

УДК 519.176

АЛГОРИТМ ПРИВЕДЕНИЯ ДВУДОЛЬНОГО ГРАФА К ДВУДОЛЬНО-ПОРОГОВОМУ ВИДУ

В. А. Баранский, Т. А. Сеньчонок

Тройка (x, v, y) различных вершин графа $G = (V, E)$ такая, что $xv \in E$ и $vy \notin E$, называется *повышающей*, если $\deg(x) \leq \deg(y)$, и *понижающей*, если $\deg(x) \geq 2 + \deg(y)$. Преобразование ϕ графа G такое, что $\phi(G) = G - xv + vy$, называется *вращением ребра в графе G вокруг вершины v , отвечающим тройке (x, v, y)* . Вращение ребра в графе G , отвечающее тройке (x, v, y) , называется *повышающим*, если тройка (x, v, y) повышающая, и *понижающим*, если тройка (x, v, y) понижающая. Вращение ϕ ребра в графе G является повышающим тогда и только тогда, когда обратное к нему вращение ребра в графе $\phi(G)$ является понижающим. Двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$ будем называть *двудольно-пороговым графом*, если он не имеет повышающих троек таких, что $x, y \in V_1, v \in V_2$ или $x, y \in V_2, v \in V_1$. Вращение ребра, отвечающее тройке вершин (x, v, y) , такое, что $x, y \in V_1$ и $v \in V_2$ ($x, y \in V_2$ и $v \in V_1$), будем называть V_1 -вращением (V_2 -вращением) ребра. Любой двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$ можно преобразовать в двудольно-пороговый граф с помощью конечной последовательности V_1 -вращений (V_2 -вращений) ребер. Целью работы является построение полиномиального алгоритма, который преобразует любой двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$ в двудольно-пороговый граф с помощью кратчайшей последовательности, состоящей из V_1 -вращений ребер.

Ключевые слова: алгоритм, разбиение целого числа, пороговый граф, двудольный граф, двудольно-пороговый граф, диаграмма Ферре.

V. A. Baranskii, T. A. Sen'chonok. An algorithm for taking a bipartite graph to the bipartite threshold form.

A triple of different vertices (x, v, y) of a graph $G = (V, E)$ such that $xv \in E$ and $vy \notin E$ is called *lifting* if $\deg(x) \leq \deg(y)$ and *lowering* if $\deg(x) \geq 2 + \deg(y)$. A transformation ϕ of the graph G that replaces G with $\phi(G) = G - xv + vy$ is called an *edge rotation in the graph G about the vertex v corresponding to the triple of vertices (x, v, y)* . For a lifting (lowering) triple (x, v, y) , the corresponding edge rotation is called *lifting (lowering)*. An edge rotation in a graph G is lifting if and only if its inverse is lowering in the graph $\phi(G)$. A bipartite graph $H = (V_1, E, V_2)$ is called a *bipartite threshold graph* if it has no lifting triples such that $x, y \in V_1$ and $v \in V_2$ or $x, y \in V_2$ and $v \in V_1$. The edge rotation corresponding to a triple of vertices (x, v, y) such that $x, y \in V_1$ and $v \in V_2$ ($x, y \in V_2$ and $v \in V_1$) is called a V_1 -rotation (V_2 -rotation) of edges. Every bipartite graph $H = (V_1, E, V_2)$ can be transformed to a bipartite threshold graph by a finite sequence of V_1 -rotations (V_2 -rotations) of edges. The aim of the paper is to give a polynomial algorithm that transforms every bipartite graph $H = (V_1, E, V_2)$ to a bipartite threshold graph by a shortest finite sequence of V_1 -rotations of edges.

Keywords: algorithm, integer partition, threshold graph, bipartite graph, bipartite threshold graph, Ferrers diagram.

MSC: 05A17

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-54-63

Введение

Далее под графом мы всегда будем понимать *обыкновенный* граф, т. е. граф без петель и кратных ребер, и будем использовать терминологию, принятую в [1].

Под *разбиением* (см., например, [2]) мы будем понимать последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ целых неотрицательных чисел, которая является невозрастающей и содержит конечное число ненулевых компонент.

Теория разбиений [2] имеет давнюю историю и является одним из активно развивающихся направлений комбинаторики. Продолжаются исследования по перечислению графических разбиений. Во введении к работе [3] приведен полезный обзор статей по проблеме перечисления графических разбиений. Продолжается исследование реализаций графических разбиений и совершенствование алгоритмов построения всех реализаций.

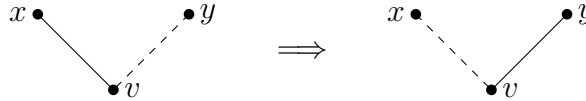
Далее мы будем использовать понятия и обозначения из нашей работы [4].

Пусть (x, v, y) — тройка различных вершин графа $G = (V, E)$ такая, что $xv \in E$ и $vy \notin E$.

Такую тройку назовем

- 1) *повышающей*, если $\deg(x) \leq \deg(y)$;
- 2) *понижающей*, если $\deg(x) \geq 2 + \deg(y)$;
- 3) *сохраняющей*, если $\deg(x) = 1 + \deg(y)$.

Рассмотрим преобразование φ графа G такое, что $\varphi(G) = G - xv + vy$, т. е. из G сначала удаляется ребро xv , а затем добавляется ребро vy :



Преобразование φ называется *вращением ребра* (в графе G вокруг вершины v), отвечающим тройке (x, v, y) .

Вращение ребра в графе G , отвечающее тройке (x, v, y) , называется

- 1) *повышающим*, если тройка (x, v, y) повышающая;
- 2) *понижающим*, если тройка (x, v, y) понижающая;
- 3) *сохраняющим*, если тройка (x, v, y) сохраняющая.

Авторы показали (О пороговых графах и реализациях графических последовательностей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 2. С. 22–31), что *граф является пороговым тогда и только тогда, когда он не содержит повышающих троек вершин*.

Разнообразные свойства пороговых графов можно найти в монографии [5].

Пусть $H = (V_1, E, V_2)$ — двудольный граф. Рассмотрим тройки вершин (x, v, y) вида

- 1) $x, y \in V_1$ и $v \in V_2$;
- 2) $x, y \in V_2$ и $v \in V_1$.

Повышающие тройки графа $H = (V_1, E, V_2)$ первого вида будем называть *повышающими тройками первой доли* или, кратко, *повышающими V_1 -тройками*, а второго вида — *повышающими тройками второй доли* или, кратко, *повышающими V_2 -тройками*.

По аналогии с пороговыми графами произвольный двудольный граф будем называть *двудольно-пороговым графом*, если он не имеет повышающих троек как первой, так и второй доли. Для любого двудольного графа $H = (V_1, E, V_2)$ в теореме 1 из [4] были найдены различные условия, эквивалентные тому, что двудольный граф является двудольно-пороговым графом. Настоящую статью можно рассматривать как продолжение работы [4].

Каждый граф G с помощью конечной последовательности повышающих вращений ребер может быть преобразован в пороговый граф [6]. В [6] мы нашли нижнюю оценку для длины кратчайшей из таких последовательностей. Она равна

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r |\text{tl}(\mu)_i - \text{hd}(\mu)_i|,$$

где μ — степенное разбиение, отвечающее графу G , $r = r(\mu)$ — ранг Дерфи разбиения μ , а $\text{tl}(\mu)_i$ и $\text{hd}(\mu)_i$ — компоненты с номером i , соответственно головы и хвоста разбиения μ .

Ясно, что любой двудольный граф последовательными вращениями ребер, каждое из которых отвечает повышающей тройке первой доли или второй доли, приводится к двудольно-пороговому графу. Также любой двудольный граф последовательными вращениями ребер, каждое из которых отвечает повышающей тройке только первой доли, также приводится к двудольно-пороговому графу. Конечно, аналогичное утверждение верно и для повышающих троек второй доли.

Пусть двудольный граф $H_2 = (V_1, E_2, V_2)$ может быть получен из графа $H_1 = (V_1, E_1, V_2)$ с помощью конечной последовательности V_1 -вращений ребер.

Наименьшее число V_1 -вращений ребер в последовательности, переводящей H_1 в H_2 , обозначим через $V_1\text{-dist}(H_1, H_2)$ и будем называть V_1 -расстоянием от H_1 до H_2 .

Цель данной работы состоит в построении полиномиального алгоритма, который произвольный двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$ преобразует в двудольно-пороговый граф G с помощью конечной последовательности наименьшей возможной длины, состоящей из V_1 -вращений ребер.

1. Построение алгоритма

Пусть $H = (V_1, E, V_2)$ — двудольный граф такой, что $\text{dpt}_H(V_1) = \alpha$ и $\text{dpt}_H(V_2) = \beta$ — степенные разбиения его долей. Конечно, $\text{sum}(\alpha) = \text{sum}(\beta)$, и в силу теоремы Гейла — Райзера выполняется $\alpha \leq \beta^*$. Класс всех таких двудольных графов будем обозначать через $\text{BG}(\alpha, \beta)$.

Для произвольного разбиения β через $\text{btg}(\beta^*, \beta)$ будем обозначать двудольно-пороговый граф с долями V_1 и V_2 без изолированных вершин такой, что $\text{dpt}_G(V_1) = \beta^*$ и $\text{dpt}_G(V_2) = \beta$.

Любой двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$ без изолированных вершин из семейства графов $\text{BG}(\alpha, \beta)$ с помощью конечной последовательности повышающих V_1 -вращений ребер приводится к единственному двудольно-пороговому графу с точностью до изоморфизма и изолированных вершин, который изоморфен $\text{btg}(\beta^*, \beta)$, и граф $H = (V_1, E, V_2)$ получается из графа $\text{btg}(\beta^*, \beta)$ с помощью обратной последовательности понижающих V_1 -вращений ребер; см. статью авторов за 2017 г. (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 2. С. 22–31).

Развернем теперь построение алгоритма, которое будем иллюстрировать на конкретном примере двудольного графа.

Пример 1. Пусть $H = (V_1, E, V_2)$ — это двудольный граф такой, что

$$V_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}, \quad V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$

и множество ребер E отвечает системе окрестностей

$$\begin{aligned} N(v_1) &= \{u_3, u_6\}, & N(v_2) &= \{u_2, u_3, u_4, u_6\}, & N(v_3) &= \{u_5, u_6\}, \\ N(v_4) &= \{u_1, u_2, u_6, u_7\}, & N(v_5) &= \{u_2, u_4, u_5, u_7\}, & N(v_6) &= \{u_2, u_3, u_5, u_6\}, \\ N(v_7) &= \{u_2, u_3, u_6, u_7\}, & N(v_8) &= \{u_1, u_5, u_6\}. \end{aligned}$$

Тогда нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} N(u_1) &= \{v_4, v_8\}, & N(u_2) &= \{v_2, v_4, v_5, v_6, v_7\}, \\ N(u_3) &= \{v_1, v_2, v_6, v_7\}, & N(u_4) &= \{v_2, v_5\}, \\ N(u_5) &= \{v_3, v_5, v_6, v_8\}, & N(u_6) &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8\}, \\ N(u_7) &= \{v_4, v_5, v_7\}. \end{aligned}$$

Матрица смежности нашего двудольного графа $H = (V_1, E, V_2)$ имеет следующий вид (будем считать, что эта матрица так же, как шахматная доска, состоит из квадратных клеток одинакового размера):

3	u_7				1	1		1	
7	u_6	1	1	1	1		1	1	1
4	u_5			1		1	1		1
2	u_4		1			1			
4	u_3	1	1				1	1	
5	u_2		1		1	1	1	1	
2	u_1				1				1
		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
		2	4	2	4	4	4	4	3

Матрица смежности — это $n \times m$ -матрица, состоящая из единиц и нулей (нули мы обычно будем опускать и говорить, что соответствующая клетка пуста), к которой для удобства добавлены два служебных столбца и две служебные строки для указания вершин и их степеней. Строки матрицы смежности очевидно являются характеристическими векторами для окрестностей вершин, которые соответствуют строкам (при зафиксированном порядке на V_2), аналогичное утверждение верно и для столбцов. Строки матрицы смежности двудольного графа будем всегда нумеровать снизу вверх, а столбцы — слева направо.

Для примера 1 выполняется $n = 7, m = 8, \alpha = (7, 5, 4, 4, 3, 2, 2)$ и $\beta = (4, 4, 4, 4, 4, 3, 2, 2)$. Поэтому двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$ принадлежит классу двудольных графов $BG(\alpha, \beta)$. Следовательно, его можно привести с помощью V_1 -вращений ребер к двудольно-пороговому графу $G = (V_1, E', V_2)$ такому, что $dpt_G(V_1) = \beta^*$ и $dpt_G(V_2) = \beta$ (отметим, что при V_1 -вращениях степени вершин из V_2 не изменяются).

Перепишем матрицу смежности графа H , упорядочив слева направо по невозрастанию степеней вершины из V_2 . В примере 1 получим

3	u_7	1		1	1				
7	u_6	1	1		1	1	1	1	1
4	u_5		1	1			1		1
2	u_4			1		1			
4	u_3	1	1			1		1	
5	u_2	1	1	1	1	1			
2	u_1				1		1		
		v_7	v_6	v_5	v_4	v_2	v_8	v_1	v_3
		4	4	4	4	4	3	2	2

В полученной матрице серым цветом выделим область, представляющую собой диаграмму Ферре разбиения β . Эту область матрицы смежности для удобства будем называть *трафаретом*.

Далее каждое преобразование матриц будем иллюстрировать примером 1:

3	u_7	1		1	1				
7	u_6	1	1		1	1	1	1	1
4	u_5		1	1			1		1
2	u_4			1		1			
4	u_3	1	1			1		1	
5	u_2	1	1	1	1	1			
2	u_1				1		1		
		v_7	v_6	v_5	v_4	v_2	v_8	v_1	v_3
		4	4	4	4	4	3	2	2

Очевидно, по определению диаграммы Ферре в каждом столбце количество пустых мест в трафарете равно числу единиц этого столбца, не попавших в трафарет. Общее число единиц, не попавших в трафарет, в примере 1 сейчас равно 15.

Теперь, совершая V_1 -вращения ребер, мы переместим все единицы, лежащие вне трафарета, вертикально вниз на пустые места в трафарет.

В примере 1 V_1 -вращение ребра, отвечающее тройке (u_7, v_4, u_3) , переместит единицу с координатами $(7, 4)$ (7-я строка и 4-й столбец) в матрице смежности на пустое место с координатами $(3, 4)$ (перемещение единицы происходит в четвертом столбце, отвечающем v_4). Аналогично совершаются и 14 других вращений ребер. Совершая V_1 -вращения ребер 15 раз в произвольном порядке, мы получим граф, матрица смежности которого имеет следующий вид: все места в трафарете заполнены единицами и вне трафарета нет единиц. Полученный двудольный граф очевидно является двудольно-пороговым графом с набором степеней вершин (β^*, β) , и его диаграмма Ферре представлена трафаретом.

Такой способ преобразования графа к двудольно-пороговому виду, которое мы будем называть *стандартным*, можно осуществить, используя его матрицу смежности, построенную по любому возможному упорядочению вершин из V_1 (напомним, что нами был зафиксирован порядок вершин из V_2 по убыванию их степеней).

Теперь временно приостановим построение нашего алгоритма.

Докажем некоторое вспомогательное утверждение, которое обеспечит его корректность.

Пусть A_0 — матрица смежности графа $H = (V_1, E, V_2)$, отвечающая некоторому упорядочению вершин из V_1 . Пусть граф H каким-либо произвольным способом приведен к двудольно-пороговому графу $G = (V_1, E', V_2)$ с помощью последовательности P длины t , состоящей из V_1 -вращений ребер. Поскольку при V_1 -вращениях ребер степени вершин из V_2 не меняются, для графа G выполняются $\text{dpt}_G(V_1) = \beta^*$ и $\text{dpt}_G(V_2) = \beta$.

Рассмотрим последовательность матриц, которая получается из матрицы A_0 с помощью перемещений единиц на пустые места в соответствии с V_1 -вращениями ребер из последовательности P :

$$A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_t. \quad (1)$$

Рассмотрим также последовательность двудольных графов, которая получается из двудольного графа $H = (V_1, E, V_2)$ с помощью последовательных V_1 -вращений ребер из последовательности P :

$$H = H_0 \rightarrow H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow \dots \rightarrow H_t = G.$$

Ясно, что каждое A_i является матрицей смежности для H_i и граф H_t — двудольно-пороговый граф.

Совершим в матрице A_t подстановку σ на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ номеров строк, переставляя строки матрицы таким образом, чтобы при новом расположении вес строк не возрастал при увеличении номера строки, начиная с первой (в начале стоит строка наибольшего веса, и при переходе вверх от одной строки к следующей вес сохраняется или уменьшается). Мы получим новую матрицу смежности A'_t графа G в новом упорядочении вершин из V_1 (теперь для V_1 имеются *старое упорядочение* и *новое упорядочение*).

Совершим также перестановку строк в соответствии с подстановкой σ во всех матрицах последовательности (1), получим последовательность

$$A'_0 \rightarrow A'_1 \rightarrow A'_2 \rightarrow \dots \rightarrow A'_t. \quad (2)$$

Отметим, что здесь для каждого $q = 0, 1, \dots, t-1$ при переходе от A'_q к A'_{q+1} переносится единица из клетки с координатами $(\sigma(i), k)$ в пустую клетку с координатами $(\sigma(j), k)$, если при переходе от A_q к A_{q+1} переносится единица из клетки с координатами (i, k) в пустую клетку с координатами (j, k) , где k — номер столбца, в котором перемещается единица.

Матрица A'_0 — это матрица графа $H = (V_1, E, V_2)$, отвечающая новому упорядочению вершин из V_1 . В матрицах A'_0 и A'_t мы будем рассматривать трафареты, расположенные точно так же, как в матрице A_0 (упорядочение множества V_2 нами зафиксировано).

Поскольку граф $G = H_t$ является двудольно-пороговым, в силу [4, теорема 1] окрестности вершин из V_1 образуют цепь относительно теоретико-множественного включения, отсюда следует (напомним, что строки матрицы смежности являются характеристическими векторами для окрестностей вершин, которые соответствуют строкам), что в матрице A'_t для любой единицы выполняется следующее свойство:

- либо единица лежит в первой строке;
- либо все элементы, лежащие ниже этой единицы в ее столбце, также являются единицами.

Передвигаясь по столбцам матрицы A'_t слева направо, в силу этого свойства мы видим, что все единицы этой матрицы сосредоточены в трафарете и в трафарете нет пустых мест (напомним, что трафарет фактически является диаграммой Ферре для G).

Поскольку все единицы матрицы A'_t сосредоточены в трафарете, каждая из единиц матрицы A'_0 , лежащая вне трафарета, должна участвовать в процессе перемещения единиц при переходе от A'_0 до A'_t .

Следовательно, $t \geq s$, где s — число единиц матрицы A'_0 , лежащих вне трафарета.

Таким образом, справедливо следующее

Утверждение 1. *Если произвольный двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$ преобразуется в двудольно-пороговый граф G с помощью последовательности длины t , составленной из V_1 -вращений ребер, то двудольный граф H можно преобразовать в двудольно-пороговый граф G некоторым стандартным способом при помощи последовательности длины, не превосходящей t и составленной из V_1 -вращений ребер.*

Продолжим построение алгоритма.

Теперь наша цель в силу утверждения 1 состоит в том, чтобы найти такое упорядочение вершин из V_1 , при котором в матрице смежности графа $H = (V_1, E, V_2)$ вне трафарета лежит наименьшее возможное число единиц.

Перепишем матрицу смежности графа H , упорядочив снизу вверх по невозрастанию степеней вершины из V_1 . (Это преобразование матрицы смежности необязательно. Такое преобразование может убыстрить решение некоторой задачи о назначениях в дальнейшем.) Имеем

2	u_1				1		1		
2	u_4			1		1			
3	u_7	1		1	1				
4	u_3	1	1			1		1	
4	u_5		1	1			1		1
5	u_2	1	1	1	1	1			
7	u_6	1	1		1	1	1	1	1
		v_7	v_6	v_5	v_4	v_2	v_8	v_1	v_3
		4	4	4	4	4	3	2	2

(3)

По определению диаграммы Ферре в каждом столбце количество пустых мест в трафарете (в них стоят нули) равно числу единиц этого столбца, не попавших в трафарет. Общее число единиц, не попавших в трафарет в данной ситуации, для примера 1 равно 9.

Рассмотрим теперь следующую задачу: найти такое упорядочение вершин из V_1 , при котором вне трафарета лежит наименьшее возможное число единиц, т. е. внутри трафарета лежит наибольшее возможное число единиц.

Такое упорядочение будем искать, решая вспомогательную задачу о назначениях на максимум (см., например, [1]).

Построим $n \times m$ -матрицу весов для задачи о назначениях. Для примера 1 она имеет следующий вид:

u_1	2	2	2	1	0	0	0
u_4	2	2	2	2	0	0	0
u_7	3	3	3	3	0	0	0
u_3	4	4	3	3	0	0	0
u_5	4	4	3	2	0	0	0
u_2	5	5	5	5	0	0	0
u_6	7	7	5	4	0	0	0
	1	2	3	4	5	6	7

Столбцы матрицы весов снизу во вспомогательной строке пронумерованы номерами, отвечающими номерам строк матрицы смежности. Строки пронумерованы вершинами из V_1 . Для каждой вершины u_i на j -м месте в качестве веса возьмем число единиц, попадающих в

трафарет при размещении строки матрицы смежности, отвечающей вершине u_i , в строку с номером j .

Далее решаем задачу о назначениях на максимум.

Находим оптимальное упорядочение множества V_1 , для которого в трафарете находится наибольшее возможное число единиц.

Затем выполняем стандартное преобразование графа к двудольно-пороговому виду.

На этом алгоритм завершает работу.

Для примера 1, решая задачу о назначениях каким-либо известным образом, можно проверить, что при оптимальном заполнении в трафарете будет содержаться 19 единиц, поэтому вне трафарета будет $27 - 19 = 8$ единиц. Следовательно, $V_1\text{-dist}(H, G) = 8$. Оптимальное решение получается при следующем распределении вершин по строкам:

$$u_6 \rightarrow 1, \quad u_2 \rightarrow 3, \quad u_5 \rightarrow 2, \quad u_3 \rightarrow 4, \quad u_7 \rightarrow 5, \quad u_4 \rightarrow 6, \quad u_1 \rightarrow 7.$$

Таким образом, в исходной матрице смежности двудольного графа H нужно поменять местами вторую и третью строки (они отвечают вершинам u_2 и u_5 соответственно). Ясно, что такая перестановка в исходной матрице приводит к увеличению числа единиц в трафарете. Оптимальность такой перестановки строк нетрудно проверить напрямую, т. е. никакие перестановки строк не увеличат число единиц в трафарете:

2	u_1				1		1		
2	u_4			1		1			
3	u_7	1		1	1				
4	u_3	1	1			1		1	
5	u_2	1	1	1	1	1			
4	u_5		1	1			1		1
7	u_6	1	1		1	1	1	1	1
		v_7	v_6	v_5	v_4	v_2	v_8	v_1	v_3
		4	4	4	4	4	3	2	2

Здесь вне трафарета находится 8 единиц. Поэтому двудольный граф H можно привести к двудольно-пороговому виду с помощью восьми V_1 -вращений ребер и $V_1\text{-dist}(H, G) = 8$.

Отметим, что для примера 1 нетрудно установить (не решая задачу о назначении), что при перестановке строк нельзя уменьшить количество вершин вне трафарета.

Приведем теперь краткое описание нашего алгоритма, решающего задачу о V_1 -приведении двудольного графа $H = (V_1, E, V_2)$ к двудольно-пороговому виду.

Алгоритм. На входе имеем $n \times m$ -матрицу смежности M двудольного графа $H = (V_1, E, V_2)$ (нумерацию строк берем снизу вверх, а нумерацию столбцов — слева направо). Последовательно выполняем следующие действия.

1. Перепишем матрицу смежности M , упорядочив слева направо по невозрастанию степеней вершины из V_2 и переставив соответствующим образом столбцы матрицы M .
2. Перепишем текущую матрицу смежности M , упорядочив снизу вверх по невозрастанию степеней вершины из V_1 и переставив соответствующим образом строки матрицы M (выполнение шага (2) можно пропустить, но лучше выполнить для ускорения решения задачи о назначениях).
3. Формируем трафарет в текущей матрице M (см. выше определение трафарета).
4. Формируем $n \times n$ -матрицу весов для задачи о назначениях на максимум (где i -вес строки матрицы M (точнее, отвечающей ей вершины) равен количеству единиц, которое она вносит в трафарет, будучи размещенной в строку матрицы с номером i).

5. Решаем каким-либо способом задачу о назначениях на максимум. Получаем новое упорядочение множества V_1 .
6. Преобразуем текущую матрицу M , переставляя строки в соответствии с полученным упорядочением множества V_1 .
7. Находим единицы, которые не попали в трафарет. Строим ответ: последовательность наименьшей возможной длины, состоящую из V_1 -вращений ребер, которая двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$ преобразует в двудольно-пороговый граф G . Для этого по очереди все такие единицы перемещаем вниз в своем столбце на пустое место в трафарете. При этом длина полученной последовательности равна $V_1\text{-dist}(H, G)$. Stop.

Очевидно, алгоритм решает задачу за полиномиальное время [1], которое зависит от выбора алгоритма, решающего задачу о назначениях.

2. Открытые вопросы

Перейдем теперь к решению задачи о V_2 -приведении двудольного графа $H = (V_1, E, V_2)$ к двудольно-пороговому виду для примера 1.

Рассмотрим матрицу смежности (3) нашего графа и выделим в ней трафарет относительно последовательности вершин из V_1 :

2	u_1				1		1		
2	u_4			1		1			
3	u_7	1		1	1				
4	u_3	1	1			1		1	
4	u_5		1	1			1		1
5	u_2	1	1	1	1	1			
7	u_6	1	1		1	1	1	1	1
		v_7	v_6	v_5	v_4	v_2	v_8	v_1	v_3
		4	4	4	4	4	3	2	2

Поменяем местами столбцы с номерами 1 и 3, а также столбцы с номерами 2 и 4. Матрица смежности примет следующий вид:

2	u_1		1				1		
2	u_4	1				1			
3	u_7	1	1	1					
4	u_3			1	1	1		1	
4	u_5	1			1		1		1
5	u_2	1	1	1	1	1			
7	u_6		1	1	1	1	1	1	1
		v_5	v_4	v_7	v_6	v_2	v_8	v_1	v_3
		4	4	4	4	4	3	2	2

Теперь вне трафарета содержится семь единиц. Совершая семь V_2 -вращений ребер, мы переместим вдоль строк в трафарет все единицы, а граф $H = (V_1, E, V_2)$ станет двудольно-пороговым графом $\text{btg}(\alpha, \alpha^*)$. Оптимальность такой перестановки столбцов нетрудно проверить напрямую, т. е. никакие перестановки столбцов не увеличат число единиц в трафарете. Следовательно, $V_2\text{-dist}(H, G_1) = 7$.

Ранее мы установили, что $V_1\text{-dist}(H, G) = 8$. Здесь эти числа разные.

Двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$ можно приводить к двудольно-пороговому виду с помощью последовательности преобразований, в которой могут присутствовать и V_1 -вращения ребер, и V_2 -вращения ребер.

В о п р о с 1. Какое количество двудольно-пороговых графов можно таким образом получить для двудольного графа $H = (V_1, E, V_2)$ и как они устроены?

Пусть двудольный граф $H_2 = (V_1, E_2, V_2)$ может быть получен из графа $H_1 = (V_1, E_1, V_2)$ с помощью конечной последовательности повышающих V_1 -вращений ребер. Наименьшее число повышающих V_1 -вращений ребер, в такой последовательности, переводящей H_1 в H_2 , обозначим через $V_1\text{-updist}(H_1, H_2)$ и будем называть *верхним V_1 -расстоянием от H_1 до H_2* .

Пусть $H = (V_1, E, V_2)$ — двудольный граф, $\text{dpt}_H(V_2) = \beta$ и $G = \text{btg}(\beta^*, \beta)$.

В о п р о с 2. Справедливо ли равенство

$$V_1\text{-dist}(H, G) = V_1\text{-updist}(H, G)?$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В.** Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. 2-е изд., испр. и доп. СПб.: Лань, 2010. 368 с.
2. **Andrews G.E.** The theory of partitions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1976. 255 p.
3. **Ivanyi A., Lucz L., Gombos G., Matuszka T.** Parallel enumeration of degree sequences of simple graphs // Acta Univ. Sapientiae, Informatica. 2012. Vol. 4, no. 2. P. 260–288.
4. Баранский В.А., Сеньчонок Т.А. Двудольно-пороговые графы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 56–67. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-56-67.
5. **Mahadev N.V.R., Peled U.N.** Threshold graphs and related topics. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1995. 542 p. (Ser. Annals of Discr. Math.; vol. 56).
6. **Baransky V.A., Senchonok T.A.** On maximal graphical partitions that a the nearest to a given graphical partition // Sib. Elect. Math. Reports. 2020. Vol. 17. P. 338–363. doi: 10.33048/semi.2020.17.022.

Поступила 15.08.2022

После доработки 15.09.2022

Принята к публикации 26.09.2022

Баранский Виталий Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: vitaly.baransky@urfu.ru

Сеньчонок Татьяна Александровна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: tatiana.senchonok@urfu.ru

REFERENCES

1. Asanov M.O., Baransky V.A., Rasin V.V., *Diskretnaya matematika: grafy, matroidy, algoritmy* [Discrete mathematics: graphs, matroids, algorithms]. SPb: Lan' Publ., 2010, 368 p. ISBN: 978-5-8114-1068-2.
2. Andrews G.E. *The theory of partitions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1984, 255 p. doi: 10.1017/CBO9780511608650.
3. Ivanyi A., Lucz L., Gombos G., Matuszka T. Parallel enumeration of degree sequences of simple graphs. *Acta Univ. Sapientiae, Informatica*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 260–288.
4. V. A. Baransky, T. A. Senchonok. Bipartite threshold graphs. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 56–67 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-56-67.

5. Mahadev N.V.R., Peled U.N. *Threshold graphs and related topics*. Ser. Annals of Discr. Math., vol. 56. Amsterdam: North-Holland, 1995, 542 p. doi: 10.1016/s0167-5060(13)71063-x.
6. Baransky V.A., Senchonok T.A. On maximal graphical partitions that are the nearest to a given graphical partition. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2020, vol. 17, pp. 338–363 (in Russian). doi: 10.33048/semi.2020.17.022.

Received August 15, 2022
Revised September 15, 2022
Accepted September 26, 2022

Vitaly Anatol'evich Baransky, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: vitaly.baransky@urfu.ru .

Tatiana Aleksandrovna Senchonok, Cand. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: tatiana.senchonok@urfu.ru .

Cite this article as: V. A. Baranskii, T. A. Sen'chonok. An algorithm for taking a bipartite graph to the bipartite threshold form. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 54–63.