $j = 4$ ). Из приведенных данных можно заключить, что не существует универсального закона изменения толщины, обеспечивающего максимизацию минимальной частоты колебаний содержащей жидкость конструкции по сравнению с профилем постоянной толщины. Более того, исходя из условий эксплуатации промышленных резервуаров, процессы наполнения и опорожнения которых циклически сменяют друг друга, некоторые профили не могут быть рекомендованы к использованию из-за повышения минимальной частоты для одного уровня жидкости и существенного снижения для другого. Исключениями здесь выступают выпуклый гармонический профиль (вариант V5) для свободно опертых оболочек и все симметричные профили (V2, V4, V6) для консольно закрепленных оболочек, которые гарантируют более высокие низшие частоты колебаний при любом уровне жидкости. За редким исключением рост отношения максимальной толщины профиля к минимальной ухудшает динамические характеристики конструкции. В случае консольного закрепления (рис. 2а и 5) наблюдаемое

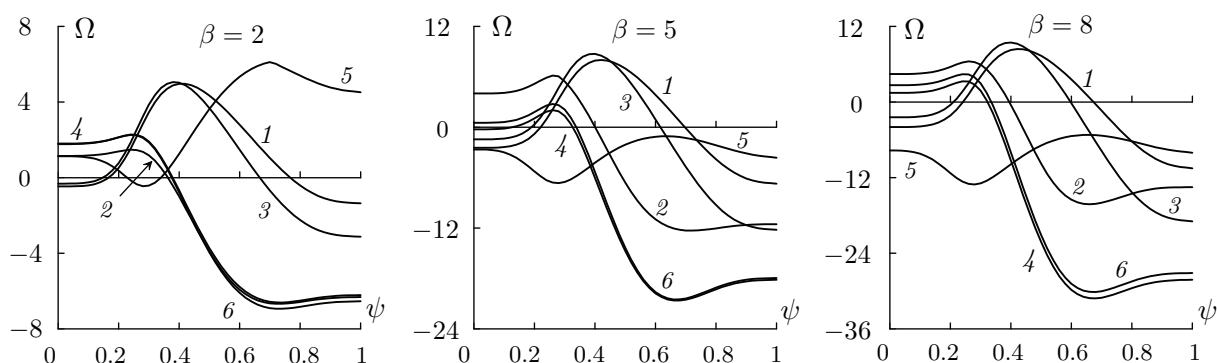


Рис. 3. Зависимости относительного изменения низшей собственной частоты колебаний  $\Omega$  свободно опертой оболочки (SS) от безразмерного уровня заполнения жидкостью  $\psi$ , полученные для различных законов изменения толщины и параметра ее переменности  $\beta$ .

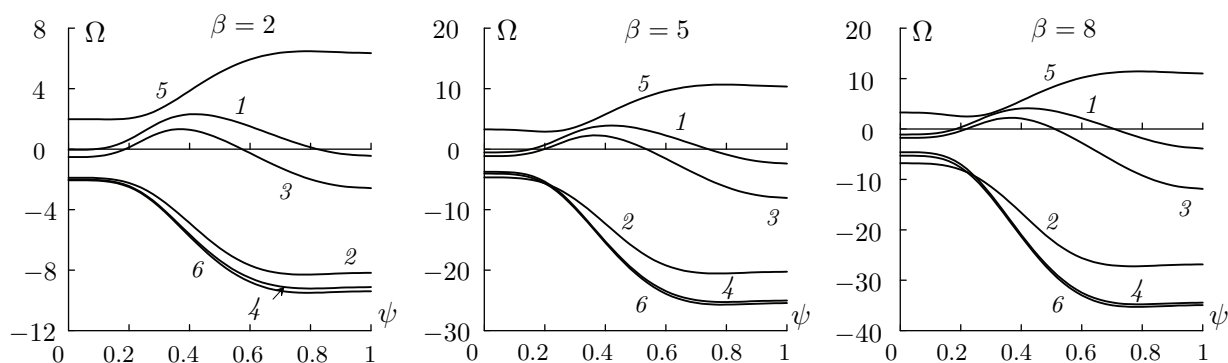


Рис. 4. Зависимости относительного изменения низшей собственной частоты колебаний  $\Omega$  жестко закрепленной оболочки (CF) от безразмерного уровня заполнения жидкостью  $\psi$ , полученные для различных законов изменения толщины и параметра ее переменности  $\beta$ .

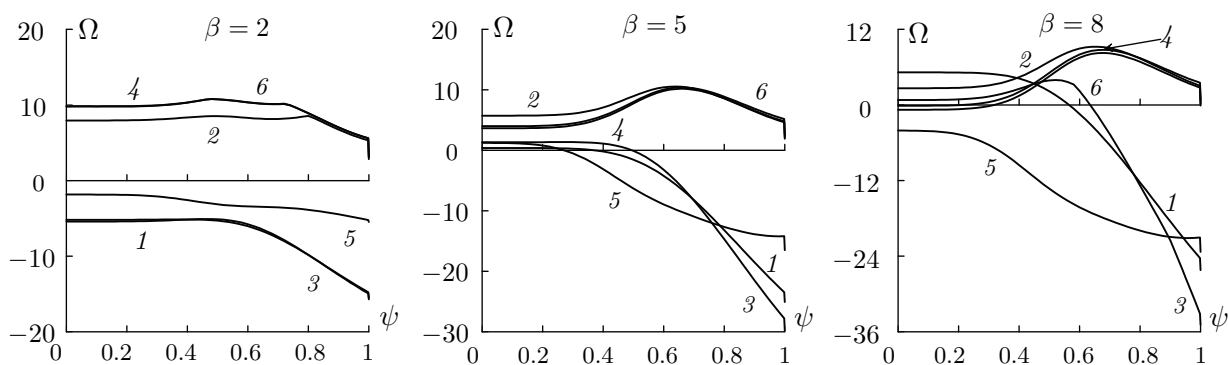


Рис. 5. Зависимости относительного изменения низшей собственной частоты колебаний  $\Omega$  консольно закрепленной оболочки (CF) от безразмерного уровня заполнения жидкостью  $\psi$ , полученные для различных законов изменения толщины и параметра ее переменности  $\beta$ .

на кривых резкое снижение частоты при  $\psi = 1$  связано с изменением граничных условий для жидкости. Такая чувствительность к граничным условиям в большей степени обусловлена линейными размерами конструкции и свойствами материала, а не крайевыми условиями для упругого тела.

## Заклучение

Представлены результаты численных исследований частотного спектра круговых цилиндрических оболочек, полностью или частично заполненных идеальной сжимаемой жидкостью, толщина которых меняется вдоль меридиональной координаты по степенному или гармоническому законам. Проанализировано влияние граничных условий, параметра переменности толщины и уровня заполнения жидкостью на фундаментальные частоты колебаний конструкции. Осуществлено сравнение частот, получаемых для оболочек с постоянной и переменной толщиной, при условии эквивалентности масс. Для оболочек, частично заполненных жидкостью, толщина которых является функцией меридиональной координаты, выявлено существование таких конфигураций, при которых имеет место значительный рост минимальных частот по сравнению с оболочкой постоянной толщины. Продемонстрировано, что для конкретного уровня жидкости и определенных граничных условий подбором ряда параметров можно добиться максимизации минимальной частоты колебаний при сохранении массы оболочки неизменной. Выявлено, что за счет переменного по толщине профиля возможности выбора окружной формы гидроупругих колебаний конструкции, в большей степени удовлетворяющей условиям ее эксплуатации, весьма ограничены.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Zheng D., Du J., Liu Y.** Vibration characteristics analysis of an elastically restrained cylindrical shell with arbitrary thickness variation // *Thin-Walled Struct.* 2021. Vol. 165, article no.107930. doi: 10.1016/j.tws.2021.107930
2. **Kim J., Kim K., Kim K., Hong K., Paek C.** Free vibration analysis of cross-ply laminated conical shell, cylindrical shell, and annular plate with variable thickness using the Haar wavelet discretization method // *Shock Vib.* 2022. Vol. 2022, article no. 6399675. doi: 10.1155/2022/6399675
3. **Han R.P.S., Liu J.D.** Free vibration analysis of a fluid-loaded variable thickness cylindrical tank // *J. Sound Vib.* 1994. Vol. 176. P. 235–253. doi: 10.1006/jsvi.1994.1371
4. **Nurul Izyan M.D., Viswanathan K.K., Nur Hafizah A.K., Sankar D.S.** Free vibration of layered cylindrical shells of variable thickness filled with fluid // *Proceedings of the 28th International Congress on Sound and Vibration (ICSV28)* (Singapore, 24–28 July 2022). ISBN 978-981185070-7.
5. **Xie K., Chen M., Li Z.** An analytic method for free and forced vibration analysis of stepped conical shells with arbitrary boundary conditions // *Thin-Walled Struct.* 2017. Vol. 111. P. 126–137. doi: 10.1016/j.tws.2016.11.017
6. **Baccocchi M., Eisenberger M., Fantuzzi N., Tornabene F., Viola E.** Vibration analysis of variable thickness plates and shells by the generalized differential quadrature method // *Compos. Struct.* 2016. Vol. 156. P. 218–237. doi: 10.1016/j.compstruct.2015.12.004
7. **El-Kaabazi N., Kennedy D.** Calculation of natural frequencies and vibration modes of variable thickness cylindrical shells using the Wittrick–Williams algorithm // *Compos. Struct.* 2012. Vol. 104–105. P. 4–12. doi: 10.1016/j.compstruc.2012.03.011
8. **Троценко Ю.В.** Свободные колебания цилиндрической оболочки переменной толщины // *Сб. тр. Ин-та математики НАН Украины.* 2017. Т. 14, № 2. С. 163–171.
9. **Grigorenko A.Ya., Efimova T.L., Sokolova L.V.** On one approach to studying free vibrations of cylindrical shells of variable thickness in the circumferential direction within a refined statement // *J. Math. Sci.* 2010. Vol. 171, no. 4. P. 548–563.
10. **Годунов С.К.** Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Т. I: Краевые задачи: учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГУ. 1994. 264 с.
11. **Юдин А.С., Сафроненко В.Г.** Виброакустика структурно-неоднородных оболочек. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2013. 424 с.
12. **Юдин А.С., Амбалова Н.М.** Вынужденные колебания коаксиальных подкрепленных цилиндрических оболочек при взаимодействии с жидкостью // *Прикл. механика.* 1989. Т. 25, № 12. С. 63–68.
13. **Bochkarev S.A.** Natural vibrations of a cylindrical shell with fluid partly resting on a two-parameter elastic foundation // *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* 2022. Vol. 22, article no. 2250071. doi: 10.1142/S0219455422500717

14. **Бочкарёв С.А.** Численное моделирование собственных колебаний покоящейся на упругом основании цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью // Вычисл. технологии. 2022. Т. 27, № 4. С. 15–32. doi: 10.25743/ICT.2022.27.4.003
15. **Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В., Матвеев В.П.** Собственные колебания усеченных конических оболочек, содержащих жидкость // Прикл. механика. 2022. Т. 86, № 4. С. 505–526. doi: 10.31857/S0032823522040038
16. **Sivadas K.R., Ganesan N.** Free vibration of circular cylindrical shells with axially varying thickness // J. Sound Vib. 1991. Vol. 147, no. 1. P. 73–85. doi: 10.1016/0022-460X(91)90684-C
17. **Хлопцева Н.С.** Весовая эффективность тонкостенных оболочек постоянной и переменной толщины // Сб. науч. тр. Механика. Математика. № 9. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та., 2007. С. 155–157.
18. **Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н.** Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. Москва: Машиностроение, 1975. 376 с.
19. **Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов В.Г.** Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. Москва: Машиностроение, 1984. 264 с.
20. **Авербух А.З., Вецман Р.И., Генкин М.Д.** Колебания элементов конструкции в жидкости. Москва: Наука, 1987. 158 с.
21. **Amabili M.** Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells // J. Sound Vib. 1996. Vol. 191, no. 5. P. 757–780. doi: 10.1006/jsvi.1996.0154
22. **Shu C.** Differential quadrature and its application in engineering. London: Springer-Verlag, 2000. 340 p.
23. **Бочкарёв С.А.** Собственные колебания усеченных конических оболочек переменной толщины // Вычислительная механика сплошных сред. 2020. Т. 13, № 4. С. 402–413. doi: 10.7242/1999-6691/2020.13.4.31
24. **Ganesan N., Sivadas K.R.** Vibration analysis of orthotropic shells with variable thickness // Computers & Structures. 1990. Vol. 35, no. 3. P. 239–248. doi: 10.1016/0045-7949(90)90343-z
25. **Maхúch T., Horacek J., Trnka J., Vesely J.** Natural modes and frequencies of a thin clamped-free steel cylindrical storage tank partially filled with water: FEM and measurement // J. Sound Vib. 1996. Vol. 193, no. 3. P. 669–690. doi: 10.1006/jsvi.1996.0307
26. **Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В., Матвеев В.П.** Численное моделирование пространственных колебаний цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 2. С. 12–24.
27. **Кашфутдинов Б.Д., Щеглов Г.А.** Валидация свободного программного обеспечения Code\_Aster применительно к задаче модального анализа цилиндрической оболочки с жидкостью // Наука и Образование: науч. издание. 2017. Вып. 6. С. 101–117. doi: 10.7463/0517.0001170
28. **Ergin A., Uğurlu B.** Hydroelastic analysis of fluid storage tanks by using a boundary integral equation method // J. Sound Vib. 2004. Vol. 275. P. 489–513. doi: 10.1016/j.jsv.2003.07.034
29. **Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарёв А.Т., Шклярчук Ф.Н.** Аэрогидроупругость конструкций. Москва: Физматлит, 2000. 592 с.
30. **Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V.** Stability analysis of composite cylindrical shell containing rotating fluid // IOP J. Phys.: Conf. Ser. 2021. Vol. 1945. 012034. doi: 10.1088/1742-6596/1945/1/012034
31. **Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V.** Natural vibrations and hydroelastic stability of laminated composite circular cylindrical shells // Struct. Eng. Mech. 2022. Vol. 81, no. 6. P. 769–780. doi: 10.12989/sem.2022.81.6.769
32. **Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В., Сенин А.Н.** Численное моделирование собственных колебаний частично заполненных жидкостью коаксиальных оболочек с учетом эффектов на свободной поверхности // Вестник ПНИПУ. Механика. 2022. № 1. С. 23–35. doi: 10.15593/perm.mech/2022.1.03

Поступила 1.04.2023

После доработки 12.04.2023

Принята к публикации 17.04.2023

Бочкарёв Сергей Аркадьевич

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт механики сплошных сред УрО РАН

г. Пермь

e-mail: bochkarev@icmm.ru

Матвеев Валерий Павлович  
 академик РАН  
 д-р техн. наук, профессор  
 зав. отделом  
 Институт механики сплошных сред УрО РАН  
 г. Пермь  
 e-mail:.mvp@icmm.ru

## REFERENCES

1. Zheng D., Du J., Liu Y. Vibration characteristics analysis of an elastically restrained cylindrical shell with arbitrary thickness variation. *Thin-Walled Struct.*, 2021, vol. 165, article no. 107930. doi: 10.1016/j.tws.2021.107930
2. Kim J., Kim K., Kim K., Hong K., Paek C. Free vibration analysis of cross-ply laminated conical shell, cylindrical shell, and annular plate with variable thickness using the Haar wavelet discretization method. *Shock Vib.*, 2022, vol. 2022, article no. 6399675. doi: 10.1155/2022/6399675
3. Han R.P.S., Liu J.D. Free vibration analysis of a fluid-loaded variable thickness cylindrical tank. *J. Sound Vib.*, 1994, vol. 176, no. 2, pp. 235–253. doi: 10.1006/jsvi.1994.1371
4. Nurul Izyan M.D., Viswanathan K.K., Nur Hafizah A.K., Sankar D.S. Free vibration of layered cylindrical shells of variable thickness filled with fluid. In: *Proceedings of the 28th International Congress on Sound and Vibration (ICSV28)*. Singapore, Society of Acoustics, 2022. ISBN 978-981-18-5070-7.
5. Xie K., Chen M., Li Z. An analytic method for free and forced vibration analysis of stepped conical shells with arbitrary boundary conditions. *Thin-Walled Struct.*, 2017, vol. 111, pp. 126–137. doi: 10.1016/j.tws.2016.11.017
6. Bacciocchi M., Eisenberger M., Fantuzzi N., Tornabene F., Viola E. Vibration analysis of variable thickness plates and shells by the generalized differential quadrature method. *Compos. Struct.*, 2016, vol. 156, pp. 218–237. doi: 10.1016/j.compstruct.2015.12.004
7. El-Kaabazi N., Kennedy D. Calculation of natural frequencies and vibration modes of variable thickness cylindrical shells using the Wittrick–Williams algorithm. *Comput. Struct.*, 2012, vol. 104–105, pp. 4–12. doi: 10.1016/j.compstruc.2012.03.011
8. Trotsenko Yu. V. Free vibrations of a cylindrical shell of variable thickness. *Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 2017, vol. 14, no. 2, pp. 163–171 (in Russian).
9. Grigorenko A.Ya., Efimova T.L., Sokolova L.V. On one approach to studying free vibrations of cylindrical shells of variable thickness in the circumferential direction within a refined statement. *J. Math. Sci.*, 2010, vol. 171, no. 4, pp. 548–563. doi: 10.1007/s10958-010-0156-y
10. Godunov S.K. *Ordinary differential equations with constant coefficients*, Providence, Amer. Math. Soc., 1997, 282 p. ISBN: 978-0-8218-0656-2. Original Russian text was published in Godunov S.K., *Obyknovennyye differentsial'nye uravneniya s postoyannymi koeffitsientami. T. I: Kraevye zadachi*, Novosibirsk, Novosibirsk State Univ., 1994. ISBN 5-7615-0014-0.
11. Yudin A.S., Safronenko V.G. *Vibroakustika strukturno-neodnorodnykh obolochek* [Vibroacoustics of structurally inhomogeneous shells], Rostov-on-Don, Southern Federal University, 2013, 424 p. (in Russian).
12. Yudin A.S., Ambalova N.M. Forced vibrations of coaxial reinforced cylindrical shells during interaction with a fluid. *Soviet Appl. Mech.*, 1989, vol. 25, no. 12, pp. 1222–1227. doi: 10.1007/BF00887148
13. Bochkarev S.A. Natural vibrations of a cylindrical shell with fluid partly resting on a two-parameter elastic foundation. *Int. J. Struct. Stab. Dyn.*, 2022, vol. 22, no. 6, article no. 2250071. doi: 10.1142/S0219455422500717
14. Bochkarev S.A. Numerical simulation of natural vibrations of a cylindrical shell partially filled with fluid and embedded in an elastic foundation. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2022, vol. 27, no. 4, pp. 15–32 (in Russian). doi: 10.25743/ICT.2022.27.4.003
15. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Natural vibrations of truncated conical shells containing fluid. *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 8, pp. 1971–1986. doi: 10.3103/S0025654422080064
16. Sivadas K.R., Ganesan N. Free vibration of circular cylindrical shells with axially varying thickness. *J. Sound Vib.*, 1991, vol. 147, no. 1, pp. 73–85. doi: 10.1016/0022-460X(91)90684-C

17. Khloptseva N.S. Weight efficiency of thin-walled shells of constant and variable thickness. *Izvestiya of Saratov University. Math. Mech. Inform.*, 2007, vol. 9, pp. 155–157 (in Russian).
18. Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I., Frolov A.N. *Statika i dinamika tonkostennykh obolocheknykh konstruksij* [The statics and dynamics of thin-walled shell structures]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1975, 376 p.
19. Alfutov N.A., Zinov'ev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogosloynnykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov* [Calculation of multilayer plates and shells of composite materials]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1984. 264 p.
20. Averbukh A.Z., Veitsman R.I., Genkin M.D. *Kolebaniya elementov konstrukcii v zhidkosti* [Vibration of structural elements in fluid]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 158 p.
21. Amabili M. Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells. *J. Sound Vib.*, 1996, vol. 191, no. 5, pp. 757–780. doi: 10.1006/jsvi.1996.0154
22. Shu C. *Differential quadrature and its application in engineering*, London, Springer-Verlag, 2000, 340 p. doi: 10.1007/978-1-4471-0407-0
23. Bochkarev S.A. Natural vibrations of truncated conical shells of variable thickness. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2021, vol. 62, no. 7, pp. 1222–1233. doi: 10.1134/S0021894421070038
24. Ganesan N., Sivadas K.R. Vibration analysis of orthotropic shells with variable thickness. *Computers & Structures*, 1990, Vol. 35, no. 3, pp. 239–248. doi: 10.1016/0045-7949(90)90343-z
25. Mazúch T., Horacek J., Trnka J., Veselý J. Natural modes and frequencies of a thin clamped-free steel cylindrical storage tank partially filled with water: FEM and measurement. *J. Sound Vib.*, 1996, vol. 193, no. 3, pp. 669–690. doi: 10.1006/jsvi.1996.0307
26. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Numerical modeling of spatial vibrations of cylindrical shells, partially filled with fluid. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2013, vol. 18, no. 2, pp. 12–24 (in Russian).
27. Kashfutdinov B.D., Shcheglov G.A. Validation of the open source Code\_Aster software used in the modal analysis of the fluid-filled cylindrical shell. *Science and Education of the Bauman Moscow State Tech. Univ.*, 2017, iss. 6, pp. 101–117 (in Russian). doi: 10.7463/0617.0001170
28. Ergin A., Uğurlu B. Hydroelastic analysis of fluid storage tanks by using a boundary integral equation method. *J. Sound Vib.*, 2004, vol. 275, no. 3–5, pp. 489–513. doi: 10.1016/j.jsv.2003.07.034
29. Gorshkov A.G., Morozov V.I., Ponomarev V.I., Shklyarchuk F.N. *Aerogidrouprugost' konstrukcii* [Aerohydroelasticity of structures]. Moscow, Fizmatlit, 2000, 592 p.
30. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. Stability analysis of composite cylindrical shell containing rotating fluid. *IOP J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 1945, article no. 012034. doi: 10.1088/1742-6596/1945/1/012034
31. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. Natural vibrations and hydroelastic stability of laminated composite circular cylindrical shells. *Struct. Eng. Mech.*, 2022, vol. 81, no. 6, pp. 769–780. doi: 10.12989/sem.2022.81.6.769
32. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Senin A.N. Numerical modeling of natural vibrations of coaxial shells partially filled with fluid, taking into account the effects on the free surface. *Mechanics Bulletin of Perm National Research Polytech. Univ.*, 2022, no. 1, pp. 23–35 (in Russian). doi: 10.15593/perm.mech/2022.1.03

Received April 4, 2023

Revised April 12, 2023

Accepted April 17, 2023

**Funding Agency:** The work was supported under state contract no. AAAA-A19-119012290100-8.

*Sergey Arkad'evich Bochkarev*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, 614068 Russia, e-mail: bochkarev@icmm.ru.

*Valerii Pavlovich Matveenko*, RAS Academician, Dr. Tech. Sci., Prof., Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, 614068 Russia, e-mail:.mvp@icmm.ru.

Cite this article as: S. A. Bochkarev, V. P. Matveenko. Free vibration analysis of a cylindrical shell of variable thickness partially filled with a fluid. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 27–40.