

УДК 519.62

## НАБЛЮДАТЕЛЬ И ПАРА ОБЪЕКТОВ, ОГИБАЮЩАЯ НАБОР ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ<sup>1</sup>

В. И. Бердышев

В пространстве  $X$  ( $X = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ ) имеются набор попарно не пересекающихся выпуклых замкнутых областей  $G_i$  и кратчайшая траектория  $\mathcal{T}$ , которая соединяет заданные начальную и конечную точки и огибает области  $G_i$ ,  $\mathcal{T} \cap \cup_i \overset{\circ}{G}_i = \emptyset$ . В условиях наблюдения по траектории  $\mathcal{T}$  с постоянной по величине скоростью движется пара объектов:  $t$  и за ним  $T$ , расстояние  $\rho(t, T)$  по кривой  $\mathcal{T}$  между которыми удовлетворяет условию  $0 < \rho(t, T) \leq d$  при заданном  $d > 0$ . В работе строятся траектория  $\mathcal{T}_f$  движения наблюдателя и скоростной режим на ней, при которых в каждый момент времени  $\tau$  для заданного  $\delta > d$  выполняется равенство

$$\min \{ \|f_\tau - t_\tau\|, \|f_\tau - T_\tau\| \} = \delta.$$

Ключевые слова: движущийся объект, наблюдатель, траектория, скоростной режим.

**V. I. Berdyshev. An observer and a pair of objects enveloping a set of convex regions.**

In the space  $X$  ( $X = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ ), there are a family of pairwise disjoint convex closed regions  $G_i$  and a shortest trajectory  $\mathcal{T}$  connecting given initial and finite points and enveloping the regions  $G_i$ ,  $\mathcal{T} \cap \cup_i \overset{\circ}{G}_i = \emptyset$ . Two objects,  $t$  and  $T$ , move under observation along the trajectory  $\mathcal{T}$  with a constant speed, and the distance  $\rho(t, T)$  between the objects along the curve  $\mathcal{T}$  satisfies the condition  $0 < \rho(t, T) \leq d$  for given  $d > 0$ . We construct a trajectory  $\mathcal{T}_f$  of the observer's motion and find the observer's speed mode such that the following inequality holds at any time  $\tau$  for given  $\delta > d$ :

$$\min \{ \|f_\tau - t_\tau\|, \|f_\tau - T_\tau\| \} = \delta.$$

Keywords: moving object, observer, trajectory, speed mode.

MSC: 00A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-64-70

### Введение

Пусть в пространстве  $X$  ( $X = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ ) заданы набор выпуклых замкнутых попарно не пересекающихся областей  $G_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) и кратчайшая траектория  $\mathcal{T}$ , огибающая эти множества  $G_i$ ,  $\mathcal{T} \cap \cup_i \overset{\circ}{G}_i = \emptyset$ ,  $i = 1, \dots, k$ , с начальной  $t_*$  и конечной  $T^*$  точками,  $t_*, T^* \notin \cup G_i$ , где  $\overset{\circ}{G}$  — внутренность области  $G_i$ . По  $\mathcal{T}$  движутся с постоянной по величине скоростью  $V_t$  автономные объекты  $t$  и (за ним)  $T$  так, что расстояние  $\rho_{\mathcal{T}}(t, T)$  между ними по кривой  $\mathcal{T}$  удовлетворяет неравенствам

$$0 < \rho_{\mathcal{T}}(t, T) \leq d$$

при заданном  $d > 0$  (случай одного движущегося объекта рассмотрен в [1], см. также [2]). Наблюдатель  $f$  имеет возможность следить за  $t$  и  $T$  одновременно. Пусть  $\delta \geq d$ . Задача наблюдателя состоит в поиске траектории  $\mathcal{T}_f$  такой, что в каждый момент времени  $\tau$  для наблюдателя  $f_\tau$  и объектов  $t_\tau, T_\tau$  выполняется условие

$$\min \{ \|f_\tau - t_\tau\|, \|f_\tau - T_\tau\| \} = \delta, \quad (1)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2022-874).

однако предпочтительным для наблюдателя является случай, когда удается достичь равенства

$$\|f_\tau - t_\tau\| = \|f_\tau - T_\tau\| = \delta. \quad (2)$$

Важным показателем траектории  $\mathcal{T}_f$  является малость отношения скорости движения наблюдателя, следящего за  $t$ , к скорости  $V_t$  объектов, а также ее длина. В настоящей работе геометрическим способом строится траектория  $\mathcal{T}_f$  наблюдателя, удовлетворяющая перечисленным условиям, и указывается возможный скоростной режим на разных участках его траектории. Траектория  $\mathcal{T}$  состоит из набора дуг  $\Delta_i$  и касательных к ним отрезков  $\Lambda_i$ :

$$\Delta_i = \widehat{t_i, \bar{t}_i} \subset \partial G_i \quad (i = 1, \dots, k), \quad \Lambda_i = [\bar{t}_i, t_{i+1}] \quad (i = 0, \dots, k; \bar{t}_0 = t_*, t_{k+1} = T^*),$$

где  $\partial G$  — граница области  $G$ .

### 1. Случай $X = \mathbb{R}^2$

Прямая, содержащая точки  $\bar{t}_i, t_{i+1}$  и обозначаемая через  $\overline{\bar{t}_i, t_{i+1}}$ , касается множеств  $G_i, G_{i+1}$  и разделяет их. В противном случае, заменив пару  $G_i, G_{i+1}$  выпуклой оболочкой  $\text{conv}(G_i \cup G_{i+1})$ , получим исходную задачу с меньшим числом множеств  $G_i$ .

Построим начальную часть траектории  $\mathcal{T}_f$ , позволяющую наблюдателю следить за объектами  $t, T$ , двигающимися по дуге  $\widehat{t_*, t^0}$ , где  $t^0 \in \Lambda_1, \|\bar{t}_1 - t^0\| = d$  (см. рис. 1). Для любой пары  $k = \{t, T\} \subset \widehat{t_*, t^0}$  объектов наблюдатель  $f = f(k)$  находится в вершине равнобедренного треугольника с основанием  $[t, T]$  и боковыми ребрами  $[f, t], [f, T]$  длины  $\delta$ . При  $k = \{t, T\} \subset [t_*, t_1]$  скорость движения наблюдателя совпадает с  $V_1$ . В случае, когда  $\{t, T\} \subset \widehat{t_*, t^0}$  и  $[t, T] \not\subset \partial G$ , скорость движения наблюдателя  $f(k)$  больше скорости  $V_t$ . В этом легко убедиться, учитывая неравенство  $\delta > d$ , равенство углов, образованных парой близких отрезков с концами  $k = \{t, T\}, k' = \{t', T'\}$  и парой отрезков  $[f(k), c], [f(k'), c']$ , а также близость точек  $c = \frac{t+T}{2}, c' = \frac{t'+T'}{2}$ . Впрочем, скорость движения наблюдателя  $f(k)$  в рассматриваемом случае можно найти, построив пару  $\Delta k = \{t + \Delta \cdot \vec{V}(t), T + \Delta \cdot \vec{V}(T)\}$ , где  $\vec{V}(t)$  — вектор скорости объекта в точке  $t$  и  $\Delta > 0$ , и вычислив величину

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\|f(k) - f(\Delta k)\|}{\Delta}. \quad (3)$$

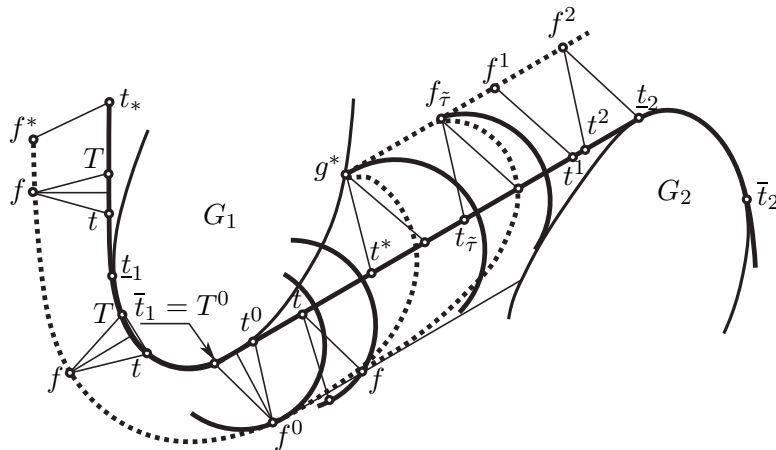


Рис. 1. На рисунке жирной сплошной линией обозначается траектория  $\mathcal{T}$  движения объектов, жирной пунктирной линией — два варианта траектории наблюдателя.

Далее наблюдатель должен следить за объектами, движущимися по  $\Lambda_1$ . Предположим, что при движении объектов по дуге  $\widehat{t_*, \bar{t}_1}$  область  $G_1$  располагается слева от них, а наблюдатель — справа. Тогда при движении объектов по  $\Delta_2 \subset \partial G_2$  множество  $G_2$  должно располагаться справа, и наблюдатель  $f$ , следя за объектами, передвигающимися по отрезку  $\Lambda_1 = [\bar{t}_1, \underline{t}_2]$ , должен перейти на левую относительно прямой сторону, содержащую этот отрезок. Укажем способ такого перехода. Будем предполагать, что выполняется условие

$$\min \{ \|g_1 - g_2\| : g_i \in G_i (i = 1, 2) \} > 2\delta. \quad (4)$$

Для точек  $g_1 \in G_1$ ,  $g_2 \in G_2$ , реализующих нижнюю грань (4), существует пара параллельных прямых  $P_1, P_2$ , опорных к  $G_1$  и  $G_2$  в точках  $g_1, g_2$  соответственно. Пусть  $p$  — точка пересечения прямой  $\overline{\bar{t}_1, \underline{t}_2}$  с прямой  $\frac{P_1 + P_2}{2}$ . Из (4) следует, что существует окрестность точки  $p$ , для любой точки  $q$  которой выполняется условие

$$S_\delta(q) \cap (G_1 \cup G_2) = \emptyset.$$

После преодоления дуги  $\widehat{t_*, \bar{t}_1}$  движущиеся объекты занимают позиции  $T^0 = \bar{t}_1$ ,  $t^0 \in \Lambda_1$ ,  $\|t^0 - T^0\| = d$ , а наблюдатель находится в вершине  $f^0$  равнобедренного треугольника с основанием  $[t^0, T^0]$  и бедрами  $[t^0, f^0]$ ,  $[T^0, f^0]$  (см. рис. 1). Пусть  $f^2 = \underline{t}_2 + (T^0 - f^0)$ , точки  $g^* \in \partial G_1$ ,  $t^* \in \Lambda_1$  таковы, что отрезки  $[g^*, t^*]$ ,  $[t^0, f^0]$  параллельны и имеют длину  $\delta$ . Прямая  $L = \overline{g^*, f^2}$  отстоит от  $\Lambda_1$  на величину  $h = \sqrt{\delta^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$ . Переход наблюдателя из точки  $f^0$  на левую сторону относительно прямой  $L$  осуществляется следующим образом. Центр  $t = t_\tau$  окружности  $S_\delta(t)$  радиуса  $\delta$ , начиная с точки  $t^0$  (с момента  $\tau = 0$ ), движется по отрезку  $\Lambda_1$  в сторону точки  $\underline{t}_2$  с постоянной скоростью  $V_t$ . Одновременно наблюдатель  $f = f_\tau$  движется по этой окружности с точки  $f^0$  против часовой стрелки с постоянной относительно этой окружности скоростью  $v_f$ . При достаточном удалении множеств  $G_1, G_2$  друг от друга (см. (4)) существует скорость  $v_f$ , при которой описанная наблюдателем дуга пересекает отрезок  $[g^*, f^2]$ . Пусть  $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(v_f)$  — первый момент встречи наблюдателя  $f_{\tilde{\tau}} = f_{\tilde{\tau}(v_f)}$  с этим отрезком,  $t_{\tilde{\tau}} = t_{\tilde{\tau}(v_f)}$ , и пусть  $\mathcal{V} = \{v_f : \widehat{f^0, f_{\tilde{\tau}}} \cap (\overset{\circ}{G}_1 \cup \overset{\circ}{G}_2) = \emptyset\}$ . Максимальная из этих скоростей приводит наблюдателя в точку  $g^*$ , а минимальная — в точку  $f_{\tilde{\tau}}$ , близкую к  $f^2$ . Выбор скорости  $v_f \in \mathcal{V}$  зависит от возможностей наблюдателя. По построению  $\|f_{\tilde{\tau}} - t_{\tilde{\tau}}\| = \delta$ , и поскольку  $\rho(f_{\tilde{\tau}}, L) = h$ , то отрезки  $[f_{\tilde{\tau}}, t_{\tilde{\tau}}]$ ,  $[f^0, t^0]$  параллельны и угол между отрезками  $[f_\tau, t_\tau]$ ,  $[f_{\tilde{\tau}}, t_{\tilde{\tau}}]$  стремится к нулю при  $\tau \rightarrow \tilde{\tau}$ . При этом  $T_\tau \in [t^0, t_{\tilde{\tau}}]$ ,  $\|T_\tau - t_\tau\| = d$ , и, значит,  $\|f_\tau - t_\tau\| \leq \|f_\tau - T_\tau\| \leq \delta + d$ . Наблюдатель  $f_\tau$ , имея в поле зрения объекты  $t_\tau$  и  $T_\tau$ , проходит дугу  $\widehat{f^0, f_{\tilde{\tau}}}$ , длина которой  $\|t^0 - t_{\tilde{\tau}}\| + s(\delta, d)$ ; здесь  $s = s(\delta, d)$  — длина дуги окружности, пройденной наблюдателем, которая равна  $\frac{2\pi\delta - s_d}{2}$ , где  $s_d$  — длина малой части окружности  $S_\delta$ , отсеченная хордой длины  $d$ . Дуга  $\widehat{f^0, f_{\tilde{\tau}}}$  пройдена за время, потраченное объектом  $t_\tau$  на переход отрезка  $[t^0, t_{\tilde{\tau}}]$ , поэтому скорость движения наблюдателя по этой дуге равна

$$\frac{\|t^0 - t_{\tilde{\tau}}\| + s(\delta, d)}{\|t^0 - t_{\tilde{\tau}}\|} V_t.$$

Наблюдатель, завершая построения траектории  $\mathcal{T}_f$  на участке  $\widehat{f^*, f^2}$ , для восстановления равенства (2) при слежении за объектом на отрезке  $[t_{\tilde{\tau}}, \underline{t}_2]$ , может использовать следующую дугу. Пусть точки  $t^1 \in [t_{\tilde{\tau}}, \underline{t}_2]$ ,  $f^1 \in [f_{\tilde{\tau}}, f^2]$ ,  $t^2 \in [t^1, \underline{t}_2]$  таковы, что отрезки  $[f^1, t^1]$ ,  $[T^0, f^0]$  параллельны и параллельны отрезки  $[f^2, t^2]$ ,  $[f^0, t^0]$ . Объекты  $t_\lambda = (1-\lambda)t_{\tilde{\tau}} + \lambda t^1$  и  $T \in [t^0, t^1]$ ,  $\|T - t_\lambda\| = d$ , отслеживаются наблюдателем с позиции  $f_\lambda = t_\lambda + \frac{t_\lambda - F_\lambda}{\|t_\lambda - F_\lambda\|} \delta$ , где  $F_\lambda = (1-\lambda)f_{\tilde{\tau}} + \lambda f^1$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Ясно, что скорость движения наблюдателя по дуге  $\{f_\lambda : \lambda \in [0, 1]\}$  меньше скорости  $V_t$ ,

более того, наблюдатель может оставаться в положении  $f_{\bar{\tau}} = f^1$  на время  $V_t \cdot d$ , необходимое объекту для прохождения расстояния  $d$ .

Все предложенные выше варианты траектории  $\mathcal{T}_f$  удовлетворяют условию (1). Для последнего варианта имеет место

**Теорема 1.** *Построенная на участке  $\widehat{f^*, f^2}$  траектория  $\mathcal{T}_f$  обеспечивает наблюдателю  $f_{\bar{\tau}}$  возможность отслеживать движущиеся по дуге  $\widehat{t_*, t_2}$  траектории  $\mathcal{T}$  с постоянной скоростью  $V_t$  объекты  $t, T, \rho(t, T) = d$ , так, что*

$$\|f_{\bar{\tau}} - t_{\bar{\tau}}\| = \delta \quad \forall t_{\bar{\tau}} \in \mathcal{T}, \quad \|f_{\bar{\tau}} - T_{\bar{\tau}}\| = \delta \quad \text{для } T_{\bar{\tau}} \in \widehat{[t_*, t_1]} \cup [t^1, t^2],$$

$$\delta < \|f_{\bar{\tau}} - T_{\bar{\tau}}\| \leq \delta + d \quad \text{для } T_{\bar{\tau}} \in (\bar{t}_1, t^1),$$

при этом скорость движения наблюдателя  $f_{\bar{\tau}}$ , контролирующего объект  $t_{\bar{\tau}}$ :

- на отрезке  $[t_*, \underline{t}_1]$  равна  $V_t$ ;
- на дуге  $\widehat{\underline{t}_1, t^0}$  определяется посредством (3);
- на отрезке  $[t_0, t_{\bar{\tau}}]$  равна  $\frac{\|t^0 - t_{\bar{\tau}}\| + s(\delta, d)}{\|t^0 - t_{\bar{\tau}}\|} V_t$ ;
- на отрезке  $[t_{\bar{\tau}}, t^1]$  равна  $\frac{V_t |f_{\bar{\tau}}, f^1|}{\|t_{\bar{\tau}} - t^1\|} < V_t$ ;
- на отрезке  $[t^1, t_2]$  равна  $V_t$ .

Выбор наблюдателем скорости  $v_f$  и позиций  $T^0, f^1$  не влияет на длину траектории  $\mathcal{T}_f$ , но влияет на время преодоления дуги  $\widehat{f^*, f^2}$ .

Для последующих участков  $\Delta_i \cup \Lambda_i$  ( $i \geq 2$ ) траектория наблюдателя строится аналогично.

## 2. Случай пространства $\mathbb{R}^3$

Построим дугу траектории наблюдателя, позволяющую ему контролировать движение объектов по дуге  $\Delta_i \cup \Lambda_i \subset \mathcal{T}$ . Пусть  $k = \{t, T\} \subset \Delta_i, \rho(t, T) = d, \widehat{t, T} \neq [t, T]$ . Найдем точку  $t_{\bar{\tau}} = t(k)$  пересечения с траекторией  $\mathcal{T}$  ортогонального отрезку  $[t, T]$  плоскости  $Q$ , содержащей точку  $(t + T)/2$ . Определим позицию наблюдателя  $f_{\bar{\tau}} = f(k)$  на луче (см. рис. 2)

$$l = l(k) = \left\{ t_{\bar{\tau}} + \lambda \left( t_{\bar{\tau}} - \frac{t + T}{2} \right) : \lambda > 0 \right\}, \quad \|f_{\bar{\tau}} - t\| = \|f_{\bar{\tau}} - T\| = \delta. \quad (5)$$

В этом случае вопрос дифференцирования отображения  $k \rightarrow f(k)$  решается аналогично двумерному случаю (см. (3)).

Пусть теперь  $\widehat{t, T} = [t, T], [t, T] \subset \mathcal{T}$  и  $[a, A] \subset \mathcal{T}$  – максимальный отрезок, содержащий  $[t, T]$ . Для такого  $k$  позиция  $f_{\bar{\tau}}$  определяется неоднозначно. Для малого  $\varepsilon > 0$  выберем две пары точек из  $\mathcal{T}$

$$k_{\varepsilon}^a = \{t_{\varepsilon}^a, T_{\varepsilon}^a\}, \quad k_{\varepsilon}^A = \{t_{\varepsilon}^A, T_{\varepsilon}^A\}$$

такие, что

$$\rho(t_{\varepsilon}^a, T_{\varepsilon}^a) = d, \quad \rho(t_{\varepsilon}^A, T_{\varepsilon}^A) = d, \quad t_{\varepsilon}^a \in \widehat{\bar{t}_i, a}, \quad T_{\varepsilon}^A \in \widehat{A, \bar{t}_i}.$$

$T_{\varepsilon}^a$  и  $t_{\varepsilon}^A$  принадлежат  $[a, A]$ , и величины  $\rho(t_{\varepsilon}^a, a), \rho(T_{\varepsilon}^A, A)$  меньше  $\varepsilon$ . Для  $k_{\varepsilon}^a, k_{\varepsilon}^A$  построим лучи  $l(k_{\varepsilon}^a), l(k_{\varepsilon}^A)$  с вершинами  $\frac{t_{\varepsilon}^a + T_{\varepsilon}^a}{2}, \frac{t_{\varepsilon}^A + T_{\varepsilon}^A}{2}$  по аналогии с (5) и точки  $f_{\bar{\tau}}^a = f(k_{\varepsilon}^a), f_{\bar{\tau}}^A = f(k_{\varepsilon}^A)$  соответственно. Найдем (см. рис. 3)

$$C(\lambda) = \lambda C^a + (1 - \lambda) C^A, \quad F(\lambda) = \lambda f_{\bar{\tau}}^a + (1 - \lambda) f_{\bar{\tau}}^A, \quad h = \sqrt{\delta^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad (0 \leq \lambda \leq 1),$$

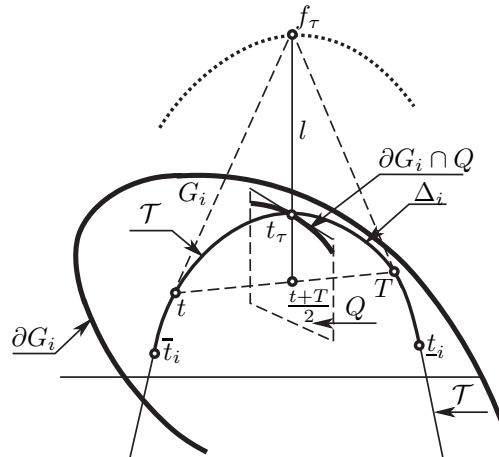


Рис. 2. На рисунке жирной сплошной линией обозначены траектория  $\mathcal{T}$  объектов и граница множества  $G_i$ , пунктирной — траектория наблюдателя, штриховой — плоскость  $Q$  и отрезки, соединяющие наблюдателя с объектами.

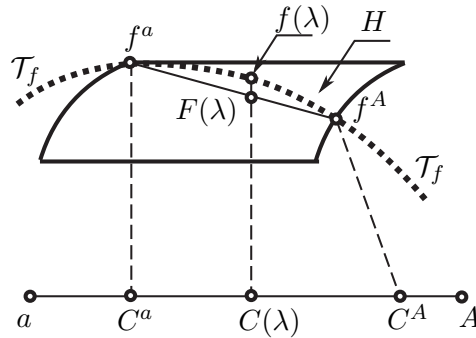


Рис. 3. На рисунке пунктирной линией изображена траектория наблюдателя, тонкой непрерывной — цилиндрическая поверхность.

$$f(\lambda) = C(\lambda) + \frac{F(\lambda) - C(\lambda)}{\|F(\lambda) - C(\lambda)\|} \cdot h,$$

где

$$C^a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{t_\varepsilon^a + T_\varepsilon^a}{2}, \quad C^A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{t_\varepsilon^A + T_\varepsilon^A}{2}, \quad f^a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(k_\varepsilon^a), \quad f^A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(k_\varepsilon^A).$$

Отрезки  $[C^a, f^a]$ ,  $[C^A, f^A]$  перпендикулярны отрезку  $[a, A]$ , но не являются параллельными. Поэтому дуга  $\widehat{f^a, f^A}$  — кратчайшая линия на поверхности цилиндра  $H$  с осью  $[a, A]$  и основанием радиуса  $h$ , соединяющая точки  $f^a, f^A$ . Скорость движения наблюдателя  $f_\tau$  на этой дуге равна

$$\left( \frac{|\widehat{f^a, f^A}|}{\|C^a - C^A\|} \right) \cdot V_t.$$

Нетрудно видеть, что для любого  $f(\lambda)$  выполняется равенство (2). На этом завершается построение дуги траектории  $\mathcal{T}_f$ , предназначенной для наблюдения за движением объектов по дуге  $\Delta_i$ .

Рассмотрим задачу слежения за двигающимися по отрезку  $\Lambda_i = [\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}]$  объектами  $t, T$ ,  $\|t - T\| = d$ . В начале для пары  $k = (t, T)$ ,  $T \in \Delta_i$ ,  $t \in \Lambda_i$ , найдем (см. рис. 4)

$$f^i \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \bar{t}_i - 0} f(k), \quad c_i = \lim_{t \rightarrow \bar{t}_i - 0} \frac{t + T}{2},$$

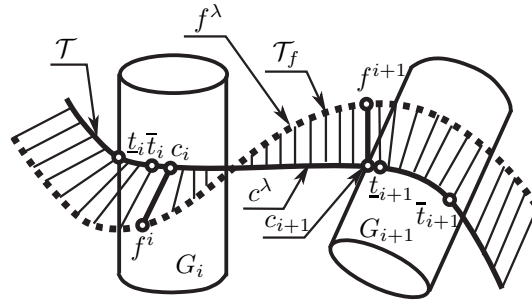


Рис. 4. На рисунке траектория объектов изображена жирной сплошной линией, а траектория  $T_f$  – пунктирной.

и для пары  $k = (t, T)$ ,  $T \in \Lambda_i$ ,  $t \in \Delta_{i+1}$ , найдем

$$f^{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \underline{t}_{i+1}+0} f(k), \quad c_{i+1} = \lim_{t \rightarrow \underline{t}_{i+1}+0} \frac{t + T}{2}.$$

Отрезки  $[f_i, c_i]$ ,  $[f_{i+1}, c_{i+1}]$  перпендикулярны отрезку  $\Lambda_i$ .

Пусть  $c^\lambda = \lambda c_i + (1 - \lambda)c_{i+1}$ ,  $F^\lambda = \lambda f^i + (1 - \lambda)f^{i+1}$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ). Точке  $c^\lambda \in [\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}]$  сопоставим точку

$$f^\lambda = c^\lambda + \frac{F^\lambda - c^\lambda}{\|F^\lambda - c^\lambda\|} \cdot h.$$

Наблюдатель с позиции  $f^\lambda$  контролирует движение объектов  $t^\lambda$ ,  $T^\lambda$  по отрезку  $[\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}] \subset \mathcal{T}$ , где  $\frac{t^\lambda + T^\lambda}{2} = c^\lambda$ . Легко проверить, что дуга  $\widehat{f^i, f^{i+1}}$  траектории  $T_f$  является кратчайшей кривой цилиндрической поверхности с осью  $[\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}]$  и радиусом основания, равным  $h$ .

**Теорема 2.** Построенная траектория  $T_f$  позволяет наблюдателю  $f_\tau$  отслеживать с расстояния  $\|f_\tau - t_\tau\| = \|f_\tau - T_\tau\| = \delta$  движущиеся с постоянной скоростью  $V_t$  объекты  $t$ ,  $T$ ,  $\rho(t, T) = d$  ( $d \leq \delta$ ), при этом скорость наблюдателя, контролирующего объекты:

- на отрезке  $[t_*, t_1]$  равна  $V_t$ ;
- на дуге  $\widehat{t, T} \subset \Delta_i$  не совпадающей с отрезком  $[t, T]$ , определяется посредством (3);
- на отрезке  $[t, T] \subset \Delta_i$  равняется величине  $\frac{|f^a, f^A|}{\|C^a - C^A\|} \cdot V_t$ ;
- на отрезке  $[\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}]$  равна  $\frac{|\widehat{f^i, f^{i+1}}|}{\|\bar{t}_i - \underline{t}_{i+1}\|} \cdot V_t$ .

Траектория  $T_f$  является кратчайшей среди траекторий, удовлетворяющих условию  $\|f_\tau - t_\tau\| = \|f_\tau - T_\tau\| = \delta$ .

Автор выражает благодарность В. Б. Костоусову за полезное обсуждение тематики исследования.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бердышев В.И. Траектория наблюдателя, отслеживающего движение объекта вокруг выпуклых препятствий в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$  // Докл. Акад. наук. 2022. Т. 505. С. 100–104. doi: 10.31857/S268695432204004X.
2. Лю В. Методы планирования пути в среде с препятствиями (обзор) // Математика и мат. моделирование. 2018. № 1. С. 15–58. doi: 10.24108/mathm.0118.0000098.

Поступила 31.08.2022  
После доработки 19.09.2022  
Принята к публикации 26.09.2022

Бердышев Виталий Иванович  
академик РАН  
научный руководитель  
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН  
г. Екатеринбург  
e-mail: bvi@imm.uran.ru

#### REFERENCES

1. Berdyshev V.I. Trajectory of the observer tracking object motion around convex obstacles in  $\mathbb{R}^2$  and  $\mathbb{R}^3$ . *Doklady Mathematics*, 2022, vol. 505, pp. 100–104. doi: 10.31857/S268695432204004X (in Russian).
2. Lyu V. Metody planirovaniya puti v srede s prepyatstviyami (obzor). *Matematika i Mat. Modelirovanie*, 2018, vol. 1, pp. 15–58 (in Russian). doi: 10.24108/mathm.0118.0000098.

Received August 31, 2022  
Revised September 19, 2022  
Accepted September 26, 2022

**Funding Agency:** This study is a part of the research carried out at the Ural Mathematical Center and supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2022-874).

*Vitalii Ivanovich Berdyshev*, RAS Academician, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,  
e-mail: bvi@imm.uran.ru.

Cite this article as: V.I. Berdyshev. An observer and a pair of objects enveloping a set of convex regions. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 64–70.