ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 1 2023

УДК 517.968.48

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ[1]

Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян, М. О. Аветисян

В работе рассматривается система интегральных уравнений на положительной полуоси с двумя монотонными нелинейностями. При различных частных представлениях матричных ядер и нелинейностей указанная система является предметом анализа во многих разделах математической физики. Доказывается конструктивная теорема существования неотрицательного нетривиального и ограниченного решения. Исследуется также асимптотическое поведение решения на бесконечности. При дополнительных ограничениях на нелинейности и на матричные ядра доказывается теорема единственности решения в определенном классе ограниченных вектор-функций. В конце приводятся конкретные примеры матричных ядер и нелинейностей.

Ключевые слова: матричное ядро, нелинейность, ограниченное решение, монотонность, сходимость, предельное соотношение.

Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan, M. H. Avetisyan. Existence and uniqueness theorems for one system of integral equations with two nonlinearities.

We consider a system of integral equations on the positive semiaxis with two monotone nonlinearities. With various particular representations of matrix kernels and nonlinearities, this system arises in many branches of mathematical physics. A constructive existence theorem for a non-negative, non-trivial and bounded solution is proved. We also study the asymptotic behavior of the solution at infinity. Under additional restrictions on the nonlinearities and matrix kernels, a uniqueness theorem for a solution, in a certain class of bounded vector functions, is proved. At the end, specific examples of matrix kernels and nonlinearities are given.

Keywords: matrix kernel, nonlinearity, bounded solution, monotonicity, convergence, limit relation.

MSC: 45G15, 35B27, 35B40

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-202-218

1. Введение

Рассмотрим следующую систему нелинейных интегральных уравнений на полуоси:

$$Q_i(f_i(x)) = \mu_i(x, f_i(x)) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty K_{ij}(x,t) f_j(t)dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+ := [0, +\infty), \qquad (1.1)$$

относительно искомой измеримой и ограниченной на $\mathbb{R}^+$ вектор-функции

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^T$$

с неотрицательными координатами $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где T — знак транспонирования. Прежде чем накладывать соответствующие условия на Q_i, μ_i и K_{ij}, введем необходимые обозначения.

[1]Исследование первого и второго авторов выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-11-00223). Разделы 1 и 3 написаны Х. А. Хачатряном, результаты разделов 4 и 5 принадлежат А. С. Петросян, а раздел 2 — М. О. Аветисян.

Пусть функции $\{\overset{\circ}{K}_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ определены на множестве $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ и удовлетворяют следующим условиям:

1) $\overset{\circ}{K}_{ij}(-x)=\overset{\circ}{K}_{ij}(x)>0,\ x\in\mathbb{R}^+,\ \overset{\circ}{K}_{ij}(x)\downarrow$ по x на $\mathbb{R}^+$;

2) $\overset{\circ}{K}_{ij}\in L_1(\mathbb{R})\cap M(\mathbb{R}),\ a_{ij}:=\int_{-\infty}^{\infty}\overset{\circ}{K}_{ij}(x)dx,\ A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n\times n},\ r(A)=1$ (где $r(A)$ — спектральный радиус матрицы A), $a_{ij}=a_{ji},\ i,j=1,2,\dots,n$;

3) $m_1(\overset{\circ}{K}_{ij})=\int_{0}^{\infty}x\overset{\circ}{K}_{ij}(x)dx<+\infty,\ i,j=1,2,\dots,n.$

Согласно теореме Перрона (см. [1]) существует вектор $\tilde{\eta}=(\tilde{\eta}_1,\dots,\tilde{\eta}_n)^T$ с положительными координатами $\tilde{\eta}_i$, $i=1,2,\dots,n$, такими что

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\tilde{\eta}_j=\tilde{\eta}_i,\quad i=1,2,\dots,n. \tag{1.2}$$

Обозначим через $\eta_i:=\dfrac{\tilde{\eta}_i}{\min\limits_{1\le i\le n}\tilde{\eta}_i}$ и предположим выполнение следующих условий:

a) $Q_i(0)=0,\ Q_i(\eta_i)=\eta_i,\ y=Q_i(u)\uparrow$ по u на $\mathbb{R}^+,\ i=1,2,\dots,n$;

b) $Q_i\in C(\mathbb{R}^+),\ y=Q_i(u)$ выпуклы вниз на $\mathbb{R}^+,\ i=1,2,\dots,n$;

A) $\mu_i(x,0)\equiv 0,\ x\in\mathbb{R}^+,\ y=\mu_i(x,u)\uparrow$ по u на $\mathbb{R}^+,\ i=1,2,\dots,n$;

B) существуют $\sup\limits_{u\in\mathbb{R}^+}\mu_i(x,u):=\psi_i(x)$, причем $\psi_i\in L_1^0(\mathbb{R}^+)$, $i=1,2,\dots,n$, где $L_1^0(\mathbb{R}^+)$ — пространство суммируемых функций на множестве $\mathbb{R}^+$, имеющих нулевой предел на бесконечности;

C) функции $\{\mu_i(x,u)\}_{i=1}^{n}$ удовлетворяют условию Каратеодори на множестве $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ по аргументу u, т. е. при каждом фиксированном $x\in\mathbb{R}^+$ функции $\mu_i(x,u)$ непрерывны по u на множестве $\mathbb{R}^+$ и почти при всех $u\in\mathbb{R}^+$ эти функции измеримы по x на $\mathbb{R}^+$.

Система нелинейных интегральных уравнений (1.1) возникает в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов при конкретных представлениях нелинейностей Q_i, μ_i и ядерных функций K_{ij} (см. [2–4]). Кроме того, системы указанного характера встречаются также в кинетической теории газов (при изучении нелинейного интегро-дифференциального уравнения Больцмана в рамках обычной и модифицированной модели Бхатнагара—Гросса—Крука) (см. [5–7]). В случае, когда $\mu_i\equiv 0$, $i=1,2,\dots,n$, а $K_{ij}(x,t)=\overset{\circ}{K}_{ij}(x-t)-\overset{\circ}{K}_{ij}(x+t)$, $i,j=1,2,\dots,n$, система (1.1) достаточно подробно исследуется в работах [8–10]. В частности, в статье [8] обсуждаются вопросы существования нетривиальных неотрицательных и ограниченных решений, а также изучено асимптотическое поведение построенных решений на бесконечности. В [9; 10] получены теоремы единственности решения в определенных классах ограниченных функций.

В настоящей работе относительно ядер $\{K_{ij}(x,t)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ предполагается выполнение следующих условий:

I)
$$K_{ij}(x,t)=K_{ji}(x,t)=K_{ij}(t,x),\quad (x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,$$
$$\int\limits_0^\infty K_{ij}(x,t)dt\le a_{ij}\quad\text{и}\quad\sup_{x\in\mathbb{R}^+}\int\limits_0^\infty K_{ij}(x,t)dt=a_{ij},$$
$$\int\limits_0^\infty K_{ij}(x,t)dt-a_{ij}\not\equiv 0,\quad i,j=1,2,\dots,n;$$

II)
$$K_{ij}(x,t)\ge\overset{\circ}{K}_{ij}(x-t)-\overset{\circ}{K}_{ij}(x+t),\quad (x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\quad i,j=1,2,\dots,n\,.$$

При условиях **a), b), A)–C)** и **I), II)** мы займемся вопросами существования единственности и асимптотического поведения построенного решения системы (1.1). Структура работы следующая: разд. 2 посвятим обозначениям, вспомогательным фактам, а также вопросу существования неотрицательного и ограниченного решения, в разд. 3 исследуем асимптотическое поведение решения на бесконечности, в разд. 4 докажем единственность решения в определенном классе неотрицательных и ограниченных вектор-функций, в разд. 5 приведем конкретные прикладные примеры нелинейностей $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$, $\{\mu_i(x,u)\}_{i=1}^n$ и матричных ядер $\{K_{ij}(x,t)\}_{i,j=1}^{n\times n}$, $\{\mathring{K}_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$, удовлетворяющих вышеприведенным ограничениям.

2. Обозначения, вспомогательные факты и существование неотрицательного ограниченного решения

Сперва рассмотрим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$Q_i(x_i) = \gamma_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{2.1}$$

относительно неизвестного вектора $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ с неотрицательными координатами x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, где $\gamma_i > 0$ — заданные числа $i = 1, 2, \dots, n$. Исследуем последовательные приближения для системы (2.1)

$$\begin{gathered} Q_i(x_i^{(m+1)}) = \gamma_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(m)}, \\ x_i^{(0)} := \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad m = 0, 1, 2, \dots . \end{gathered} \tag{2.2}$$

Используя соотношение (1.2), свойства **a), b)** для функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$, а также условие $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, индукцией по m несложно доказать, что

$$x_i^{(m)} \uparrow \text{ по } m, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{2.3}$$

Ниже убедимся, что существует число $c > 1$ такое, что

$$x_i^{(m)} \le c\eta_i, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{2.4}$$

С этой целью рассмотрим следующие функции на множестве $[1, +\infty)$:

$$B_i(u) := \frac{Q_i(\eta_i u)}{\eta_i u} - \frac{\gamma}{\eta_i u} - 1, \quad u \in [1, +\infty), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{2.5}$$

где $\gamma = \max\limits_{1\le i\le n} \gamma_i$.

Из свойств **a), b)** функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ с учетом соотношения (1.2) будем иметь

$$\begin{gathered} B_i(1) = -\frac{\gamma}{\eta_i} < 0, \quad B_i(+\infty) = +\infty, \\ B_i \in C[1, +\infty), \quad B_i \uparrow \text{по } u \text{ на } [1, +\infty), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Из (2.6) сразу следует, что для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ существует единственное число $c_i > 1$ такое, что

$$B_i(c_i) = 0. \tag{2.7}$$

Обозначим через $c := \max\limits_{1\le i\le n} c_i$ и докажем, что данное число обладает свойством (2.4). В случае $m = 0$ неравенство (2.4) сразу выводим из определения нулевого приближения в итерациях (2.2). Пусть оценка (2.4) выполняется при некотором $m \in \mathbb{N}$. Тогда из (2.2) в силу соотношений (2.7) (1.2) находим, что

$$Q_i(x_i^{(m+1)}) \le \gamma + c\sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j = \gamma + c\eta_i \le Q_i(c\eta_i), \tag{2.8}$$

ибо с учетом (2.6)

$$\frac{Q_i(c\eta_i)}{c\eta_i}-\frac{\gamma}{c\eta_i}-1\geq\frac{Q_i(c_i\eta_i)}{c_i\eta_i}-\frac{\gamma}{c_i\eta_i}-1=0.$$

Принимая во внимание монотонность функции $Q_i(u)$, из (2.8) получаем, что

$$x_i^{(m+1)}\leq c\eta_i,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Таким образом, согласно (2.3) и (2.4) заключаем, что последовательность векторов $\mathrm{x}^{(m)}=(x_1^{(m)},\ldots,x_n^{(m)})^T$ имеет предел при $m\to\infty$: $\lim\limits_{m\to\infty}\mathrm{x}^{(m)}=\mathrm{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T$, причем предельный вектор x в силу непрерывности функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ удовлетворяет системе (2.1). Из (2.3) и (2.4) вытекает также, что координаты вектора x удовлетворяют двойному неравенству

$$\eta_i\leq x_i\leq c\eta_i,\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{2.9}$$

Итак, мы доказали следующую вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Пусть* $\gamma_i>0, i=1,2,\ldots,n,$ *и функции* $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ *удовлетворяют условиям* **a), b)**. *Тогда если элементы матрицы* $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}$ *положительны и* $r(A)=1$, *то система нелинейных алгебраических уравнений* (2.1) *имеет положительное решение* $\mathrm{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T$, *причем для всех* x_i, $i=1,2,\ldots,n$, *имеет место двойная оценка* (2.9). □

Перейдем теперь к вопросу единственности решения системы (2.1) в следующем классе векторов:

$$\Omega:=\{\mathrm{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T\colon x_i>0,\ i=1,2,\ldots,n\}. \tag{2.10}$$

Имеет место

Лемма 2. *При условиях леммы* 1 *система* (2.1) *в классе* Ω *не может иметь более одного решения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим обратное: система (2.1) имеет два решения $\mathrm{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T$ и $\tilde{\mathrm{x}}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)^T$ из класса Ω. Тогда из (2.1) получаем

$$|Q_i(x_i)-Q_i(\tilde{x}_i)|\leq\sum_{j=1}^n a_{ij}|x_j-\tilde{x}_j|,\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{2.11}$$

Учитывая симметричность матрицы $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}$, из (2.11) приходим к оценке

$$\sum_{i=1}^n x_i|Q_i(x_i)-Q_i(\tilde{x}_i)|\leq\sum_{i=1}^n x_i\sum_{j=1}^n a_{ij}|x_j-\tilde{x}_j|$$

$$=\sum_{j=1}^n|x_j-\tilde{x}_j|\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i=\sum_{j=1}^n|x_j-\tilde{x}_j|(Q_j(x_j)-\gamma_j)$$

или, что то же самое,

$$\sum_{i=1}^n\bigl(x_i|Q_i(x_i)-Q_i(\tilde{x}_i)|-|x_i-\tilde{x}_i|(Q_i(x_i)-\gamma_i)\bigr)\leq 0. \tag{2.12}$$

Введем множество индексов

$$\Lambda:=\{i\in\{1,2,\ldots,n\}\colon x_i\neq\tilde{x}_i\}. \tag{2.13}$$

Из (2.12) и (2.13) немедленно следует, что неравенство (2.12) можно переписать в виде

$$\sum_{i\in\Lambda}\big(x_i|Q_i(x_i)-Q_i(\tilde{x}_i)|-|x_i-\tilde{x}_i|(Q_i(x_i)-\gamma_i)\big)\le 0.$$

Так как $\mathrm{x}\in\Omega$, то из последнего неравенства получаем, что

$$\sum_{i\in\Lambda}x_i|x_i-\tilde{x}_i|\left(\frac{|Q_i(x_i)-Q_i(\tilde{x}_i)|}{|x_i-\tilde{x}_i|}-\frac{Q_i(x_i)}{x_i}+\frac{\gamma_i}{x_i}\right)\le 0. \tag{2.14}$$

С другой стороны, из свойств **a)** и **b)** для функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ выводим, что при всех $i\in\Lambda$ имеет место оценка

$$\frac{|Q_i(x_i)-Q_i(\tilde{x}_i)|}{|x_i-\tilde{x}_i|}>\frac{Q_i(x_i)}{x_i}. \tag{2.15}$$

Из (2.14) и (2.15) приходим к противоречию. Значит, $\Lambda=\varnothing$. Тем самым $\mathrm{x}=\tilde{\mathrm{x}}$. □

Рассмотрим теперь следующую вспомогательную систему нелинейных интегральных уравнений с суммарно-разностным матричным ядром:

$$Q_i(\varphi_i(x))=\sum_{j=1}^n\int_0^\infty(\mathring{K}_{ij}(x-t)-\mathring{K}_{ij}(x+t))\varphi_j(t)dt,\quad x\in\mathbb{R}^+,\quad i=1,2,\dots,n, \tag{2.16}$$

относительно искомой непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}^+$ вектор-функции $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x))^T$ с неотрицательными координатами $\varphi_i(x)$, $i=1,2,\dots,n$. При условиях 1)–3), **a), b)** в работе [8] доказано, что система (2.16) имеет неотрицательное нетривиальное непрерывное монотонно возрастающее и ограниченное на $\mathbb{R}^+$ решение $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x))^T$, причем

$$\eta_i\ge\varphi_i(x)\ge\min_{1\le j\le n}\left(\frac{\tilde{\xi}_j}{\eta_j}\right)\eta_i(1-e^{-p^*x}),\quad x\in\mathbb{R}^+,\quad i=1,2,\dots,n, \tag{2.17}$$

где $\tilde{\xi}_i$ — единственный корень уравнения $Q_i(u)=\varepsilon_i u$ при некотором $\varepsilon_i\in(0,1)$, $i=1,2,\dots,n$, $p^*=\min\limits_{1\le i\le n}p_i$, а числа $\{p_i\}_{i=1}^n$ единственным образом определяются из характеристических уравнений

$$\sum_{j=1}^n\eta_j\int_0^\infty K_{ij}(t)e^{-pt}dt=\frac{\varepsilon_i\eta_i}{2},\quad i=1,2,\dots,n. \tag{2.18}$$

Более того,

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi_i(x)=\eta_i\quad\text{и}\quad\eta_i-\varphi_i\in L_1(\mathbb{R}^+),\quad i=1,2,\dots,n. \tag{2.19}$$

Зафиксируем это решение и введем следующие последовательные приближения для системы (1.1):

$$\begin{gathered}Q_i(f_i^{(m+1)}(x))=\mu_i(x,f_i^{(m)}(x))+\sum_{j=1}^n\int_0^\infty K_{ij}(x,t)f_j^{(m)}(t)dt,\\ f_i^{(0)}(x)=\varphi_i(x),\quad i=1,2,\dots,n,\quad m=0,1,2,\dots,\quad x\in\mathbb{R}^+.\end{gathered} \tag{2.20}$$

Используя условия **II), a), A), b), C),** индукцией по m можно доказать, что

$$f_i^{(m)}(x)\text{измеримы на }\mathbb{R}^+,\quad f_i^{(m)}(x)\uparrow\text{ по }m,\quad i=1,2,\dots,n. \tag{2.21}$$

Предположим теперь дополнительно, что

$$\psi_i\in M(\mathbb{R}^+),\quad i=1,2,\dots,n. \tag{2.22}$$

Обозначим через $\gamma_i^* := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} \psi_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$, и рассмотрим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$Q_i(\xi_i) = \gamma_i^* + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.23}$$

Из доказанных лемм 1 и 2 вытекает, что в классе Ω система (2.23) имеет единственное решение $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$.

Докажем, что

$$f_i^{(m)}(x) \le \xi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.24}$$

При $m = 0$ оценка (2.24) сразу следует из нижеприведенных неравенств с учетом лемм 1 и 2:

$$f_i^{(0)}(x) = \varphi_i(x) \le \eta_i \le \xi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.25}$$

Предположим, что (2.24) справедливо при некотором $m \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая монотонность функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$, (2.23), условие **I**), а также соотношение (1.2), из (2.20) получим

$$Q_i(f_i^{(m+1)}(x)) \le \gamma_i^* + \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty K_{ij}(x,t) f_j^{(m)}(t)dt \le \gamma_i^* + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \int_0^\infty K_{ij}(x,t)dt \le \gamma_i^* + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = Q_i(\xi_i),$$

$$\Rightarrow f_i^{(m+1)}(x) \le \xi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Из (2.21) и (2.24) следует поточечная сходимость последовательности вектор-функций

$$f^{(m)}(x) = (f_1^{(m)}(x), \ldots, f_n^{(m)}(x))^T, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\lim_{m\to\infty} f_i^{(m)}(x) = f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^T,$$

причем

$$\varphi_i(x) \le f_i(x) \le \xi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.26}$$

Используя условия **C), b),** в силу теоремы Б. Леви (см. [11]) заключаем, что $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^T$ почти всюду на $\mathbb{R}^+$ удовлетворяет системе (1.1).

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть выполняются* **A), B), a), b), I), II)** *и* (2.22). *Тогда система* (1.1) *имеет неотрицательное нетривиальное и ограниченное на* $\mathbb{R}^+$ *решение* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^T$. *Более того, имеют место двусторонние оценки вида* (2.26). $\square$

3. Асимптотическое поведение решения системы нелинейных интегральных уравнений (1.1)

В этом разделе предположим, что матричное ядро $\{K_{ij}(x,t)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ удовлетворяет дополнительному условию

$$K_{ij}(x,t) \le \mathring{K}_{ij}(x-t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.1}$$

в котором ядра $\{\mathring{K}_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ обладают свойствами **1)-3).**

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *При условиях теоремы* (1) *если выполняется неравенство* (3.1), *то любое неотрицательное измеримое и ограниченное на* $\mathbb{R}^+$ *решение* $f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))^T$ *системы* (1.1), *для которого имеет место оценка*

$$f_i(x)\geq\varphi_i(x),\quad i=1,2,\dots,n,\quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{3.2}$$

($\varphi(x)=(\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x))^T$ — *решение системы* (2.16) *со свойствами* (2.17), (2.19)), *обладает следующими свойствами*:

$$f_i(x)\leq\xi_i,\quad x\in\mathbb{R}^+,\quad \lim_{x\to+\infty}f_i(x)=\eta_i,\quad \eta_i-f_i\in L_1(\mathbb{R}^+),\quad i=1,2,\dots,n. \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала с использованием свойств **a)** и **b)** функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ приведем полезные для дальнейших рассуждений неравенства (см. рис. 1, 2):

$$Q_i(u_1)-Q_i(u_2)\geq u_1-u_2,\quad u_1>\eta_i,\quad 0\leq u_2\leq\eta_i,\quad i=1,2,\dots,n, \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered}Q_i(u_1)-Q_i(u_2)\geq\frac{\eta_i-Q_i(l_i)}{\eta_i-l_i}(u_1-u_2),\quad 0<l_i<\eta_i,\\ u_1>\eta_i,\quad u_2\in[l_i,\eta_i],\quad i=1,2,\dots,n.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Докажем теперь, что $f_i(x)\leq\xi_i, i=1,2,\dots,n, x\in\mathbb{R}^+$. Обозначим через $d_i:=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+}f_i(x)$, $i=1,2,\dots,n$. Тогда в силу условия **I)**, формулы (2.23) из (1.1) имеем

$$0\leq Q_i(f_i(x))\leq\gamma_i^*+\sum_{j=1}^n a_{ij}d_j\leq\gamma_i^*+\max_{1\leq j\leq n}\left(\frac{d_j}{\xi_j}\right)\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j$$

$$=\gamma_i^*+\max_{1\leq j\leq n}\left(\frac{d_j}{\xi_j}\right)(Q_i(\xi_i)-\gamma_i^*),\quad i=1,2,\dots,n.$$

Из последней оценки согласно свойствам **a), b)** функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ выводим

$$Q_i(d_i)\leq\gamma_i^*+\max_{1\leq j\leq n}\left(\frac{d_j}{\xi_j}\right)(Q_i(\xi_i)-\gamma_i^*),\quad i=1,2,\dots,n. \tag{3.6}$$

Очевидно существует $j_0\in\{1,2,\dots,n\}$ такое, что

$$T:=\max_{1\leq j\leq n}\left(\frac{d_j}{\xi_j}\right)=\frac{d_{j_0}}{\xi_{j_0}}. \tag{3.7}$$

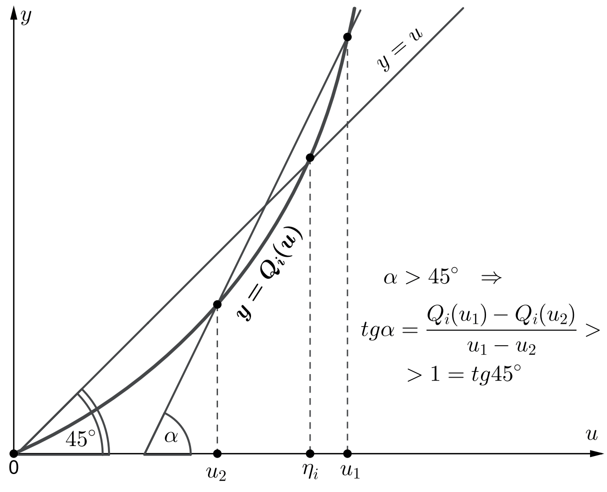

Рис. 1

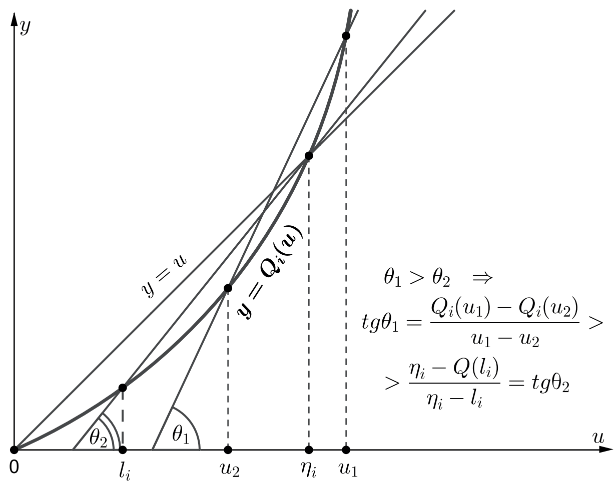

Рис. 2

В неравенстве (3.6) в качестве i взяв $i = j_0$, имеем

$$Q_{j_0}(d_{j_0}) \le \gamma_{j_0}^* + \frac{d_{j_0}}{\xi_{j_0}}(Q_{j_0}(\xi_{j_0}) - \gamma_{j_0}^*). \tag{3.8}$$

Докажем, что $T \le 1$. Предположим обратное; тогда, принимая во внимание монотонность функции $\dfrac{Q_{j_0}(u)}{u}$, получим

$$\frac{Q_{j_0}(d_{j_0}) - \gamma_{j_0}^*}{d_{j_0}} > \frac{Q_{j_0}(\xi_{j_0}) - \gamma_{j_0}^*}{\xi_{j_0}},$$

из чего следует, что

$$Q_{j_0}(d_{j_0}) > \gamma_{j_0}^* + \frac{d_{j_0}}{\xi_{j_0}}(Q_{j_0}(\xi_{j_0}) - \gamma_{j_0}^*). \tag{3.9}$$

Неравенство (3.9) противоречит оценке (3.8). Таким образом, $T \le 1$. Из последнего неравенства выводим

$$f_i(x) \le d_i \le \xi_i \max_{1\le j\le n}\left(\frac{d_j}{\xi_j}\right) = \xi_i \frac{d_{j_0}}{\xi_{j_0}} \le \xi_i, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Теперь займемся доказательством включения

$$f_i - \varphi_i \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{3.10}$$

Сперва убедимся, что $f_i - \varphi_i \in L_1(1,+\infty)$, $i = 1,2,\ldots,n$. Пусть $r > 1$ — произвольное число. Рассмотрим следующие множества:

$$D_i^r := \{x \in [1,r] \colon f_i(x) \le \eta_i\}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{3.11}$$

$$E_i^r := \{x \in [1,r] \colon f_i(x) > \eta_i\}, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{3.12}$$

Поскольку $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$ — измеримые и ограниченные на $\mathbb{R}^+$ функции, а $\varphi_i \in C(\mathbb{R}^+)$, $i = 1,2,\ldots,n$, то из (1.1) с учетом (3.1), **I), II), A),** (2.16), (2.19), (3.2), **a), b)**, (3.1) и (1.2) будем иметь

$$0 \le \sum_{i=1}^n \eta_i \int_1^r (Q_i(f_i(x)) - Q_i(\varphi_i(x)))dx = \sum_{i=1}^n \eta_i \int_1^r \mu_i(x, f_i(x))dx$$

$$+ \sum_{i=1}^n \eta_i \int_1^r \sum_{j=1}^n \int_0^\infty K_{ij}(x,t) f_j(t)dtdx - \sum_{i=1}^n \eta_i \int_1^r \sum_{j=1}^n \int_0^\infty (\mathring{K}_{ij}(x-t) - \mathring{K}_{ij}(x+t))\varphi_j(t)dtdx$$

$$\le \sum_{i=1}^n \eta_i \int_1^\infty \psi_i(x)dx + \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n \int_1^r \int_0^\infty \mathring{K}_{ij}(x-t) f_j(t)dtdx$$

$$- \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n \int_1^r \int_0^\infty \mathring{K}_{ij}(x-t)\varphi_j(t)dtdx + \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n \eta_j \int_1^\infty \int_x^\infty \mathring{K}_{ij}(y)dydx$$

$$\le \sum_{i=1}^n \eta_i \int_1^\infty \psi_i(x)dx + \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n \eta_j \int_0^\infty y\mathring{K}_{ij}(y)dy + \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n \int_1^r \int_0^\infty \mathring{K}_{ij}(x-t)(f_j(t) - \varphi_j(t))dtdx$$

$$\le \sum_{i=1}^n \eta_i \int_1^\infty \psi_i(x)dx + \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n \eta_j \int_0^\infty y\mathring{K}_{ij}(y)dy + \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n \xi_j \int_1^r \int_0^1 \mathring{K}_{ij}(x-t)dtdx$$

$$+ \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n \xi_j \int_1^r \int_r^\infty \mathring{K}_{ij}(x-t)dtdx + \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n \int_1^r \int_1^r \mathring{K}_{ij}(x-t)(f_j(t) - \varphi_j(t))dtdx$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_1^{\infty}\psi_i(x)dx+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}\eta_j\int\limits_0^{\infty}y\mathring{K}_{ij}(y)dy+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}\xi_j\int\limits_1^{\infty}\int\limits_{x-1}^{\infty}\mathring{K}_{ij}(y)dydx$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}\xi_j\int\limits_0^{r}\int\limits_t^{\infty}\mathring{K}_{ij}(y)dydx+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\int\limits_1^{r}(f_j(t)-\varphi_j(t))dt$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_1^{\infty}\psi_i(x)dx+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}\eta_j\int\limits_0^{\infty}y\mathring{K}_{ij}(y)dy$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}\xi_j\int\limits_0^{\infty}y\mathring{K}_{ij}(y)dy+\sum_{j=1}^{n}\eta_j\int\limits_1^{r}(f_j(t)-\varphi_j(t))dt.$$

Итак, мы получим вспомогательную оценку

$$0\leq \sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_1^{r}(Q_i(f_i(x))-Q_i(\varphi_i(x)))dx\leq C+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_1^{r}(f_i(x)-\varphi_i(x))dx,\quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{3.13}$$

где

$$C:=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_1^{\infty}\psi_i(x)dx+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}\eta_j\int\limits_0^{\infty}y\mathring{K}_{ij}(y)dy+2\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}\xi_j\int\limits_0^{\infty}y\mathring{K}_{ij}(y)dy. \tag{3.14}$$

Принимая во внимание (2.17), (2.19), (3.5) и обозначения (3.11), (3.12) из (3.13), приходим к оценкам

$$0\leq \sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_{D_i^r}(Q_i(f_i(x))-Q_i(\varphi_i(x)))dx+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\frac{(\eta_i-Q_i(\tilde{l}_i))}{\eta_i-\tilde{l}_i}\int\limits_{E_i^r}(f_i(x)-\varphi_i(x))dx$$

$$\leq C+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_{D_i^r}(\eta_i-\varphi_i(x))dx+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_{E_i^r}(f_i(x)-\varphi_i(x))dx$$

$$\leq C+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_0^{\infty}(\eta_i-\varphi_i(x))dx+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_{E_i^r}(f_i(x)-\varphi_i(x))dx;$$

здесь

$$\tilde{l}_i:=\eta_i\min_{1\leq j\leq n}\left(\frac{\tilde{\xi}_j}{\eta_j}\right)(1-e^{-p^*}),\quad i=1,2,\dots,n. \tag{3.15}$$

С учетом монотонности функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ и (3.2) из последней оценки, в частности, следует, что

$$0\leq \sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_{D_i^r}(f_i(x)-\varphi_i(x))dx+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\frac{(\eta_i-Q_i(\tilde{l}_i))}{\eta_i-\tilde{l}_i}\int\limits_{E_i^r}(f_i(x)-\varphi_i(x))dx$$

$$\leq C_0+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_{E_i^r}(f_i(x)-\varphi_i(x))dx, \tag{3.16}$$

где

$$C_0:=C+2\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_0^{\infty}(\eta_i-\varphi_i(x))dx<+\infty. \tag{3.17}$$

Так как $\tilde{l}_i \in (0, \eta_i)$, то из условий **a), b)** вытекает, что

$$Q_i(\tilde{l}_i) < \tilde{l}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.18}$$

Таким образом, имея ввиду (3.18), из (3.16) получим

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i b_i \int_1^r (f_i(x) - \varphi_i(x))dx \le C_0; \tag{3.19}$$

здесь

$$b_i := \min\Big\{1, \frac{\tilde{l}_i - Q_i(\tilde{l}_i)}{\eta_i - \tilde{l}_i}\Big\} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.20}$$

Обозначим через

$$\rho := \min_{1 \le i \le n} (\eta_i b_i) > 0. \tag{3.21}$$

Тогда из (3.19) следует, что

$$\int_1^r (f_i(x) - \varphi_i(x))\, dx \le \frac{C_0}{\rho}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.22}$$

Устремляя число $r \to +\infty$ имеем: $f_i - \varphi_i \in L_1(1, +\infty),\ i = 1, 2, \dots, n$ и

$$\int_1^\infty (f_i(x) - \varphi_i(x))dx \le \frac{C_0}{\rho}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.23}$$

Поскольку функции $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$ измеримы на $\mathbb{R}^+,\ \varphi_i \in C(\mathbb{R}^+)$ и $f_i,\ \varphi_i \in M(\mathbb{R}^+),\ i = 1, 2, \dots, n$, то $f_i - \varphi_i \in L_1(0, 1),\ i = 1, 2, \dots, n$. Значит, на основе доказанных выше фактов приходим к (3.10).

Заметим также, что из (3.4) выводим следующую оценка снизу:

$$\int_0^\infty (Q_i(f_i(x)) - Q_i(\varphi_i(x)))dx \ge \int\limits_{\{x \in \mathbb{R}^+ :\ f_i(x) > \eta_i\}} (Q_i(f_i(x)) - Q_i(\varphi_i(x)))dx$$

$$\ge \int\limits_{\{x \in \mathbb{R}^+ :\ f_i(x) > \eta_i\}} (f_i(x) - \varphi_i(x))dx, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Учитывая (2.19), (3.2) и (3.10), получим

$$0 \le |\eta_i - f_i(x)| \le |\eta_i - \varphi_i(x)| + |f_i(x) - \varphi_i(x)| \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.24}$$

Отсюда, $\eta_i - f_i \in L_1(\mathbb{R}^+),\ i = 1, 2, \dots, n$.

Для завершения доказательства остается убедиться, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f_i(x) = \eta_i,\ i = 1, 2, \dots, n$. С этой целью сперва докажем, что

$$\lim_{x \to +\infty} (f_i(x) - \varphi_i(x)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.25}$$

Исходя из (3.1), (3.2), (2.16), (1.1), а также из условий **II)**, 1)–3) и **B)**, имеем

$$0 \le Q_i(f_i(x)) - Q_i(\varphi_i(x)) \le \psi_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty \mathring{K}_{ij}(x - t) f_j(t)dt$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty(\mathring{K}_{ij}(x-t)-\mathring{K}_{ij}(x+t))\varphi_j(t)dt\le\psi_i(x)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty\mathring{K}_{ij}(x-t)(f_j(t)-\varphi_j(t))dt+\sum_{j=1}^{n}\eta_j\int_x^\infty\mathring{K}_{ij}(y)dy,\quad i=1,2,\dots,n,\quad x\in\mathbb{R}^+.\tag{3.26}$$

Как известно (см. [12]), если $F,\ \Phi\in L_1(\mathbb{R})\cap M(\mathbb{R})$, то

$$(F*\Phi)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x-t)\Phi(t)dt\to0,\ \text{когда}\ x\to\pm\infty.$$

Значит, если зафиксировать индексы $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$ и рассматривать следующие функции:

$$F(x-t)=\begin{cases}\mathring{K}_{ij}(x-t), & \text{если}\ (x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\\ 0, & \text{при остальных}\quad (x,t);\end{cases}$$

$$\Phi(t)=\begin{cases}f_j(t)-\varphi_j(t), & \text{если}\ t\in\mathbb{R}^+,\\ 0, & \text{если}\quad t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^+,\end{cases}$$

то в силу **2)**, соотношений (3.10), (3.2) и оценки $f_j(t)\le\xi_j,\ t\in\mathbb{R}^+$, можно утверждать, что для всех фиксированных $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^\infty\mathring{K}_{ij}(x-t)(f_j(t)-\varphi_j(t))dt=0.\tag{3.27}$$

Таким образом, из (3.26), (3.27), в силу того что $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi_i(x)=0,\ i=1,2,\dots,n$ получаем

$$\lim_{x\to+\infty}(Q_i(f_i(x))-Q_i(\varphi_i(x)))=0,\quad i=1,2,\dots,n.\tag{3.28}$$

$Q_i\in C(\mathbb{R}^+)$ и $Q_i(u)\uparrow$ по u на $\mathbb{R}^+$ для всех $i=1,2,\dots,n$, поэтому из (3.28) следует (3.25). Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_i(x)=\eta_i,\ i=1,2,\dots,n$, то, принимая во внимание (3.24) и (3.25), приходим к предельному соотношению: $\lim\limits_{x\to+\infty}f_i(x)=\eta_i,\ i=1,2,\dots,n$.

Теорема 2 доказана.

4. Единственность решения системы (1.1)

В настоящем разделе при определенных дополнительных ограничениях на функции $\{\mu_i(x,u)\}_{i=1}^n$ и $\{K_{ij}(x,t)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ мы докажем единственность решения системы нелинейных интегральных уравнений (1.1) в следующем классе ограниченных на $\mathbb{R}^+$ вектор-функций:

$$\mathcal{P}:=\big\{f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))^T\colon f_i\in M(\mathbb{R}^+),\ f_i(x)\ge\varphi_i(x),\ i=1,2,\dots,n,\ x\in\mathbb{R}^+\big\}.\tag{4.1}$$

Справедлива

Теорема 3. *Пусть $\mu_i\in C(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)$, $K_{ij}\in C(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)$, $i,j=1,2,\dots,n$. Тогда при условиях теоремы* (2) *если функции $\{\mu_i(x,u)\}_{i=1}^n$ при всяком фиксированном $x\in\mathbb{R}^+$ выпуклы вверх по u на $\mathbb{R}^+$, то система нелинейных интегральных уравнений* (1.1) *в классе $\mathcal{P}$ не может иметь более одного решения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим обратное: система (1.1) имеет два различных решения f и $\tilde{f}$ из класса $\mathcal{P}$. Тогда в силу теоремы 2

$$\eta_i - f_i \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \eta_i - \tilde{f}_i \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{4.2}$$

Поэтому

$$f_i - \tilde{f}_i \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{4.3}$$

Так как $\mu_i \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$, $K_{ij} \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$, f_i, $\tilde{f}_i \in \mathcal{P}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, то вследствие условий **a)** и **b)** из (1.1) следует, что

$$f_i, \ \tilde{f}_i \in C(\mathbb{R}^+), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{4.4}$$

Поскольку $f(x) \not\equiv \tilde{f}(x)$ по предположению, то существуют $x_0 \in \mathbb{R}^+$ и $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ такие, что

$$f_{i_0}(x_0) \neq \tilde{f}_{i_0}(x_0).$$

Тогда в силу (4.4) существует число $x_1 > 0$ такое, что $f_{i_0}(x_1) \neq \tilde{f}_{i_0}(x_1)$. Опять учитывая (4.4), можно утверждать, что существует число $\delta \in (0, x_1)$ такое, что

$$f_{i_0}(x) \neq \tilde{f}_{i_0}(x), \quad x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta). \tag{4.5}$$

Поскольку $f_{i_0}(x) \geq \varphi_{i_0}(x)$, $\tilde{f}_{i_0}(x) \geq \varphi_{i_0}(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, то ввиду (2.17)

$$f_{i_0}(x) > 0, \quad \tilde{f}_{i_0}(x) > 0, \quad x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta). \tag{4.6}$$

Рассмотрим множества

$$\Pi_i := \{x \in \mathbb{R}^+ \colon f_i(x) \neq \tilde{f}_i(x), \quad f_i(x) > 0\}, \ i = 1, 2, \dots, n. \tag{4.7}$$

Из (4.5) и (4.6) выводим, что

$$(x_1 - \delta, x_1 + \delta) \subset \Pi_{i_0}. \tag{4.8}$$

Значит, множество Π_{i_0} имеет положительную меру.

Из (1.1) немедленно следует, что

$$|Q_i(f_i(x)) - Q_i(\tilde{f}_i(x))| \leq |\mu_i(x, f_i(x)) - \mu_i(x, \tilde{f}_i(x))|$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty K_{ij}(x, t) |f_j(t) - \tilde{f}_j(t)| dt, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{4.9}$$

Учитывая условия **B)**, **I)**, в силу (4.3) и неравенств $f_j(x) \leq \xi_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, $x \in \mathbb{R}^+$, можно утверждать, что функции

$$f_i(x) \left(|\mu_i(x, f_i(x)) - \mu_i(x, \tilde{f}_i(x))| + \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty K_{ij}(x, t) |f_j(t) - \tilde{f}_j(t)| dt \right) \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{4.10}$$

Умножим обе части (4.9) на функцию $f_i(x)$ и исходя из (4.10) интегрируем обе части полученного неравенства по x в пределах от 0 до $+\infty$. Тогда в силу **I)** и теоремы Фубини (см. [11]) будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty f_i(x) |Q_i(f_i(x)) - Q_i(\tilde{f}_i(x))| dx \leq \sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty f_i(x) |\mu_i(x, f_i(x)) - \mu_i(x, \tilde{f}_i(x))| dx$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{\infty} f_i(x)\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{0}^{\infty} K_{ij}(x,t)|f_j(t)-\tilde f_j(t)|dtdx=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{\infty} f_i(x)|\mu_i(x,f_i(x))-\mu_i(x,\tilde f_i(x))|dx$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{0}^{\infty}|f_j(t)-\tilde f_j(t)|\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{\infty} K_{ji}(t,x)f_i(x)dxdt=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{\infty} f_i(x)|\mu_i(x,f_i(x))-\mu_i(x,\tilde f_i(x))|dx$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{0}^{\infty}\Big(Q_j(f_j(t))-\mu_j(t,f_j(t))\Big)|f_j(t)-\tilde f_j(t)|dt$$

или, что то же самое,

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{\infty}\Big(f_i(x)|Q_i(f_i(x))-Q_i(\tilde f_i(x))|-f_i(x)|\mu_i(x,f_i(x))-\mu_i(x,\tilde f_i(x))|$$

$$-Q_i(f_i(x))|f_i(x)-\tilde f_i(x)|+\mu_i(x,f_i(x))|f_i(x)-\tilde f_i(x)|\Big)dx\le 0. \tag{4.11}$$

Из **a)**, **b)** и выпуклости вверх функций $\{\mu_i(x,u)\}_{i=1}^n$ по u на $\mathbb{R}^+$ следует, что для всех $x\in\Pi_i$ справедливы неравенства

$$\frac{|Q_i(f_i(x))-Q_i(\tilde f_i(x))|}{|f_i(x)-\tilde f_i(x)|}>\frac{Q_i(f_i(x))}{f_i(x)},\quad i=1,2,\dots,n, \tag{4.12}$$

$$\frac{|\mu_i(x,f_i(x))-\mu_i(x,\tilde f_i(x))|}{|f_i(x)-\tilde f_i(x)|}<\frac{\mu_i(x,f_i(x))}{f_i(x)},\quad i=1,2,\dots,n. \tag{4.13}$$

Значит, подынтегральная функция в левой части неравенства (4.11) для всех $x\in\Pi_i$ является положительной функцией. С другой стороны, очевидно, что

$$\int\limits_{\Pi_i}\Big(f_i(x)|Q_i(f_i(x))-Q_i(\tilde f_i(x))|-f_i(x)|\mu_i(x,f_i(x))-\mu_i(x,\tilde f_i(x))|$$

$$-\ Q_i(f_i(x))|f_i(x)-\tilde f_i(x)|+\mu_i(x,f_i(x))|f_i(x)-\tilde f_i(x)|\Big)dx$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}\Big(f_i(x)|Q_i(f_i(x))-Q_i(\tilde f_i(x))|-f_i(x)|\mu_i(x,f_i(x))-\mu_i(x,\tilde f_i(x))|$$

$$-\ Q_i(f_i(x))|f_i(x)-\tilde f_i(x)|+\mu_i(x,f_i(x))|f_i(x)-\tilde f_i(x)|\Big)dx,\quad i=1,2,\dots,n.$$

Отсюда, учитывая (4.11), (4.12) и (4.13), приходим к оценке

$$\int\limits_{\Pi_{i_0}}\Big(f_{i_0}(x)|Q_{i_0}(f_{i_0}(x))-Q_{i_0}(\tilde f_{i_0}(x))|-f_{i_0}(x)|\mu_{i_0}(x,f_{i_0}(x))-\mu_{i_0}(x,\tilde f_{i_0}(x))|$$

$$-\ Q_{i_0}(f_{i_0}(x))|f_{i_0}(x)-\tilde f_{i_0}(x)|+\mu_{i_0}(x,f_{i_0}(x))|f_{i_0}(x)-\tilde f_{i_0}(x)|\Big)dx$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Pi_i}\Big(f_i(x)|Q_i(f_i(x))-Q_i(\tilde f_i(x))|-f_i(x)|\mu_i(x,f_i(x))-\mu_i(x,\tilde f_i(x))|$$

$$-\ Q_i(f_i(x))|f_i(x)-\tilde f_i(x)|+\mu_i(x,f_i(x))|f_i(x)-\tilde f_i(x)|\Big)dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{\infty} \Big(f_i(x)|Q_i(f_i(x)) - Q_i(\tilde{f}_i(x))| - f_i(x)|\mu_i(x, f_i(x)) - \mu_i(x, \tilde{f}_i(x))|$$

$$- Q_i(f_i(x))|f_i(x) - \tilde{f}_i(x)| + \mu_i(x, f_i(x))|f_i(x) - \tilde{f}_i(x)| \Big) dx \leq 0.$$

В соотношениях (4.12) и (4.13), взяв $i = i_0$ из полученной выше оценки, приходим к противоречию. Следовательно, $f(x) \equiv \tilde{f}(x)$.

Тем самым теорема 3 доказана.

5. Примеры

В конце работы приведем некоторые прикладные и чисто теоретические примеры нелинейностей $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$, $\{\mu_i(x,u)\}_{i=1}^n$ и матричных ядер $\{K_{ij}(x,t)\}_{i,j=1}^{n\times n}$, $\{\mathring{K}_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$, удовлетворяющих всем условиям доказанных результатов.

Примеры нелинейностей $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$:

$q_1)$ $Q_i(u) = \dfrac{u^{\theta_i}}{\eta_i^{\theta_i - 1}}$, $\theta_i > 1$ — натуральные числа, $i = 1, 2, \ldots, n$;

$q_2)$ $Q_i(u) = a_i \dfrac{u^{\theta_i}}{\eta_i^{\theta_i - 1}} + (1 - a_i)u$, где $\theta_i > 1$, $a_i \in (0, 1]$ — числовые параметры, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Примеры нелинейностей $\{\mu_i(x,u)\}_{i=1}^n$:

$m_1)$ $\mu_i(x,u) = \psi_i(x)\dfrac{u}{u + \alpha_i}$, где $\psi_i \in L_1^0(\mathbb{R}^+) \cap C_M(\mathbb{R}^+)$ — положительные функции, $\alpha_i > 0$ — произвольные числовые параметры, а $C_M(\mathbb{R}^+)$ — пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^+$ функций, $i = 1, 2, \ldots, n$;

$m_2)$ $\mu_i(x,u) = \psi_i(x)(1 - e^{-\beta_i u})$, где $\beta_i > 0$ — числовые параметры, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Примеры матричных ядер $\{\mathring{K}_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ **и** $\{K_{ij}(x,t)\}_{i,j=1}^{n\times n}$:

$k_1)$ $\mathring{K}_{ij}(x) = \dfrac{a_{ij}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, где $a_{ij} = a_{ji} > 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, причем спектральный радиус матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}$ равен единице;

$k_2)$ $\mathring{K}_{ij}(x) = \displaystyle\int_a^b e^{-|x|s} d\sigma_{ij}(s)$, $x \in \mathbb{R}$, где $\sigma_{ij}(s)$ — монотонно неубывающие непрерывные функции на $[a, b)$, $0 < a < b \leq +\infty$, причем $2\displaystyle\int_a^b \frac{1}{s} d\sigma_{ij}(s) = a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}$, $r(A) = 1$;

$k_3)$ $K_{ij}(x,t) = \mathring{K}_{ij}(x - t) - \mathring{K}_{ij}(x + t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$;

$k_4)$ $K_{ij}(x,t) = \mathring{K}_{ij}(x - t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$;

$k_5)$ $K_{ij}(x,t) = \dfrac{2\mathring{K}_{ij}(x-t)(\mathring{K}_{ij}(x-t) - \mathring{K}_{ij}(x+t))}{2\mathring{K}_{ij}(x-t) - \mathring{K}_{ij}(x+t)}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$;

$k_6)$ $K_{ij}(x,t) = \sqrt{\mathring{K}_{ij}(x-t)(\mathring{K}_{ij}(x-t) - \mathring{K}_{ij}(x+t))}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Следует отметить, что примеры $q_1)$, $q_2)$, $m_2)$, $k_1)$–$k_4)$ встречаются в динамической теории p-адических струн, в математической биологии и в кинетической теории газов (см. [2;3;5;13]), а примеры $m_1)$, $k_5)$ и $k_6)$ имеют чисто теоретический характер.

Подробно остановимся на примере $m_1)$. Проверка выполнения вышеперечисленных условий для остальных примеров осуществляется аналогичным образом.

Во первых, очевидно, что $\mu_i \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Значит, условие **C)** выполняется. С другой стороны,

$$\frac{\partial \mu_i(x,u)}{\partial u} = \psi_i(x) \frac{\alpha_i}{(u+\alpha_i)^2} > 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

откуда следует, что $\mu_i(x,u) \uparrow$ по u на $\mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Из этого факта получаем также, что

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^+} \mu_i(x,u) = \psi_i(x) \lim_{u \to +\infty} \frac{u}{u+\alpha_i} = \psi_i(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Очевидно, что $\mu_i(x,0) \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, условия **A)** и **B)** выполняются. Поскольку

$$\frac{\partial^2 \mu_i(x,u)}{\partial u^2} = -2 \frac{\alpha_i \psi_i(x)}{(u+\alpha_i)^3} < 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

то функции $\{\mu_i(x,u)\}_{i=1}^n$ будут выпуклы вверх по u на множестве $\mathbb{R}^+$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 560 с.
2. **Владимиров В.С., Волович Я.И.** О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны // Теорет. мат. физика. 2004. Т. 138, № 3. С. 355–368.
3. **Владимиров В.С.** Математические вопросы теории нелинейных псевдодифференциальных уравнений p-адических струн // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2011. Т. 22, № 1. С. 34–41.
4. **Хачатрян Х.А.** О разрешимости некоторых нелинейных граничных задач для сингулярных интегральных уравнений типа свертки // Тр. Моск. мат. общества. 2020. Т. 81, № 1. С. 3–40.
5. **Cercignani C.** The Boltzmann equation and its application. NY: Springer, 1988. 455 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1039-9
6. **Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.** О некоторых вопросах разрешимости нелинейного стационарного уравнения Больцмана в рамках БГК-модели // Тр. Моск. мат. общества. 2016. Т. 77, № 1. С. 103–130.
7. **Yengibaryan N.B., Khachatryan A.Kh.** On temperature and density jumps in kinetic theory of gases. NY: Nova Sci. Publisher, 2003. Ser. Horizons in World Phys. Vol. 243. P. 103–117.
8. **Хачатрян Х.А.** О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. математика, механика, информатика. 2019. Т. 19, № 2. С. 164–181. doi: 10.18500/1816-9791-2019-19-2-164-181
9. **Петросян А.С., Терджян Ц.Э., Хачатрян Х.А.** Единственность решения одной системы интегральных уравнений на полуоси с выпуклой нелинейностью // Мат. труды. 2020. Т. 23, № 2. С. 87–203. doi: 10.33048/mattrudy.2020.23.208
10. **Хачатрян Х.А., Петросян А.С.** О разрешимости одной системы сингулярных интегральных уравнений с выпуклой нелинейностью на положительной полупрямой // Изв. вузов. Математика. 2021. № 1. С. 31–51. doi 10.26907/0021-3446-2021-1-31-51
11. **Колмогоров А.Н., Фомин В.С.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1980. 542 с.
12. **Арабаджян Л.Г., Хачатрян А.С.** Об одном классе интегральных уравнений типа свертки // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 7. С. 45–62. doi: 10.4213/sm1483
13. **Diekmann O.** Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // J. Math. Biol. 1978. Vol. 6, no. 2. P. 109–130. doi: 10.1007/BF02450783

Поступила 9.01.2023
После доработки 23.01.2023
Принята к публикации 30.01.2023

Хачатрян Хачатур Агавардович
д-р физ.-мат. наук, профессор

Ереванский государственный университет, г. Ереван;
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва
e-mail: Khach82@rambler.ru, khachatur.khachatryan@ysu.am

Петросян Айкануш Самвеловна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Национальный аграрный университет Армении, г. Ереван;
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва
e-mail: Haykuhi25@mail.ru

Аветисян Метаксия Овнановна
канд. физ.-мат. наук, ассистент,
Национальный аграрный университет Армении г. Ереван
e-mail: Metaksya094@gmail.com

REFERENCES

1. Gantmacher F.R. *The theory of matrices.* NY: AMS Chelsea Publ., 2000, 660 p. ISBN: 0821813765. Original Russian text published in Gantmakher F.R. Teoriya matrits, Moscow: Fizmatlit Publ., 2010, 560 p.
2. Vladimirov V.S., Volovich Ya.I. Nonlinear Dynamics Equation in p-Adic String Theory. *Theoret. Math. Phys.*, 2004, vol. 138, no. 3, pp. 297–309. doi: 10.1023/B:TAMP.0000018447.02723.29
3. Vladimirov V.S. Mathematical questions for theory of nonlinear pseudodifferential equations with p-adic string. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2011, vol. 22, no. 1, pp. 34–41 (in Russian).
4. Khachatryan Kh.A. Solvability of some nonlinear boundary value problems for singular integral equations of convolution type. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2020, vol. 81, no. 1, pp. 1–31. doi 10.1090/mosc/306
5. Cercignani C. *The Boltzmann equation and its application.* NY: Springer, 1988. 455 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1039-9
6. Khachatryan Kh.A. Some problems concerning the solvability of the nonlinear stationary Boltzmann equation in the framework of the BGK model. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2016, vol. 77, pp. 87–106. doi: 10.1090/mosc/255
7. Yengibaryan N.B., Khachatryan A.Kh. On temperature and density jumps in kinetic theory of gases. In: *Horizons in World Phys.*, vol. 243, NY: Nova Sci. Publ., 2003, pp. 103–117.
8. Khachatryan Kh.A. The solvability of a system of nonlinear integral equations of Hammerstein type on the whole line. *Izv. Saratov Univ. (N.S.)*, Ser. Math. Mech. Inform., 2019, vol. 19, no. 2, pp. 164–181 (in Russian). doi: 10.18500/1816-9791-2019-19-2-164-181
9. Petrosyan H.S., Terdzhyan Ts.E., Khachatryan Kh.A. The uniqueness of solution to one system of integral equations with convex nonlinearity on a half-line. *Matem. Tr.*, 2020, vol. 23, no. 2, pp. 187–203 (in Russian).
10. Khachatryan Kh.A., Petrosyan H.S. Solvability of a certain system of singular integral equations with convex nonlinearity on the positive half-line. *Russian Math. Iz. VUZ*, 2021, vol. 65, no. 1, pp. 27–46. doi: 10.3103/S1066369X21010035
11. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis.* Two volumes in one, translated from the first Russian edition 1957–1961. United States: Martino Fine Books, 2012, 280 p. ISBN: 1614273049 . Original Russian text published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza. Moscow: Nauka Publ., 1980. 542 s.
12. Arabadzyan L.G., Khachatryan A.S. A class of integral equations of convolution type. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 7, pp. 949–966. doi: 10.1070/SM2007v198n07ABEH003868
13. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection. *J. Math. Biology.*, 1978, vol. 6, no. 2, pp. 109–130. doi: 10.1007/BF02450783

Received January 9, 2023
Revised January 23, 2023
Accepted January 30, 2023

Funding Agency: The work of the first and second authors was supported by the Russian Science Foundation (19-11-00223).

Information in English

Khachatur Aghavardovich Khachatryan, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Yerevan State University, 0025 Yerevan, Republic of Armenia; Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia, e-mail: Khach82@rambler.ru, khachatur.khachatryan@ysu.am .

Haykanush Samvelovna Petrosyan, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Armenian National Agrarian University, 0009, Yerevan, Republic of Armenia; Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia, e-mail: Haykuhi25@mail.ru .

Metaksya Hovnanovna Avetisyan, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Armenian National Agrarian University, 0009, Yerevan, Republic of Armenia; e-mail: Metaksya094@gmail.com .

Cite this article as: Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan, M. H. Avetisyan. Existence and uniqueness theorems for one system of integral equations with two nonlinearities, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 202–218 .