ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 1 2023

УДК 517.5

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В СРЕДНЕМ ПРИ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИНТЕРВАЛАХ УСРЕДНЕНИЯ С НАИМЕНЬШИМ ЗНАЧЕНИЕМ НОРМЫ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В. Т. Шевалдин

В статье рассматривается задача Яненко — Стечкина — Субботина экстремальной функциональной интерполяции в среднем на равномерной сетке числовой оси бесконечных в обе стороны последовательностей с наименьшим значением нормы в пространстве $L_p(R)$ $(1 < p < \infty)$ линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_n$ с постоянными коэффициентами. При этом предполагается, что соответствующие оператору $\mathcal{L}_n$ обобщенные конечные разности каждой последовательности ограничены в пространстве l_p, шаг сетки h и шаг усреднения h_1 связаны неравенством $h < h_1 < 2h$, а оператор $\mathcal{L}_n$ является формально самосопряженным. При данных предположениях в случае нечетного n указанная наименьшая норма оператора вычислена точно, и экстремальной функцией является обобщенный $\mathcal{L}$-сплайн, у которого узлы интерполяции и “склейки” совпадают. Работа является продолжением исследований Ю. Н. Субботина и автора в данной задаче, начатых Ю. Н. Субботиным в 1965 г.

Ключевые слова: экстремальная интерполяция, сплайны, равномерная сетка, формально самосопряженный дифференциальный оператор, минимальная норма, сплайны.

V. T. Shevaldin. Extremal interpolation in the mean with overlapping averaging intervals and the smallest norm of a linear differential operator.

The Yanenko–Stechkin–Subbotin problem of extremal functional interpolation in the mean is considered for sequences infinite in both directions on a uniform grid of the numerical axis with the smallest norm in the space $L_p(R)$ $(1 < p < \infty)$ of a linear differential operator $\mathcal{L}_n$ with constant coefficients. It is assumed that the generalized finite differences of each sequence corresponding to the operator $\mathcal{L}_n$ are bounded in the space l_p, the grid step h and the averaging step h_1 are related by the inequality $h < h_1 < 2h$, and the operator $\mathcal{L}_n$ is formally self-adjoint. Under these assumptions, in the case of odd n, the smallest norm of the operator is found exactly, and the extremal function is a generalized $\mathcal{L}$-spline whose knots coincide with the interpolation nodes. This work continues the research of this problem by Yu. N. Subbotin and the author started by Subbotin in 1965.

Keywords: extremal interpolation, splines, uniform grid, formally self-adjoint differential operator, minimum norm, splines.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-219-232

Памяти Анатолия Федоровича Сидорова

Введение

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(D)$ (D — символ дифференцирования) — произвольный линейный дифференциальный оператор с постоянными действительными коэффициентами, у которого коэффициент при старшей степени равен 1. Оператор $\mathcal{L}_n$ запишем в следующем виде:

$$\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(D) = \prod_{s=1}^{k} \left(D^2 - 2\gamma_s D + \gamma_s^2 + \alpha_s^2\right) \prod_{j=1}^{n-2k} (D - \beta_j), \tag{0.1}$$

где α_s, β_j, $\gamma_s \in \mathbb{R}$, причем в случае $k \geq 1$ можно считать, что $\alpha_s > 0$. Линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_n$ поставим в соответствие разностный оператор с шагом $h > 0$:

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_m = \prod_{s=1}^{k} \left(T^2 - 2Te^{\gamma_s h} \cos \alpha_s h + e^{2\gamma_s h} E\right) \prod_{j=1}^{n-2k} \left(T - e^{\beta_j h} E\right) y_m, \tag{0.2}$$

определенный на пространстве последовательностей $y = \{y_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$. Здесь $Ty_m = y_{m+1}$ и E — тождественный оператор. Разность $\Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_m$ выбрана таким образом, что для любого решения f однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_n(D)f = 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_n} f(x + mh) = 0.$$

Через $l_p = l_p(\mathbb{Z})$ $(1 \le p \le \infty)$, как обычно, будем обозначать пространство последовательностей $y = \{y_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ действительных чисел с нормой

$$\|y\|_{l_p} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} |y_m|^p\Big)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_m |y_m|, & p = \infty. \end{cases}$$

Пусть $h_1 \ge 0$ и

$$Y_{h,p} = \big\{y = \{y_m\}_{m=-\infty}^{\infty} \colon \big\|\Delta_h^{\mathcal{L}_n} y\big\|_{l_p} \le 1\big\},$$

$$F_{h,h_1,p}(y) = \left\{f \colon f^{(n-1)} \in AC,\ \mathcal{L}_n(D)f \in L_p(\mathbb{R}),\ \frac{1}{h_1}\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} f(mh + t)\,dt = y_m\ (m \in \mathbb{Z})\right\}$$

(при $h_1 = 0$ полагаем $f(mh) = y_m$). Здесь AC — класс локально абсолютно непрерывных функций, $L_p(\mathbb{R})$ $(1 \le p < \infty)$ — пространство абсолютно интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций g с нормой

$$\|g\|_{L_p(\mathbb{R})} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} |g(t)|^p\,dt\Big)^{1/p},$$

и $L_\infty(\mathbb{R})$ — пространство существенно ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с нормой

$$\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|.$$

Задача экстремальной функциональной интерполяции состоит в следующем: для любой последовательности $y \in Y_{h,p}$ требуется построить функцию $f \in F_{h,h_1,p}(y)$ и вычислить (или эффективно оценить снизу и сверху) следующую величину:

$$A_p = A_p(\mathcal{L}_n, h, h_1) = \sup_{y\in Y_{h,p}} \inf_{f\in F_{h,h_1,p}(y)} \|\mathcal{L}_n(D)f\|_{L_p(\mathbb{R})}. \tag{0.3}$$

Задачу вычисления величины (0.3) принято называть задачей Яненко — Стечкина — Субботина, и ей посвящено значительное число работ (см. первые работы Ю. Н. Субботина [1–3] для оператора $\mathcal{L}_n = D^n$ и большой обзор [4]). Она возникла в начале 60-х годов в беседах Н. Н. Яненко и С. Б. Стечкина. В данной статье отметим только те работы, которые имеют непосредственное отношение к результатам и вспомогательным функциям настоящей работы.

Для оператора $\mathcal{L}_n = D^n$ эту величину при $1 \le p \le \infty$, $0 < h < \infty$, $0 \le h_1 \le 2h$ вычислил Ю. Н. Субботин [1–3; 5–7]. Стоит заметить, что промежуток времени между первой и последней работами Ю. Н. Субботина на эту тему составляет 32 года, причем случай $h < h_1 \le 2h$ (пересекающиеся интервалы усреднения) оказался для исследования самым трудным. А. Шарма и И. Цимбаларио [8], используя его метод, вычислили величину $A_p(\mathcal{L}_n, h, h_1)$ для оператора $\mathcal{L}_n(D) = \prod_{j=1}^n (D - \beta_j)$ $(\beta_j \in \mathbb{R})$ при условии его формальной самосопряженности (т. е. при выполнении равенства $\mathcal{L}_n(-D) = (-1)^n \mathcal{L}_n(D)$), $h_1 = 0$ и $p = \infty$. Автор [9] (см. также [10; 11]) в 1983 г. нашел значение величины $A_p(\mathcal{L}_n, h, h_1)$ для произвольного линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_n$ с постоянными коэффициентами вида (0.1) при $1 \le p \le \infty$, $0 < h < h_0 = \pi/\max\limits_{1\le s\le k} \alpha_s$, $0 \le h_1 \le h$. При этом для некоторых операторов $\mathcal{L}_n$ оказалось, что при любых $1 \le p \le \infty$, $0 \le h_1 \le h$ величина $A_p(\mathcal{L}_n, h_0, h_1) = \infty$.

Как показывают исследования Ю. Н. Субботина [5–7] и автора [12] случай $h < h_1 \le 2h$ перекрывающихся интервалов усреднения в этой задаче является самым сложным. Автору [12] в 1998 г. удалось вычислить величину $A_p(\mathcal{L}_n, h, h_1)$ при $0 < h < h_0,\ h < h_1 \le 2h$ для произвольного линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_n$ вида (0.1) только при $p = \infty$, причем величина $A_\infty(\mathcal{L}_n, h, 2h) = \infty$, и интерес к этой задаче на долгое время практически утих. Следует отметить, что общий метод нахождения величин A_p был разработан в первых работах Ю. Н. Субботина [1; 2], и последующие публикации и работы его учеников Н. Л. Пацко, В. Т. Шевалдина и С. И. Новикова (см. библиографию в [4]) существенно опирались на примененную им схему рассуждений. При получении оценок сверху величины A_p в этой задаче в качестве экстремальных функций естественным образом появлялись полиномиальные и $\mathcal{L}$-сплайны с "правильными" узлами интерполяции и "склейки" (а также их обобщения), которые затем нашли многочисленные применения в задачах вычислительной математики.

В данной работе нам удалось продвинуться в решении задачи Яненко — Стечкина — Субботина в пространстве L_p $(1 < p < \infty)$ для некоторого класса линейных дифференциальных операторов $\mathcal{L}_n$ с постоянными действительными коэффициентами. Мы точно вычисляем величину $A_p(\mathcal{L}_n, h, h_1)$ для линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_n$ вида (0.1) при любых $1 < p < \infty,\ 0 < h < h_0,\ h < h_1 \le 2h$ в случае, если число n — нечетно, и этот оператор является формально самосопряженным (т. е. удовлетворяет равенству $\mathcal{L}_n(-D) = -\mathcal{L}_n(D)$); при этом доказываем равенство $A_p(\mathcal{L}_n, h, 2h) = \infty$. Случаи $p = 1$ и четного n остаются неисследованными и требуют дальнейшего изучения.

Для формулировки основного результата работы введем вспомогательные функции из работы автора [9]. Пусть

$$p_n(\lambda) = \prod_{s=1}^{k}(\lambda^2 - 2\gamma_s\lambda + \gamma_s^2 + \alpha_s^2)\prod_{j=1}^{n-2k}(\lambda - \beta_j)$$

— характеристический многочлен оператора $\mathcal{L}_n$, и функция

$$\begin{gathered} H_n(t) = C(\mathcal{L}_n, h)\sum_{s\in\mathbb{Z}}\frac{e^{i(2s+1)\pi(1-t)}\sin\Big(\dfrac{(2s+1)\pi h_1}{2h}\Big)}{\pi(2s+1)h_1 p_n\Big(\dfrac{(2s+1)\pi i}{h}\Big)}, \\ C(\mathcal{L}_n, h) = 2(-1)^{n+1}h\prod_{s=1}^{k}(1 + 2e^{\gamma_s h}\cos\alpha_s h + e^{2\gamma_s h})\prod_{j=1}^{n-2k}(1 + e^{\beta_j h}), \end{gathered} \tag{0.4}$$

(i – мнимая единица).

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть число n — нечетно, и $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(D)$ — произвольный линейный дифференциальный оператор вида* (0.1), *удовлетворяющий условию*

$$\mathcal{L}_n(-D) = -\mathcal{L}_n(D).$$

Тогда при любых $1 < p < \infty,\ 0 < h < h_0 = \pi/\max\limits_{1\le s\le k}\alpha_s,\ h < h_1 < 2h$ имеет место равенство

$$A_p(\mathcal{L}_n, h, h_1) = \big(\|H_n\|_{L_q[0;1]}\big)^{-1}\ \Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\Big).$$

Отметим, что в [12, теорема 1] автором ранее было доказано, что при любых $0 < h < h_0,\ h < h_1 < 2h$ имеет место равенство

$$A_\infty(\mathcal{L}_n, h, h_1) = \big(\|H_n\|_{L_1[0;1]}\big)^{-1}$$

для произвольного линейного дифференциального оператора вида (0.1) (без требования его формальной самосопряженности).

1. Свойства вспомогательных функций

При исследовании задачи экстремальной интерполяции (0.3) для линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_n$ вида (0.1) в предыдущих работах автора [9–12] возникли некоторые вспомогательные функции, которые нам понадобятся в дальнейшем при доказательстве теоремы 1. В первой части данного раздела мы всюду считаем, что оператор $\mathcal{L}_n$ — произвольный (вида(0.1)) и n — произвольное натуральное число.

Оператору $\mathcal{L}_n$ поставим в соответствие оператор $\mathcal{L}^0_{n+1}(D) = D\mathcal{L}_n(D)$. Пусть $\varphi_n = \varphi_n(t)$ ($\varphi^0_{n+1} = \varphi^0_{n+1}(t)$) — единственное решение уравнения $\mathcal{L}_n(D)f = 0$ ($\mathcal{L}^0_{n+1}(D)f = 0$), удовлетворяющее условию $\varphi^{(j)}_n(0) = \delta_{j,n-1}$ ($(\varphi^0_{n+1})^{(j)}(0) = \delta_{j,n}$). Здесь $\delta_{j,n-1},\ \delta_{j,n}$ — символы Кронекера. Дифференциальному оператору $\mathcal{L}^0_{n+1}$ поставим в соответствие разностный оператор

$$\Delta_h^{\mathcal{L}^0_{n+1}} = (T - E)\Delta_h^{\mathcal{L}_n}$$

(см. (0.2)), определенный на пространстве последовательностей $y = \{y_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$.

Операторы $\Delta_h^{\mathcal{L}_n}$ и $\Delta_h^{\mathcal{L}^0_{n+1}}$ легко привести к виду

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_m = \sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\mu_s y_{m+s}, \quad \Delta_h^{\mathcal{L}^0_{n+1}} y_m = \sum_{s=0}^{n+1}(-1)^{n+1-s}\mu^0_s y_{m+s},$$

где $\mu_s = \mu_s(\mathcal{L}_n, h) > 0,\ \mu^0_s = \mu^0_s(\mathcal{L}^0_{n+1}, h) > 0$ и не зависят от y_m, причем $\mu^0_s = \mu_s + \mu_{s-1}$ ($s = 0, 1, \ldots, n+1$) (числа μ_{-1} и μ_{n+1} полагаем равными нулю).

При $0 \le t \le 1$ определим функции

$$P_n(t) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \sum_{s=j}^{n}(-1)^{n-s}\mu_s\varphi_n((s-j+1-t)h),$$

$$P^0_{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j \sum_{s=j}^{n+1}(-1)^{n+1-s}\mu^0_s\varphi^0_{n+1}((s-j+1-t)h).$$

В силу равенств $P_n(1) = -P_n(0),\ P^0_{n+1}(1) = -P^0_{n+1}(0)$ эти функции можно продолжить на всю числовую ось с помощью формул

$$P_n(t+1) = -P_n(t), \quad P^0_{n+1}(t+1) = -P^0_{n+1}(t).$$

В [9] автором доказано, что при таком продолжении $P_n \in C^{n-2}(\mathbb{R})$, $P^0_{n+1} \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, и имеет место равенство

$$\big(P^0_{n+1}(t)\big)' = 2hP_n(t). \tag{1.1}$$

Лемма 1 (см. [11], лемма 3, док-во леммы 4). *При* $0 < h < h_0$ *каждая из функций* $P_n(t)$ *и* $P^0_{n+1}(t)$ *имеет единственный нуль на полуинтервале* $[0;1)$, *причем эти нули простые и не совпадают.*

При $0 \le t \le 1,\ h > 0,\ h_1 > 0$ определим функции

$$a_{j,n}(t, h, h_1) = \frac{h^2}{h_1}\int_{-h_1/2h}^{h_1/2h}\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}\mu_l\varphi_n((l+x+1-j-t)h_+)\,dx,$$

$$H_n(t) = \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j a_{j,n}(t, h, h_1). \tag{1.2}$$

Здесь, как обычно, u_+ означает $\max\{0,u\}$. В [12] при $0 \le t \le 1$, $h < h_1 \le 2h$ доказана формула

$$\frac{h_1}{h^2}H_n(t) = \frac{1}{2h}\Big(P^0_{n+1}\Big(t+\frac{h_1}{2h}\Big) - P^0_{n+1}\Big(t-\frac{h_1}{2h}\Big)\Big). \tag{1.3}$$

Равенство $H_n(1) = -H_n(0)$ позволяет продолжить функцию H_n на всю числовую ось при помощи формулы

$$H_n(t+1) = -H_n(t)$$

с сохранением гладкости $H_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$. Поскольку построенная функция 2-периодична, то ее можно разложить в ряд Фурье, и при этом справедливо представление (0.4) (см. [9; 12]).

Лемма 2 [12, лемма 5]. *Пусть $0 < h < h_0$, $h < h_1 < 2h$. Функция $H_n(t)$ имеет единственный нуль на полуинтервале $[0;1)$, причем этот нуль простой.*

З а м е ч а н и е 1. Из индуктивного доказательства этой леммы следует, что функция $|H_n(t)|$ имеет единственную точку максимума на полуинтервале $[0;1)$.

З а м е ч а н и е 2. Для формально самосопряженного оператора $\mathcal{L}_n$ (а таковым, в частности, является оператор $\mathcal{L}_n(D) = D^n$ n-кратного дифференцирования) отмеченный нуль функции $H_n(t)$ и точка максимума модуля ее модуля на полуинтервале $[0;1)$ вычисляются явно (см. последующую лемму 5).

Лемма 3 [10, следствие]. *Пусть оператор $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(D)$ формально самосопряжен (т. е. удовлетворяет равенству $\mathcal{L}_n(-D) = (-1)^n\mathcal{L}_n(D)$). При $0 < h < h_0$ имеют место следующие равенства*:

$$P_n(1-x) = (-1)^{n+1}P_n(x), \quad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \quad (0 \le x \le 1),$$
$$\operatorname{sign} P_n(x) = (-1)^{[(n+1)/2]} \quad \Big(\frac{1}{2} < x < 1\Big).$$

З а м е ч а н и е 3. Аналогичными свойствами (с заменой числа n на $n+1$) обладает и функция $P^0_{n+1}(x)$, соответствующая оператору $\mathcal{L}^0_{n+1}(D) = D\mathcal{L}_n(D)$.

При формулировке следующих утверждений данного раздела всюду предполагаем, что оператор $\mathcal{L}_n$ является формально самосопряженным, специально это не оговаривая. В качестве следствия из приведенных утверждений получаем следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть $0 < h < h_0$.*

1. *При любом $r \in \mathbb{N}$ функция $P^0_{2r-1}(x)$ четна относительно точек $x = s + 1/2$ $(s \in \mathbb{Z})$ и нечетна относительно точек $x = s$ $(s \in \mathbb{Z})$. Точки $x = s$ $(s \in \mathbb{Z})$ являются нулями этой функции, а точки $x = s+1/2$ $(s \in \mathbb{Z})$ — точками максимума модуля, причем в этих точках она принимает одно и то же значение.*

2. *При любом $r \in \mathbb{N}$ функция $P^0_{2r}(x)$ четна относительно точек $x = s$ $(s \in \mathbb{Z})$ и нечетна относительно точек $x = s + 1/2$ $(s \in \mathbb{Z})$. Точки $x = s + 1/2$ $(s \in \mathbb{Z})$ являются нулями этой функции, а точки $x = s$ $(s \in \mathbb{Z})$ — точками максимума модуля, причем в этих точках она принимает одно и то же значение.*

Из перечисленных свойств функций P^0_{2r-1}, P^0_{2r} и определения функции H_n выводим следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $0 < h < h_0$ и $h < h_1 < 2h$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *$H_{2r-1}(s) = 0$ $(s \in \mathbb{Z})$. График функции $|H_{2r-1}(x)|$ симметричен относительно прямых $x = s$ и $x = s+1/2$ $(s \in \mathbb{Z})$, причем точки $x = s+1/2$ $(s \in \mathbb{Z})$ являются точками максимума этой функции, и в них она принимает одно и то же значение.*

2. *$H_{2r}(s+1/2) = 0$ $(s \in \mathbb{Z})$. График функции $|H_{2r}(x)|$ симметричен относительно прямых $x = s$ и $x = s+1/2$ $(s \in \mathbb{Z})$, причем точки $x = s$ $(s \in \mathbb{Z})$ являются точками максимума этой функции, и в них она принимает одно и то же значение.*

З а м е ч а н и е 4. В силу (1.1)–(1.3) аналогичными свойствами обладает и функция

$$\widetilde{H}_{n-1}(t) = H_n'(t) = \Big(\frac{h^2}{h_1}\Big)\Big(P_n\Big(t+\frac{h_1}{2h}\Big) - P_n\Big(t-\frac{h_1}{2h}\Big)\Big) \quad (n \in \mathbb{N})$$

с заменой n на $n-1$ (см. также [12, лемма 5]).

При решении задачи экстремальной интерполяции (0.3) в следующих разделах при $n = 2r-1$ и $n = 2r$ возникает функция

$$S_n(t) = \left|\frac{H_n\Big(t-\dfrac{h_1}{2h}\Big)}{H_n\Big(t+\dfrac{h_1}{2h}\Big)}\right|^{q-1} \quad (q>1). \tag{1.4}$$

Лемма 6. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $0 < h < h_0$, $h < h_1 < 2h$. Функция $S_{2r-1}(t)$ на отрезке $[1-h_1/2h; h_1/2h]$ монотонно убывает от $+\infty$ до* 0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 5 и (1.4) следует, что $S_{2r-1}(1-h_1/2h) = +\infty$, $S_{2r-1}(h_1/2h) = 0$. Доказательство леммы 6 проведем по методу Ю. Н. Субботина [7], который доказал эту лемму для оператора $\mathcal{L}_{2r-1}(D) = D^{2r-1}$.

С л у ч а й а). Пусть $1 < h_1/h \le 3/2$. Из леммы 5 следует, что у дроби $S_{2r-1}(t)$ при $1-h_1/2h \le t \le h_1/2h$ числитель монотонно убывает, а знаменатель монотонно возрастает, и, значит, вся дробь $S_{2k-1}(t)$ на указанном отрезке монотонно убывает.

С л у ч а й б). $3/2 < h_1/h < 2$ разобьем на три подслучая. Отдельно исследуем функцию S_{2r-1} на трех отрезках: 1) $[1-h_1/2h; h_1/2h-1/2]$, 2) $[h_1/2h-1/2; 3/2-h_1/2h]$, 3) $[3/2-h_1/2h; h_1/2h]$. Здесь случай 2) самый простой. На указанном отрезке числитель $|H_{2r-1}(t-h_1/2h)|^{q-1}$ монотонно убывает, а знаменатель $|H_{2r-1}(t+h_1/2h)|^{q-1}$ — монотонно возрастает. Значит, на отрезке $[h_1/2h-1/2; 3/2-h_1/2h]$ функция $S_{2r-1}(t)$ монотонно убывает.

В случае 1) и числитель, и знаменатель у дроби $S_{2r-1}(t)$ монотонно возрастают, а в случае 3) — монотонно убывают. Поэтому для исследования функции требуется привлечение производной. Рассмотрим функцию

$$\widetilde{S}_{2r-1}(t) = \left|\frac{H_{2r-1}\Big(t-\dfrac{h_1}{2h}\Big)}{H_{2r-1}\Big(t+\dfrac{h_1}{2h}\Big)}\right| = \left|\frac{H_{2r-1}\Big(t-\dfrac{h_1}{2h}\Big)}{H_{2r-1}\Big(t+\dfrac{h_1}{2h}-2\Big)}\right|.$$

Для доказательства леммы достаточно доказать, что эта функция монотонно убывает на отрезках $[1-h_1/2h; h_1/2h-1/2]$ и $[3/2-h_1/2h; h_1/2h]$. Заметим, что в случае 1)

$$-1 \le t-\frac{h_1}{2h} \le -\frac{1}{2}, \quad -1 \le t+\frac{h_1}{2h}-2 \le -\frac{1}{2},$$

а в случае 3) —

$$-\frac{1}{2} \le t-\frac{h_1}{2h} \le 0, \quad -\frac{1}{2} \le t+\frac{h_1}{2h}-2 \le 0.$$

Значит, в силу леммы 5 модуль в определении функции $\widetilde{S}_{2r-1}(t)$ можно снять, и

$$\widetilde{S}_{2r-1}(t) = \frac{H_{2r-1}\Big(t-\dfrac{h_1}{2h}\Big)}{H_{2r-1}\Big(t+\dfrac{h_1}{2h}-2\Big)}.$$

При этом, не ограничивая общности, можно считать, что числитель и знаменатель являются положительными.

Таким образом, в случаях 1) и 3) получаем

$$\widetilde{S}'_{2r-1}(t)=\frac{H'_{2r-1}\Big(t-\dfrac{h_1}{2h}\Big)H_{2r-1}\Big(t+\dfrac{h_1}{2h}-2\Big)-H_{2r-1}\Big(t-\dfrac{h_1}{2h}\Big)H'_{2r-1}\Big(t+\dfrac{h_1}{2h}-2\Big)}{H^2_{2r-1}\Big(t+\dfrac{h_1}{2h}-2\Big)}. \tag{1.5}$$

В силу леммы 5 и замечания 4 имеем

$$H'_{2r-1}\Big(t-\frac{h_1}{2h}\Big)=\widetilde{H}_{2r-2}\Big(t-\frac{h_1}{2h}\Big),\quad H'_{2r-1}\Big(t+\frac{h_1}{2h}-2\Big)=\widetilde{H}_{2r-2}\Big(t+\frac{h_1}{2h}-2\Big).$$

Эти равенства и свойства функций H_{2r-1} и $\widetilde{H}_{2r-2}$ позволяют доказать, что числитель дроби (1.5) в случаях 1) и 3) является отрицательным. В самом деле, при $t\in[1-h_1/2h;h_1/2h-1/2]$ в силу леммы 5 имеем

$$0<H_{2r-1}\Big(t+\frac{h_1}{2h}-2\Big)<H_{2r-1}\Big(t-\frac{h_1}{2h}\Big),\quad 0<\widetilde{H}_{2r-2}\Big(t-\frac{h_1}{2h}\Big)<\widetilde{H}_{2r-2}\Big(t+\frac{h_1}{2h}-2\Big),$$

и поэтому $\widetilde{S}'_{2r-1}(t)<0$. При $t\in[3/2-h_1/2h;h_1/2h]$ аналогично получаем

$$H_{2r-1}\Big(t+\frac{h_1}{2h}-2\Big)>H_{2r-1}\Big(t-\frac{h_1}{2h}\Big)>0,\quad 0>\widetilde{H}_{2r-2}\Big(t+\frac{h_1}{2h}-2\Big)>\widetilde{H}_{2r-2}\Big(t-\frac{h_1}{2h}\Big),$$

и снова $\widetilde{S}'_{2r-1}(t)<0$. Значит, в случаях 1) и 3) функция $\widetilde{S}_{2r-1}(t)$ на указанных отрезках монотонно убывает.

Лемма 6 полностью доказана.

2. Оценка сверху величины $A_p(\mathcal{L}_{2r-1},h,h_1)$

Пусть $0<h<h_0$, $h<h_1<2h$, $1<p<\infty$, $1/p+1/q=1$ и $\mathcal{L}_n(D)$ — произвольный линейный дифференциальный оператор порядка n вида (0.1). Любое решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_n(D)f=u$, где $u\in L_p(\mathbb{R})$, может быть записано в виде

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}C_jv_j(x)+\int\limits_0^x\varphi_n(x-t)u(t)\,dt. \tag{2.1}$$

Здесь $\{C_j\}_{j=1}^n$ — произвольные константы, функция φ_n определена в разд. 1 и $\{v_j(x)\}_{j=1}^n$ — произвольная линейно независимая система функций из $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_n$ — ядра оператора $\mathcal{L}_n$. Пусть

$$y_m=\frac{1}{h_1}\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}f(mh+t)\,dt\quad(m\in\mathbb{Z}).$$

В [9] для $\Delta_h^{\mathcal{L}_n}y_m$ (см. (0.2)) доказано равенство

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_n}y_m=\frac{h^2}{h_1}\int\limits_0^1\sum_{j=0}^{n+1}u((t+m-1+j)h)\,dt\int\limits_{-h_1/2h}^{h_1/2h}\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}\mu_l\varphi_n((l+x+1-j-t)h_+)\,dx. \tag{2.2}$$

При $0\le t\le 1$ рассмотрим многочлен n-й степени по переменной x:

$$R_n^0(x,t)=\sum_{l=0}^{n}c_lx^l,\quad c_l=\sum_{s=0}^{l}(-1)^{n-s}\mu_s^0\varphi_{n+1}^0((s-l-t)h). \tag{2.3}$$

Лемма 7 [9, леммы 3, 5]. 1. *При* $0<t<1$ *справедливы неравенства* $c_0>0,\ c_n>0$.

2. *Пусть* $0<t<1$ *и* $\eta_j(t)<0$ $(j=1,2,\dots,n)$ *— нули многочлена* $R_n^0(x,t)$, *расположенные в порядке убывания, а* $\eta_1=0,\ \eta_j<0$ $(j=2,3,\dots,n)$ *— нули многочлена* $R_n^0(x,0)$, *расположенные в порядке убывания. Тогда*

1) *при любом* $j=1,2,\dots,n$ *функция* $\eta_j(t)$ *является строго убывающей функцией на интервале* $(0;1)$ *и при* $0<t<1$ *справедливы неравенства*

$$\eta_2<\eta_1(t)<\eta_1=0,\quad \eta_j<\eta_j(t)<\eta_{j-1}\quad (j=3,4,\dots,n),\quad -\infty<\eta_n(t)<\eta_n,$$

2) *имеют место следующие равенства*:

$$\operatorname{sign} R_n^0(\eta_j(t),u)=\begin{cases}(-1)^j, & 0\le u<t,\\ (-1)^{j+1}, & t<u<1,\end{cases}$$

$$\operatorname{sign} R_n^0(\eta_j,t)=(-1)^{j+1},\quad 0<t<1.$$

Лемма 8. *Пусть* $n=2r-1$ $(r\in\mathbb{N})$, $0<h<h_0,\ h<h_1<2h$, *оператор* $\mathcal{L}_n=\mathcal{L}_{2r-1}$ *является формально самосопряженным* (*т. е. имеет место равенство* $\mathcal{L}_{2r-1}(-D)=-\mathcal{L}_{2r-1}(D)$) *и*

$$g_{2r-1}(x,u)=\Big|H_{2r-1}\Big(u-\frac{h_1}{2h}\Big)\Big|^{q-1}-x^2\Big|H_{2r-1}\Big(u+\frac{h_1}{2h}\Big)\Big|^{q-1}\quad (q>1).$$

Нелинейная система уравнений $\begin{cases}R_{2r-1}^0(x,u)=0,\\ g_{2r-1}(x,u)=0\end{cases}$ *в области*: $1-h_1/2h\le u\le h_1/2h$, $-\infty<x<0$ *имеет единственное решение* $(\overline{u},\overline{x})$, *состоящее из* $2r-1$ *точек*: $\overline{u}=\{u_j\}_{j=1}^{2r-1}$, $\overline{x}=\{\eta_j(u_j)\}_{j=1}^{2r-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция

$$x=\psi_{2r-1}(u)=-\sqrt{S_{2r-1}(u)}$$

(см. (1.4) при $n=2r-1$) с ростом аргумента u от $1-h_1/2h$ до $h_1/2h$ в силу леммы 6 монотонно возрастает от $-\infty$ до 0, а функции $x=\eta_j(u)$ $(j=1,2,\dots,2r-1)$ при $0<u<1$ в силу леммы 7 монотонно убывают. Значит, каждая нелинейная система уравнений

$$\begin{cases}R_{2r-1}^0(\eta_j(u),u)=0,\\ x=\psi_{2r-1}(u),\end{cases}\qquad (j=1,2,\dots,2r-1)$$

имеет единственное решение, т. е. существуют пары чисел $(\eta_j(u_j),u_j)$ $(j=1,2,\dots,2r-1)$, причем справедливы неравенства

$$1-\frac{h_1}{2h}<u_{2r-1}<u_{2r-2}<\dots<u_1<\frac{h_1}{2h},$$

$$-\infty<\eta_{2r-1}(u_{2r-1})<\eta_{2r-2}(u_{2r-2})<\dots<\eta_1(u_1)<0.$$

Лемма 8 доказана.

С этого момента всюду в данном разделе считаем, что число $n=2r-1$ — нечетно, и оператор $\mathcal{L}_n=\mathcal{L}_{2r-1}$ является формально самосопряженным. Кроме того, предполагаем, что $0<h<h_0,\ h<h_1<2h,\ 1<p<\infty,\ 1/p+1/q=1$.

Для любой последовательности $y\in Y_{h,p}$ построим обобщенный $\mathcal{L}$-сплайн $f\in F_{h,h_1,p}(y)$ по формуле (2.1), положив

$$u(t)=\mathcal{L}_{2r-1}(D)f(t)=Z_m\Big|H_{2r-1}\Big(\frac{t}{h}\Big)\Big|^{q-1},\quad (m-1)h\le t<mh\quad (m\in\mathbb{Z}),\tag{2.4}$$

где функция H_{2r-1} определена равенством (0.4) (см. также (1.2) и (1.3)) при $n = 2r-1$. Из (2.4) следует, что узлы “склейки” $\mathcal{L}$-сплайна f являются равномерными (причем они являются нулями функции H_{2r-1}) и совпадают с узлами интерполяции. Числа $\{Z_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ подлежат дальнейшему определению. Из (2.1), (2.2) и (2.4) получаем разностное уравнение относительно чисел $\{Z_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$:

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_m = \frac{h^2}{h_1}\sum_{j=0}^{2r+1} Z_{m-1+j}B_j \quad (m\in\mathbb{Z}), \tag{2.5}$$

где

$$B_0 = 0, \quad B_j = \int_0^1 |H_{2r-1}(t)|^{q-1}\,dt \int_{-h_1/2h}^{h_1/2h} \sum_{l=0}^{2r-1}(-1)^{2r-1-l}\mu_l\varphi_{2r-1}((l+z+2-j-t)h_+)\,dz$$

$$(j = 1, 2, \ldots, 2r+1).$$

Характеристический многочлен разностного уравнения (2.5) записывается в виде

$$U_{2k+1}(x) = \sum_{j=0}^{2k+1} B_j x^j. \tag{2.6}$$

Цель дальнейших рассуждений — показать, что многочлен U_{2r+1}/x удовлетворяет всем условиям следующей теоремы.

Теорема А. *Если все нули многочлена $T_n(x) = \sum_{j=0}^n B_j x^j$ ($B_j\in\mathbb{R}$, $B_n\neq 0$) отрицательны и просты, $T_n(-1)\neq 0$, то разностное уравнение $\sum_{j=0}^n B_j Z_{m+j} = K_m$ ($m\in\mathbb{Z}$), где $K = \{K_m\}_{m=-\infty}^{\infty}\in l_p$ ($1\le p\le\infty$), имеет единственное решение $Z^0 = \{Z_m^0\}_{m=-\infty}^{\infty}\in l_p$, выражаемое формулой*

$$Z_m^0 = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{-s-m}K_s,$$

где $\sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s x^s = 1/T_n(x)$, для которого справедлива оценка

$$\|Z^0\|_{l_p} \le \frac{\|K\|_{l_p}}{|T_n(-1)|}.$$

Существование решения разностного уравнения в теореме А доказана М. Г. Крейном [13], а оценка сверху нормы этого решения получена Ю. Н. Субботиным [3].

Лемма 9. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned} U_{2r+1}(x) = \frac{1}{h(1-x)}\Biggl\{ &\int_0^{1-h_1/2h} R_{2r-1}^0(x,t)\Bigl[x\Bigl|H_{2r-1}\Bigl(t-\frac{h_1}{2h}\Bigr)\Bigr|^{q-1} - x^2\Bigl|H_{2r-1}\Bigl(t+\frac{h_1}{2h}\Bigr)\Bigr|^{q-1}\Bigr]\,dt \\ &+ \int_{1-h_1/2h}^{h_1/2h} R_{2r-1}^0(x,t)\Bigl[x\Bigl|H_{2r-1}\Bigl(t-\frac{h_1}{2h}\Bigr)\Bigr|^{q-1} - x^3\Bigl|H_{2r-1}\Bigl(t+\frac{h_1}{2h}\Bigr)\Bigr|^{q-1}\Bigr]\,dt \\ &+ \int_{h_1/2h}^{1} R_{2r-1}^0(x,t)\Bigl[x^2\Bigl|H_{2r-1}\Bigl(t-\frac{h_1}{2h}\Bigr)\Bigr|^{q-1} - x^3\Bigl|H_{2r-1}\Bigl(t+\frac{h_1}{2h}\Bigr)\Bigr|^{q-1}\Bigr]\,dt\Biggr\}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где многочлен $R_{2r-1}^0(x,t)$ по переменной x определен равенством (2.3) при $n = 2r-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$Q_{n+1}(x,z-t)=\begin{cases} x^2R_{n-1}(x,-z+t+1), & 0\le z-t<1,\\ xR_{n-1}(x,-z+t), & -1\le z-t<0,\\ R_{n-1}(x,-z+t-1), & -2\le z-t<-1,\end{cases}$$

где функция $R_{n-1}(x,t)$ аналогична функции $R_n^0(x,t)$ (см. (2.3)) и имеет вид

$$R_{n-1}(x,t)=\sum_{l=0}^{n-1}x^l\sum_{s=0}^{l}(-1)^{n-1-s}\mu_s\varphi_n((s-l-t)h)\quad (0\le t\le 1).$$

Тогда формула (2.6) при $n=2r-1$ переписывается в виде

$$U_{2r+1}(x)=\int\limits_0^1|H_{2r-1}(t)|^{q-1}\,dt\int\limits_{-t-h_1/2h}^{-t+h_1/2h}xQ_{2r}(x,z)\,dz$$

$$=\int\limits_{\vartheta}^{1-h_1/2h}|H_{2r-1}(t)|^{q-1}\Bigg[\int\limits_{-t-h_1/2h}^{0}x^2R_{2r-2}(x,-z)\,dz+\int\limits_0^{-t+h_1/2h}x^3R_{2r-2}(x,-z+1)\,dz\Bigg]\,dt$$

$$+\int\limits_{1-h_1/2h}^{h_1/2h}|H_{2r-1}(t)|^{q-1}\Bigg[\int\limits_{-t-h_1/2h}^{-1}xR_{2r-2}(x,-z-1)\,dz+\int\limits_{-1}^{0}x^2R_{2r-2}(x,-z)\,dz$$

$$+\int\limits_0^{-t+h_1/2h}x^3R_{2r-2}(x,-z+1)\,dz\Bigg]\,dt$$

$$+\int\limits_{h_1/2h}^{1}|H_{2r-1}(t)|^{q-1}\Bigg[\int\limits_{-t-h_1/2h}^{-1}xR_{2r-2}(x,-z-1)\,dz+\int\limits_{-1}^{-t+h_1/2h}x^2R_{2r-2}(x,-z)\,dz\Bigg]\,dt. \tag{2.8}$$

Далее упростим выписанные интегралы с помощью формул, доказанных в [9]:

$$(R_n^0(x,t))'_t=h(1-x)R_{n-1}(x,t)\quad (0\le t\le 1),\quad xR_n^0(x,t+1)=R_n^0(x,t)\quad (t\in\mathbb{R}).$$

После вычисления внутренних интегралов в формуле (2.8) получаем равенство

$$U_{2r+1}(x)=\frac{1}{h(1-x)}\Bigg\{\int\limits_0^{1-h_1/2h}|H_{2r-1}(t)|^{q-1}\Big[x^2R_{2r-1}^0\Big(x,t+\frac{h_1}{2h}\Big)-x^3R_{2r-1}^0\Big(x,1-\frac{h_1}{2h}+t\Big)\Big]\,dt$$

$$+\int\limits_{1-h_1/2h}^{h_1/2h}|H_{2r-1}(t)|^{q-1}\Big[xR_{2r-1}^0\Big(x,t+\frac{h_1}{2h}-1\Big)-x^3R_{2r-1}^0\Big(x,t+1-\frac{h_1}{2h}\Big)\Big]\,dt$$

$$+\int\limits_{h_1/2h}^{1}|H_{2r-1}(t)|^{q-1}\Big[xR_{2r-1}^0\Big(x,t+\frac{h_1}{2h}-1\Big)-x^2R_{2r-1}^0\Big(x,t-\frac{h_1}{2h}\Big)\Big]\,dt\Bigg\}.$$

Поскольку $H_{2r-1}(t+1)=-H_{2r-1}(t)$, то из последнего равенства с помощью замен переменных $1+t-h_1/2h=t'$ и $-1+t+h_1/2h=t''$ выводим равенство (2.7).

Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Многочлен $h(1-x)U_{2r+1}(x)$ степени $2r+2$ имеет нули в точках $x=0$ и $x=1$. Остальные $2r$ нулей этого многочлена отрицательны и попарно различны. Кроме того, имеет место равенство*

$$|U_{2r+1}(-1)| = \frac{h_1}{h^2}\int\limits_0^1 |H_{2r-1}(t)|^q\,dt.$$

Доказательство. Первое утверждение леммы 10 очевидно, поскольку $B_0 = 0$ (см. (2.5) и (2.6)). Вернемся теперь к свойствам нулей многочлена R^0_{2r-1}, доказанных в лемме 8. Из леммы 7 и леммы 8 получаем, что на каждом интервале $(\eta_j(u_j);\eta_{j-1}(u_{j-1}))$ $(j=2,3,\dots,2r-1)$ многочлен $h(1-x)U_{2r+1}(x)$ меняет знак, поскольку из (2.7) следует, что

$$\operatorname{sign} U_{2r+1}(\eta_j(u_j)) = (-1)^{j+1} \quad (j=1,2,\dots,2r-1).$$

Это означает, что на интервале $(\eta_{2r-1}(u_{2r-1});\eta_1(u_1))$ этот многочлен имеет по меньшей мере $2r-2$ отрицательных корней. Покажем, что многочлен

$$h(1-x)U_{2r+1}(x) = \sum_{j=0}^{2r+2} \widetilde{B}_j x^j$$

имеет еще два отрицательных корня, один на полуоси $(-\infty;\eta_{2r-1}(u_{2r-1}))$, а другой — на интервале $(\eta_1(u_1);0)$.

Из леммы 9 следует, что $\widetilde{B}_0 = 0$, а из первого утверждения леммы 7 получаем, что $\widetilde{B}_1 > 0$, $\widetilde{B}_{2r+2} < 0$. С другой стороны, в силу второго утверждения леммы 7 при $t < u_{2r-1}$ имеем $\operatorname{sign} R^0_{2r-1}(\eta_{2r-1}(u_{2r-1}),t) = (-1)^{2r-1}$, и поэтому $\operatorname{sign} U_{2r+1}(\eta_{2r-1}(u_{2r-1})) = (-1)^{2r}$. Кроме того, при $t > u_1$ аналогично получаем, что

$$R^0_{2r-1}(\eta_1(u_1),t) > 0, \quad U_{2r+1}(\eta_1(u_1)) > 0.$$

Отсюда следует наличие по меньшей мере двух отрицательных корней у многочлена $U_{2r+1}(x)$ на промежутках $(-\infty;\eta_{2r-1}(u_{2r-1}))$ и $(\eta_1(u_1);0)$. Итого простых отрицательных корней у многочлена оказалось ровно $2r$, и, кроме того, $U_{2r+1}(0)=0$. Вычислим теперь $|U_{2r+1}(-1)|$, принимая во внимание равенство (2.6) и определение (1.2) функции H_{2r-1}. Имеем

$$|U_{2r+1}(-1)| = \left|\int\limits_0^1 |H_{2r-1}(t)|^{q-1}\,dt \int\limits_{-h_1/2h}^{h_1/2h} \sum_{j=1}^{2r+1}(-1)^j \sum_{l=0}^{2r-1}(-1)^{2r-1-l}\mu_l\varphi_{2r-1}((l+z+2-j-t)h_+)\,dz\right|$$

$$= \frac{h_1}{h^2}\int\limits_0^1 |H_{2r-1}(t)|^q\,dt.$$

Лемма 10 полностью доказана.

В силу леммы 10 многочлен $U_{2r+1}(x)/x$ удовлетворяют всем условиям теоремы А. Поэтому разностное уравнение (2.5) при $n=2r-1$ имеет единственное решение $Z^0 = \{Z_m\}_{m=-\infty}^{\infty} \in l_p$, для которого справедлива оценка

$$\|Z^0\|_{l_p} \le \frac{h_1\|\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r-1}} y\|_{l_p}}{h^2|U_{2r+1}(-1)|}.$$

Данное утверждение с учетом (2.4), в частности, означает, что для любой последовательности $y \in Y_{h,p}$ существует функция $f \in F_{h,h_1,p}$, для которой справедливо неравенство

$$\|\mathcal{L}_n(D)f\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R})} = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}|Z^0_m|^p \int\limits_0^1 |H_{2r-1}(t)|^{(q-1)p}\,dt\right)^{1/p} = \|Z^0\|_{l_p}\left(\int\limits_0^1 |H_{2r-1}(t)|^q\,dt\right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\int\limits_0^1 |H_{2r-1}(t)|^q \, dt \right)^{-1+1/p} = \left(\|H_{2r-1}\|_{L_q[0;1]} \right)^{-1}.$$

Отсюда при $0 < h < h_0, \; h < h_1 < 2h, \; 1 < p < \infty, \; 1/p + 1/q = 1$ для величины $A_p(\mathcal{L}_{2r-1}, h, h_1)$ получаем оценку сверху

$$A_p(\mathcal{L}_{2r-1}, h, h_1) \leq \left(\|H_{2r-1}\|_{L_q[0;1]} \right)^{-1}, \tag{2.9}$$

которая справедлива для любого линейного формально самосопряженного дифференциального оператора вида (0.1) при $n = 2r-1$.

Следует отметить, что функцию $f \in F_{h,h_1,p}(y)$ мы строили, полагая

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_m = \Delta_h^{\mathcal{L}_n} \left(\frac{1}{h_1} \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} f(mh+t) \, dt \right) \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

При этом требуется обосновать, что эта функция удовлетворяет условиям интерполяции в среднем

$$y_m = \frac{1}{h_1} \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} f(mh+t) \, dt \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Этот факт при $p = \infty$ доказан автором в [12] при $0 < h < h_0, \; h < h_1 < 2h$ для любого линейного дифференциального оператора вида (0.1). В случае $1 < p < \infty$ доказательство [12] отмеченного утверждения полностью сохраняется (см. также подобное доказательство при $0 < h_1 \leq h$ в [9]).

3. Оценка снизу величины $A_p(\mathcal{L}_{2r-1}, h, h_1)$

В данном разделе снова будем действовать методом Ю. Н. Субботина [1–3]. Поскольку в предыдущем разделе существование функции $f \in F_{h,h_1,p}(y)$ для любой последовательности $y \in Y_{h,p}$ было доказано при $0 < h < h_0, \; h < h_1 < 2h, \; 1 < p < \infty$ только для формально самосопряженных операторов вида (0.1) и нечетном $n = 2r-1$, то в данном разделе при получении оценки снизу величины $A_p(\mathcal{L}_{2r-1}, h, h_1)$ предполагаем, что эти условия также выполнены.

Пусть N — произвольное натуральное число, $N > 2r$. Рассмотрим любую последовательность $y^* = \{y_m^*\}_{m=-\infty}^{\infty}$, удовлетворяющую условию

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r-1}} y_m^* = \begin{cases} (-1)^m (2N+1)^{-1/p}, & |m| \leq N, \\ 0, & |m| > N. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $y^* \in Y_{h,p}$. Для любой функции $f \in F_{h,h_1,p}(y^*)$ в [9] при $0 < h < h_0$, $h < h_1 \leq h$, в частности, при $n = 2r-1$ доказано неравенство

$$\|\mathcal{L}_{2r-1}(D) f\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R})} \geq \left(\|H_{2r-1}\|_{L_q[0;1]} \right)^{-1}.$$

При $h < h_1 < 2h$ доказательство [9] этого факта полностью сохраняется. Поэтому при $h < h_1 < 2h$ для величины $A_p(\mathcal{L}_{2r-1}, h, h_1)$ имеет место оценка снизу

$$A_p(\mathcal{L}_{2r-1}, h, h_1) \geq \left(\|H_{2r-1}\|_{L_q[0;1]} \right)^{-1},$$

совпадающая с оценкой сверху (2.9).

Теорема 1 полностью доказана.

Следствие. *Пусть* $0 < h < h_0$, $h_1 = 2h$, $1 < p < \infty$ *и* $\mathcal{L}_{2r-1}(D)$ *— линейный дифференциальный формально самосопряженный оператор вида* (0.1) *при* $n = 2r - 1$. *Тогда*

$$A_p(\mathcal{L}_{2r-1}, h, h_1) = \infty.$$

Доказательство этого утверждения следует, из того факта, что при $h_1 = 2h$ функция $H_{2r-1}(t) \equiv 0$ (см. (0.4)) и предельного перехода в теореме 1 при $h_1 \to 2h$.

Заключение

Решить задачу вычисления величины $A_p(\mathcal{L}_n, h, h_1)$ при $0 < h < h_0 = \pi/\max_s \alpha_s$, $h < h_1 < 2h$, $1 < p < \infty$ для произвольного линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_n(D)$ вида (0.1) в данной работе нам до конца не удалось. Свойства функций H_n и S_n и характеристического многочлена разностного уравнения в общем случае требуют более тонких исследований. Случай четного $n = 2r$ при $h < h_1 \leq 2h$ автор предполагает рассмотреть в следующей своей статье. Случай $p = 1$, как показывают предыдущие работы Ю. Н. Субботина и автора, приводит к δ-функциям и также требует отдельного изучения. И, конечно, требует изучения случай $h_1 > 2h$. Для оператора $\mathcal{L}_n(D) = D^n$ Ю. Н. Субботин [5] доказал, что при $1 < p \leq \infty$ и $h_1 = 2hm$ ($m \in \mathbb{N}$) имеет место равенство $A_p(\mathcal{L}_n, h, h_1) = \infty$. При остальных $h_1 > 2h$ в данной задаче неясно даже, является ли величина $A_p(\mathcal{L}_n, h, h_1)$ конечной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
2. **Субботин Ю.Н.** Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-ой производной // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 39–60.
3. **Субботин Ю.Н.** Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173.
4. **Субботин Ю.Н., Новиков С.И., Шевалдин В.Т.** Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 200–225. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225
5. **Субботин Ю.Н.** Экстремальная функциональная интерполяция в среднем с наименьшим значением n-ой производной при больших интервалах усреднения // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 1. С. 114–132. doi: 10.4213/mzm1699
6. **Subbotin Yu.N.** Some extremal problems of interpolation and interpolation in the mean // East J. Approx. 1996. Vol. 2, no. 2. P. 155–167.
7. **Субботин Ю.Н.** Экстремальная в L_p интерполяция в среднем при пересекающихся интервалах усреднения // Изв. РАН. Сер. математическая. 1997. Т. 61, № 1. С. 177–198. doi: 10.4213/im110 .
8. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 2. С. 161–173.
9. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 203–240.
10. **Шевалдин В.Т.** Экстремальная интерполяция с наименьшим значением нормы линейного дифференциального оператора // Мат. заметки. 1980. Т. 27, № 5. С. 721–740.
11. **Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 4. С. 603–622.
12. **Шевалдин В.Т.** Экстремальная интерполяция в среднем при перекрывающихся интервалах усреднения и L-сплайны // Изв. РАН. Сер. математическая. 1998. Т. 62, № 4. С. 201–224. doi: 10.4213/im193
13. **Крейн М.Г.** Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 5(83). С. 3–120.

Поступила 25.01.2023
После доработки 14.02.2023
Принята к публикации 20.02.2023

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Subbotin Yu.N. On the connection between finite differences and the corresponding derivatives. *Tr. MIAN SSSR*, 1965, vol. 78, pp. 24–42 (in Russian).
2. Subbotin Yu.N. Functional interpolation on average with the smallest n-th derivative. *Tr. MIAN SSSR*, 1967, vol. 88, pp. 39–60 (in Russian).
3. Subbotin Yu.N. Extremal problems of functional interpolation and mean interpolating splines. *Tr. MIAN SSSR*, 1975, vol. 138, pp. 118–173 (in Russian).
4. Subbotin Yu.N., Novikov S.I., Shevaldin V.T. Extremal function interpolation and splines. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 200–225 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225
5. Subbotin Yu.N. Extremal functional interpolation in the mean with least value of the n-th derivative for large averaging intervals. *Math. Notes*, 1969, vol. 59, no. 1, pp. 83–96 (in Russian). doi: 10.1007/BF02312469
6. Subbotin Yu.N. Some extremal problems of interpolation and interpolation in the mean. *East J. Approx.*, 1996, vol. 2, no. 2, pp. 155–167.
7. Subbotin Yu.N. Extremal L_p interpolation in the mean with intersecting averaging intervals. *Izvestiya*: *Mathematics. Ser. Mat.*, 1997, vol. 61, no. 1, pp. 183–205 (in Russian). doi: 10.1070/IM1997v061n01ABEH000110 .
8. Sharma A., Cymbalario I. Some linear differential operators and generalized differences. *Mat. Notes*, 1977, vol. 21, no. 2, pp. 91–97. doi: 10.1007/BF02320546 .
9. Shevaldin V.T. Some problems of extremal interpolation in the mean for linear differential operators. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1985, vol. 164, pp. 233–273.
10. Shevaldin V.T. Extremal interpolation with least norm of linear differential operator. *Mat. Notes*, 1980, vol. 27, no. 5, pp. 344–354. doi: 10.1007/BF01139846 .
11. Shevaldin V.T. A problem of extremal interpolation. *Mat. Notes*, 1981, vol. 29, no. 4, pp. 310–320. doi: 10.1007/BF01343541
12. Shevaldin V.T. Extremal interpolation in the mean with overlapping averaging intervals and L-splines. *Izvestiya*: *Mathematics. Ser. Mat.*, 1998, vol. 62, no. 4, pp. 201–224 (in Russian). doi: 10.1070/im1998v062n04ABEH000193
13. Krein M.G. Integral equations on the half-line with kernels depending on the difference of the arguments. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1958, vol. 13, no. 5 (83), pp. 3–120 (in Russian).

Received January 25, 2023
Revised February 14, 2023
Accepted February 20, 2023

Shevaldin Valerii Trifonovich, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. T. Shevaldin. Extremal interpolation in the mean with overlapping averaging intervals and the smallest norm of a linear differential operator, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 219–232 .