ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 3 2022

УДК 517.977

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ НА МНОЖЕСТВЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ УПРАВЛЕНИЙ С ПАРАМЕТРИЗАЦИЕЙ ФУНКЦИОНАЛА[1]

А. В. Аргучинцев, В. А. Срочко

Рассматривается линейно-квадратичная задача оптимального управления с произвольными матрицами в функционале и многомерным управлением с ограничением в каждый момент времени. Множество допустимых управлений составляют кусочно-постоянные вектор-функции относительно неравномерной сетки узлов дискретизации. Редукция задачи оптимального управления в конечномерный формат проводится с использованием характеристических функций сеточной структуры и блочных матриц вместе с соответствующей операцией скалярного произведения. Возможность воздействия на функционал исходной задачи обеспечивается с помощью положительных параметров при квадратичных формах. Выбор этих параметров ориентирован на регуляризацию функционала в смысле его приведения к выпуклой либо вогнутой структуре на уровне конечномерной модели. Условия на выбор параметров носят спектральный характер. Это неравенства относительно экстремальных собственных значений блочных матриц, формирующих целевую функцию. Соответствующие задачи выпуклой или вогнутой оптимизации допускают решение за конечное число итераций. В рамках исходной задачи оптимального управления на основе известных оценок для приращения функционала получено неградиентное условие глобальной оптимальности. Предложена процедура нелокального улучшения в терминологии функции Понтрягина.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача, кусочно-постоянное управление, функционал с параметрами, редукция к конечномерной модели, регуляризация задачи.

A. V. Arguchintsev, V. A. Srochko. Solution of a linear–quadratic problem on a set of piecewise constant controls with parametrization of the functional.

A linear–quadratic problem of optimal control with arbitrary matrices in the cost functional and a multidimensional control constrained at every time is considered. The set of admissible controls consists of piecewise constant vector functions relative to a nonuniform discretization grid. The optimal control problem is reduced to a finite-dimensional form with the use of characteristic functions with grid structure and block matrices together with the corresponding operation of scalar product. Nonnegative parameters of the quadratic forms provide the possibility of regularization of the cost functional. The choice of these parameters is aimed at the regularization of the functional in the sense of its reduction to a convex or concave structure at the level of a finite-dimensional model. The conditions for these parameters are of spectral nature; they are inequalities with respect to extreme eigenvalues of the block matrices that form the objective function. The corresponding convex or concave optimization problems allow to solve the problem in a finite number of iterations. A nongradient condition of global optimality is obtained for the original problem of optimal control based on known estimates for the increment of the functional. A nonlocal refinement procedure in terms of Pontryagin's function is proposed.

Keywords: linear–quadratic problem, multidimensional discrete control, functional with parameters, reduction to a finite-dimensional model, regularization of the problem.

MSC: 49M25

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-5-16

Введение

В теории оптимального управления линейно-квадратичные задачи (линейная система, квадратичный функционал) традиционно занимают приоритетное место в силу своей исторической значимости и сохраняющейся актуальности как в теоретическом, так и в прикладном отношении. Спектр возможных постановок и соответствующих результатов в этой области достаточно

[1]Работа выполнена при поддержке Благотворительного фонда Владимира Потанина (договор гранта ГСАД-0022/212).

широк. В рамках рассматриваемой тематики выделим линейно-квадратичные задачи при наличии ограничений на управление с ориентировкой только на программное решение. Кратко перечислим основные направления изучения этого класса задач:

- применение методов оптимального управления, разработанных для общих нелинейных задач (см., например, обзоры [1; 2]);
- использование специализированных методов, основанных на неклассических аппроксимациях целевого функционала и динамической системы [3];
- исследование задачи в классе дискретно-особых управляющих воздействий [4];
- исследование задачи с параметрически заданными начальными условиями [5];
- использование различных вариантов дискретизации исходной задачи [6; 7];
- применение специализированных условий глобального экстремума [8; 9].

Следует отметить, что проблемы глобального решения общих (невыпуклых) задач этого профиля еще не закрыты и требуют дальнейшего изучения.

В данной работе рассматривается линейно-квадратичная задача с произвольными матрицами в функционале и многомерным управлением в линейной фазовой системе с ограничением в каждый момент времени. Множество допустимых управлений составляют кусочно-постоянные вектор-функции относительно неравномерной сетки возможных точек переключения. В результате задача приобретает конечномерный характер и возникает необходимость провести приемлемую формализацию, чтобы получить в явном виде итоговую задачу квадратичного программирования с возможностью применения для ее решения соответствующих вычислительных ресурсов. Для исходной задачи с многомерным управлением наглядным и экономичным средством преобразования оказалось использование характеристических функций и блочных матриц вместе с соответствующими операциями. Возможность воздействия на функционал качества без изменения смысла оптимизации обеспечивается с помощью положительных параметров при квадратичных формах. Выбор этих параметров связан с регуляризацией функционала в плане его преобразования к выпуклой либо вогнутой структуре на уровне конечномерной модели. Условия на выбор параметров носят спектральный характер. Это неравенства относительно экстремальных собственных значений блочных матриц, формирующих целевую функцию. Соответствующие задачи выпуклой или вогнутой оптимизации допускают гарантированное решение за конечное число итераций известными подходами: методами особых точек и сопряженных градиентов, процедурами перебора угловых точек допустимого множества.

Для полученной конечномерной задачи автоматически формулируются стандартные условия минимума градиентного типа. Применительно к исходной постановке в рассматриваемом классе допустимых управлений классические условия оптимальности (принцип максимума и его следствия) не работают. Тем не менее в рамках вариационной постановки на основе известных оценок для приращения функционала получены неградиентное условие глобальной оптимальности (выпуклый случай) и процедура нелокального улучшения (вогнутая задача) в терминологии функции Понтрягина, а не ее производной.

1. Постановка задачи

Пусть переменная $t \in [t_0, T]$, r-мерная вектор-функция $u(t)$ и n-мерная вектор-функция $x(t)$ связаны системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x^0, \tag{1.1}$$

с непрерывными матричными функциями $A(t) \in \Re^{n\times n}, B(t) \in \Re^{n\times r}$.

Определим квадратичный функционал

$$\Phi(u) = 1/2\ \alpha\langle x(T), Cx(T)\rangle + 1/2 \int\limits_{t_0}^{T} \big(\beta\langle x(t), Q(t)x(t)\rangle + \gamma\langle u(t), P(t)u(t)\rangle\big)\,dt \tag{1.2}$$

с положительными параметрами α, β, γ и симметричными матрицами $C, Q(t), P(t)$ при условии непрерывности $Q(t), P(t)$.

Введем ограничение на управление

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0, T], \tag{1.3}$$

где U — выпуклый компакт из $\Re^r$.

Опишем множество допустимых управлений. Введем на рассматриваемом отрезке $[t_0, T]$ сетку узлов $\{t_0, t_1, \dots, t_{m-1}, t_m = T\}$ с условиями $t_j = t_{j-1} + h_j,\ h_j > 0,\ j = 1, 2, \dots, m$. Выделим промежутки $T_1 = [t_0, t_1],\ T_j = (t_{j-1}, t_j],\ j = 2, \dots, m$, с характеристическими функциями $\chi_j(t),\ t \in [t_0, T]$. Отметим очевидное взаимодействие: $\chi_j(t)\chi_k(t) = 0, j \neq k$. Определим массив параметров $y_{ij}, i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, m$, и введем набор r-мерных векторов $y^j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{rj})$. Сформируем блочный вектор $y = (y^1, y^2, \dots, y^m)$ размерности $m \times r$ и введем множество

$$Y = \big\{y = (y^1, y^2, \dots, y^m)\colon y^j \in U,\ j = 1, 2, \dots, m\big\}.$$

Для каждого $y \in Y$ сформируем управление

$$u(t, y) = \sum_{j=1}^{m} \chi_j(t) y^j, \quad t \in [t_0, T].$$

Это кусочно-постоянная вектор-функция на заданной сетке: $u(t, y) = y^j,\ t \in T_j$ с ограничением $u(t, y) \in U,\ t \in [t_0, T]$ (допустимое управление).

Рассмотрим задачу минимизации функционала (1.2) на множестве допустимых управлений $u(t, y),\ y \in Y$.

2. Конечномерная модель

В первую очередь найдем представление для фазовой траектории $x(t, y)$, соответствующей управлению $u(t, y),\ t \in [t_0, T]$.

Введем $(n \times r)$ матричную функцию $X_j(t), j = 1, 2, \dots, m$, как решение матричной задачи Коши

$$\dot X_j(t) = A(t)X_j(t) + B(t)\chi_j(t), \quad X_j(t_0) = O.$$

Тогда имеет место представление

$$x(t, y) = x(t, 0) + \sum_{j=1}^{m} X_j(t) y^j, \quad t \in [t_0, T], \tag{2.1}$$

где $x(t, 0)$ — решение задачи Коши (1.1) при $u = 0$.

Действительно, начальное условие очевидно выполняется: $x(t_0, y) = x^0$. Проверим фазовое уравнение:

$$\dot x(t, y) = A(t)x(t, 0) + A(t)\sum_{j=1}^{m} X_j(t) y^j + B(t)\sum_{j=1}^{m} \chi_j(t) y^j = A(t)x(t, y) + B(t)u(t, y).$$

Тем самым показана справедливость формулы (2.1).

Перейдем на уровень функционала. Найдем явное выражение (через y) для $\Phi(u)$ на процессе $\{u(t,y),\ x(t,y)\}$. После прямой подстановки и несложных преобразований получаем следующие представления:

$$\varphi_1(y) = 1/2\ \alpha\langle x(T,y), Cx(T,y)\rangle$$

$$= 1/2\ \alpha\Big[\langle x(T,0), Cx(T,0)\rangle + 2\sum_{j=1}^{m}\langle y^j, X_j(T)^T Cx(T,0)\rangle + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\langle y^j, X_j(T)^T C X_k(T) y^k\rangle\Big],$$

$$\varphi_2(y) = 1/2\ \beta\int_{t_0}^{T}\langle x(t,y), Q(t)x(t,y)\rangle dt$$

$$= 1/2\ \beta\Big[\int_{t_0}^{T}\big\langle x(t,0), Q(t)x(t,0)\big\rangle dt + 2\sum_{j=1}^{m}\Big\langle y^j, \int_{t_0}^{T} X_j(t)^T Q(t)x(t,0)dt\Big\rangle$$

$$+ \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\Big\langle y^j, \Big(\int_{t_0}^{T} X_j(t)^T Q(t) X_k(t)dt\Big)y^k\Big\rangle\Big],$$

$$\varphi_3(y) = 1/2\ \gamma\int_{t_0}^{T}\langle u(t,y), P(t)u(t,y)\rangle dt$$

$$= 1/2\ \gamma\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\Big\langle y^j, \Big(\int_{t_0}^{T} P(t)\chi_j(t)\chi_k(t)dt\Big)y^k\Big\rangle = 1/2\ \gamma\sum_{j=1}^{m}\Big\langle y^j, \Big(\int_{T_j} P(t)dt\Big)y^j\Big\rangle.$$

Для $j = 1, 2, \ldots, m,\ k = 1, 2, \ldots, m$ введем обозначения

$$c^j = X_j(T)^T Cx(T,0), \quad C_{jk} = X_j(T)^T C X_k(T),$$

$$q^j = \int_{t_0}^{T} X_j(t)^T Q(t)x(t,0)dt, \quad Q_{jk} = \int_{t_0}^{T} X_j(t)^T Q(t) X_k(t)dt,$$

$$P_j = \int_{T_j} P(t)dt.$$

Укажем размерности введенных объектов: $c^j, q^j \in \Re^r;\ C_{jk}, Q_{jk}, P_j \in \Re^{r\times r}$. В дальнейшем потребуются достаточно очевидные свойства транспонирования для используемых матриц:

$$C_{jk}^T = C_{kj}, \quad Q_{jk}^T = Q_{kj}, \quad P_j^T = P_j. \tag{2.2}$$

В результате суммирования функций $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y)$ получаем представление для функционала $\Phi(u)$ на управлении $u(t,y)$ в виде квадратичной функции

$$\varphi(y) = \Phi(0) + \sum_{j=1}^{m}\langle y^j, \alpha c^j + \beta q^j\rangle + 1/2\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\langle y^j, (\alpha C_{jk} + \beta Q_{jk})y^k\rangle + 1/2\gamma\sum_{j=1}^{m}\langle y^j, P_j y^j\rangle. \tag{2.3}$$

Проведем преобразование (упрощение) этого выражения, используя блочные конструкции для векторов и матриц вместе с соответствующими операциями скалярного произведения и умножения матрицы на вектор.

По аналогии с блочным вектором $y = (y^1, y^2, \dots, y^m)$ образуем векторы $c = (c^1, c^2, \dots, c^m)$, $q = (q^1, q^2, \dots, q^m)$ и определим блочную операцию скалярного произведения

$$(c, q) = \sum_{j=1}^{m} \langle c^j, q^j \rangle.$$

Тогда первая сумма в (2.3) выразится следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{m} \langle y^j, \alpha c^j + \beta q^j \rangle = (y, \alpha c + \beta q).$$

Перейдем к квадратичным слагаемым в формуле (2.3). Введем блочные квадратные матрицы C_b, Q_b порядка $m \times r$ с подматрицами C_{jk}, Q_{jk} порядка r:

$$C_b = [C_{jk}], \quad Q_b = [Q_{jk}], \quad j, k = 1, 2, \dots, m.$$

Отметим правило транспонирования блочных матриц: $C_b^T = [C_{kj}^T]$, $Q_b^T = [Q_{kj}^T]$. С учетом условия (2.2) получаем свойство симметричности матриц C_b, Q_b: $C_b^T = C_b$, $Q_b^T = Q_b$.

Для матрицы $C_b = [C_{jk}]$ блочный вектор $C_b y = [(C_b y)^1, (C_b y)^2, \dots, (C_b y)^m]$ содержит образующие подвекторы

$$(C_b y)^j = \sum_{k=1}^{m} C_{jk} y^k, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

При этом формируется блочная квадратичная форма с матрицей C_b

$$(y, C_b y) = \sum_{j=1}^{m} \langle y^j, (C_b y)^j \rangle = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \langle y^j, C_{jk} y^k \rangle.$$

Аналогичным образом

$$(y, Q_b y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \langle y^j, Q_{jk} y^k \rangle.$$

В результате двойная сумма в выражении (2.3) представляется как квадратичная форма $(y, [\alpha C_b + \beta Q_b] y)$.

Преобразуем последнее слагаемое в (2.3). Сформируем блочно-диагональную матрицу P_b с образующими подматрицами P_j, $j = 1, 2, \dots, m$, по главной диагонали. Это симметричная матрица порядка $m \times r$: $P_b^T = [P_j^T] = [P_j] = P_b$.

Соответствующая квадратичная форма имеет вид

$$(y, P_b y) = \sum_{j=1}^{m} \langle y^j, P_j y^j \rangle.$$

Теперь можно представить заключительное выражение для функционала $\Phi(u)$ на управлении $u(t, y)$ в виде квадратичной функции от y:

$$\varphi(y) = \Phi(0) + (y, \alpha c + \beta q) + 1/2(y, [\alpha C_b + \beta Q_b + \gamma P_b] y).$$

Соответствующая задача оптимизации формулируется следующим образом:

$$\varphi(y) \to \min, \quad y \in Y. \tag{2.4}$$

Установим связь между матрицами $C, Q(t), P(t)$ в исходной задаче минимизации функционала $\Phi(u)$ и блочными матрицами C_b, Q_b, P_b в задаче (2.4) в плане свойств знакоопределенности.

Введем обозначение

$$\overline{x}(t,y)=\sum_{j=1}^{m}X_j(t)y^j,\quad t\in[t_0,T].$$

Тогда в соответствии с определениями получаем следующий набор соотношений для $y\neq 0$:

$$\langle\overline{x}(T,y),C\overline{x}(T,y)\rangle=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\langle y^j,C_{jk}y^k\rangle=(y,C_by),$$

$$\int_{t_0}^{T}\langle\overline{x}(t,y),Q(t)\overline{x}(t,y)\rangle dt=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\langle y^j,Q_{jk}y^k\rangle=(y,Q_by),$$

$$\int_{t_0}^{T}\langle u(t,y),P(t)u(t,y)\rangle dt=\sum_{j=1}^{m}\langle y^j,P_jy^j\rangle=(y,P_by).$$

В результате приходим к заключению о сохранении свойств знакоопределенности при переходе к блочным матрицам: если матрицы $C,Q(t),P(t)$ являются неотрицательно (неположительно) определенными, то соответствующие матрицы C_b,Q_b,P_b также будут неотрицательно (неположительно) определенными.

3. Варианты численного решения

Проведем обсуждение задачи (2.4) в плане возможностей ее эффективного численного решения.

Целевая функция $\varphi(y)$ зависит от параметров α,β,γ. Найдем условия на эти параметры, которые обеспечивают свойства выпуклости или вогнутости функции $\varphi(y)$. Реализуем эти условия в форме экстремальных собственных значений $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ соответствующих блочных матриц.

Свойство выпуклости функции $\varphi(y)$ эквивалентно спектральному неравенству

$$\lambda_{\min}(\alpha C_b+\beta Q_b+\gamma P_b)\geq 0. \tag{3.1}$$

На основании теоремы Вейля [10, с. 218] справедлива оценка снизу

$$\lambda_{\min}(\alpha C_b+\beta Q_b+\gamma P_b)\geq\alpha\lambda_{\min}(C_b)+\beta\lambda_{\min}(Q_b)+\gamma\lambda_{\min}(P_b)=S_1(\alpha,\beta,\gamma).$$

Отсюда получаем спектральное условие на параметры

$$S_1(\alpha,\beta,\gamma)\geq 0, \tag{3.2}$$

которое гарантирует свойство выпуклости функции $\varphi(y)$. В частности, это свойство обеспечивается специальным выбором параметров, если хотя бы одна из матриц C_b,Q_b,P_b положительно определена.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Спектральное неравенство* (3.1) *является необходимым и достаточным условием выпуклости функции* $\varphi(y)$*, линейное неравенство* (3.2) *есть достаточное условие выпуклости этой функции.*

Следует отметить, что в плане реализации линейное условие (3.2) имеет безусловный приоритет, поскольку в явном виде выделяет подходящее множество параметров (α, β, γ). Тем не менее неявное по параметрам соотношение (3.1) полностью описывает это множество, поскольку оно эквивалентно условию выпуклости.

Аналогичным образом реализуется свойство вогнутости функции $\varphi(y)$, которое эквивалентно спектральному неравенству

$$\lambda_{\max}(\alpha C_b + \beta Q_b + \gamma P_b) \le 0. \tag{3.3}$$

Согласно той же теореме Вейля имеет место оценка сверху

$$\lambda_{\max}(\alpha C_b + \beta Q_b + \gamma P_b) \le \alpha\lambda_{\max}(C_b) + \beta\lambda_{\max}(Q_b) + \gamma\lambda_{\max}(P_b) = S_2(\alpha, \beta, \gamma).$$

Отсюда получаем условие на параметры

$$S_2(\alpha, \beta, \gamma) \le 0, \tag{3.4}$$

которое гарантирует свойство вогнутости функции $\varphi(y)$.

Сформулируем соответствующее утверждение.

Теорема 2. *Неравенство* (3.3) *является критерием вогнутости функции* $\varphi(y)$*, линейное неравенство* (3.4) *есть достаточное условие вогнутости этой функции.*

Проанализируем задачу (2.4) с ориентацией на ее численное решение за конечное число итераций. Конкретизируем множество U, описывающее ограничения на управление (1.3), следующим стандартным образом (двусторонние ограничения):

$$U = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_r) \colon u_i \in [u_i^-, u_i^+],\ i = 1, 2, \dots, r\}.$$

Отсюда получаем соответствующее описание допустимого множества в (2.4):

$$Y = \Big\{y = (y^1, \dots, y^m) \colon y^j = (y_{1j}, \dots, y_{rj}),\ y_{ij} \in [u_i^-, u_i^+],\ i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, m\Big\}. \tag{3.5}$$

Рассмотрим задачу (2.4) с набором параметров (α, β, γ), удовлетворяющих условию (3.2). Это выпуклая задача квадратичного программирования с простейшими ограничениями, которая решается за конечное число итераций методом особых точек [11, гл. 7, § 7.3] или методом сопряженных градиентов [12; 13, п. 7.3.4].

Второй вариант задачи (2.4), (3.5) связан с набором параметров (α, β, γ), удовлетворяющих условию (3.4). В этом случае имеем задачу на минимум вогнутой функции $\varphi(y)$ с двухсторонними ограничениями на переменные $y_{ij} \in [u_i^-, u_i^+]$. Глобальное решение этой задачи сводится к перебору угловых точек допустимого множества (варианты $y_{ij} = u_i^-$ или $y_{ij} = u_i^+$) с возможностью гарантированного убывания целевой функции в процессе перебора (метод условного градиента, процедуры улучшения экстремальных точек [14]).

З а м е ч а н и е. Отыскание экстремальных собственных значений $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ соответствующих матриц можно проводить на основе степенного метода с нормировкой [15, с. 76].

4. Условия оптимальности

В рамках квадратичной задачи (2.4) с выпуклым компактным множеством Y необходимые и достаточные условия минимума связаны с градиентом целевой функции $\nabla\varphi(y)$, который содержит блоки

$$\nabla_j\varphi(y) = \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y^j} = \alpha c^j + \beta q^j + \sum_{k=1}^{m}(\alpha C_{jk} + \beta Q_{jk})y^k + \gamma P_j y^j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Соответствующие критерии глобальной оптимальности для задачи (2.4) относительно точки $\overline{y} \in Y$ выглядят следующим образом:

1) если $\varphi(y)$ — выпуклая функция, то

$$(\nabla\varphi(\overline{y}), z - \overline{y}) \geq 0, \quad z \in Y;$$

2) если $\varphi(y)$ — вогнутая функция, то [8, теорема 2.6.1]

$$(\nabla\varphi(y), z - y) \geq 0, \quad z \in Y, \quad \varphi(y) = \varphi(\overline{y}).$$

Сформулируем некоторые условия оптимальности применительно к исходной задаче (1.1)–(1.3) с выпуклым компактом U, используя результаты теории оптимального управления.

Введем в рассмотрение функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, A(t)x + B(t)u \rangle - 1/2\beta\langle x, Q(t)x \rangle - 1/2\gamma\langle u, P(t)u \rangle$$

и сопряженную задачу

$$\dot{\psi} = -A(t)^T\psi + \beta Q(t)x, \ \psi(T) = -\alpha Cx(T).$$

Для управления $u(t,y)$ определим соответствующие решения $x(t,y), \ \psi(t,y)$ фазовой и сопряженной задач, а также производную

$$H_u[t,y] = B(t)^T\psi(t,y) - \gamma P(t)u(t,y).$$

Для пары управлений $u(t,y), \ u(t,z)$ обозначим частное приращение функции Понтрягина и приращение целевого функционала:

$$\triangle_z H[t,y] = H(\psi(t,y), x(t,y), u(t,z), t) - H(\psi(t,y), x(t,y), u(t,y), t),$$

$$\triangle_z \Phi(u) = \Phi(u(t,z)) - \Phi(u(t,y)) = \varphi(z) - \varphi(y).$$

На основании классической формулы приращения функционала

$$\triangle_z \Phi(u) = -\int_{t_0}^{T} \big\langle H_u[t,y], u(t,z) - u(t,y) \big\rangle dt + o(\|u(t,z) - u(t,y)\|)$$

с учетом выражений для $u(t,y), \ u(t,z)$ имеем

$$\triangle_z \Phi(u) = -\sum_{j=1}^{m} \Big\langle \int_{T_j} H_u[t,y]dt, z^j - y^j \Big\rangle + o(\|z - y\|). \tag{4.1}$$

Отсюда получаем альтернативную формулу для градиента целевой функции в задаче (2.4)

$$\nabla_j\varphi(y) = -\int_{T_j} H_u[t,y]dt, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Перейдем к условиям оптимальности управления $u(t,y)$ в задаче (1.1)–(1.3).

На основании формулы (4.1) выводим необходимое условие градиентного типа (дискретный аналог дифференциального принципа максимума)

$$\Big\langle \int_{T_j} H_u[t,y]dt, z^j - y^j \Big\rangle \leq 0, \quad z^j \in U, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

или в экстремальной форме

$$y^j = arg\max_{v\in U}\left\langle \int\limits_{T_j} H_u[t,y]dt, v\right\rangle, \quad j=1,2,\dots,m.$$

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.3) с выпуклым по фазовым переменным функционалом $\Phi(u)$: матрица C неотрицательно определена, матрица $Q(t)$ неотрицательно определена для всех $t\in[t_0,T]$.

В этом случае справедлива следующая оценка снизу для приращения функционала [3, с. 77]:

$$\triangle_z\Phi(u) \geq -\int\limits_{t_0}^{T}\triangle_z H[t,y]dt = -\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{T_j}\Big[H(\psi(t,y),x(t,y),z^j,t) - H(\psi(t,y),x(t,y),y^j,t)\Big]dt.$$

Отсюда получаем достаточное условие оптимальности управления $u(t,y)$ в задаче (1.1)–(1.3) (интегральный принцип максимума):

$$\int\limits_{T_j} H(\psi(t,y),x(t,y),z^j,t)dt \leq \int\limits_{T_j} H(\psi(t,y),x(t,y),y^j,t)dt, \quad z^j\in U, \quad j=1,2,\dots,m.$$

Экстремальная форма этого неравенства представляется в виде

$$y^j = arg\max_{v\in U}\int\limits_{T_j} H(\psi(t,y),x(t,y),v,t)dt, \quad j=1,2,\dots,m,$$

и может служить основой для итерационного процесса.

Рассмотрим симметричную ситуацию, когда в функционале $\Phi(u)$ выполняются условия вогнутости: матрица C неположительно определена, матрица $Q(t)$ неположительно определена для всех $t\in[t_0,T]$.

В данном варианте имеет место оценка сверху

$$\triangle_z\Phi(u) \leq -\int\limits_{t_0}^{T}\triangle_z H[t,y]dt = -\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{T_j}\Big[H(\psi(t,y),x(t,y),z^j,t) - H(\psi(t,y),x(t,y),y^j,t)\Big]dt.$$

Эта оценка приводит к достаточному условию улучшения по функционалу Φ на паре управлений $u(t,y)$, $u(t,z)$. Если

$$\int\limits_{T_j}\triangle_z H[t,y]dt \geq 0, \quad z\in Y; \quad j=1,2,\dots,m, \tag{4.2}$$

то $\triangle_z\Phi(u)\leq 0$.

В результате получаем процедуру нелокального улучшения управления $u(t,y)$. Выбор z из условий максимума

$$z^j = arg\max_{v\in U}\int\limits_{T_j} H(\psi(t,y),x(t,y),v,t)dt, \quad j=1,2,\dots,m,$$

обеспечивает выполнение неравенства (4.2) и, следовательно, улучшение по функционалу

$$\Phi(u(t,z)) \leq \Phi(u(t,y)).$$

Заключение

В изложенной выше постановке задачи параметры в функционале можно интерпретировать как весовые коэффициенты в рамках стандартной структуры критерия качества управления. Целевой выбор этих коэффициентов является вполне логичным с точки зрения адаптации исходной модели к возможностям современных вычислительных методов в задачах данного класса. Использование кусочно-постоянных управлений отвечает той же установке и позволяет реализовать этот подход на конечномерном уровне.

Предлагаемая процедура параметрической регуляризации (в части овыпуклении) представляется вполне целесообразной для функционалов с выпуклым фрагментом, когда по крайней мере одна из матриц $C, Q(t), P(t)$ является положительно определенной. Такая ситуация имеет место, например, в задачах квадратичной d.-с. оптимизации [8, гл. 6] и возникает в процессе решения задач динамической реконструкции на основе вариационного подхода с выпукло-вогнутой невязкой [16].

В качестве дальнейших направлений исследований для обобщения предлагаемого подхода можно указать следующие:

— задачи при наличии дополнительных фазовых ограничений;

— задачи оптимального управления линейными гиперболическими уравнениями с граничными управлениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Rao A.V.** A survey of numerical methods for optimal control // Adv. Astron. Sci. 2009. Vol. 135. P. 1–32.
2. **Golfetto W.A., da Silva Fernandes S.** A review of gradient algorithms for numerical computation of optimal trajectories // J. Aerosp. Technol. Manag. 2012. Vol. 4. P. 131–143. doi: 10.5028/JATM.2012.04020512 .
3. **Срочко В.А.** Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000. 160 с.
4. **Габасов Р., Кириллова Ф.М., Павленок Н.С.** Построение программного и позиционного решений линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 10. С. 1748–1779. doi: 10.1134/S0965542508100023 .
5. **Костюкова О.И, Федорцова Н.М.** Исследование свойств решений линейно-квадратичных параметрических задач оптимального управления // Информационно-управляющие системы. 2012. № 4. С. 43–51.
6. **Grad J.R, Morris K.A.** Solving the linear quadratic optimal control problem for infinite-dimensional systems // Computers Math. Applic. 1996. Vol. 32, no. 9. P. 99–119. doi: 10.1016/0898-1221(96)00180-0 .
7. **Аргучинцев А.В., Срочко В.А.** Процедура регуляризации билинейных задач оптимального управления на основе конечномерной модели // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2022. Т. 18, Вып. 1. С. 180–188. doi: 10.21638/11701/spbu10.2022.115 .
8. **Стрекаловский А.С.** Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003. 356 с.
9. **Strekalovsky A.S.** On global maximum of a convex terminal functional in optimal control problems // J. Glob. Optim. 1995. Vol. 7. P. 75–91. doi: 10.1007/BF01100206.
10. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
11. **Измаилов А.Ф., Солодов М.В.** Численные методы оптимизации. М.: Физматлит, 2005. 304 с.
12. **Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.** Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975. 319 с.
13. **Коннов И.В.** Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства. Казань: Казан. ун-т, 2013. 508 с.
14. **Срочко В.А., Аксенюшкина Е.В., Антоник В.Г.** Решение линейно-квадратичной задачи оптимального управления на основе конечномерных моделей // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2021. Т. 37. С. 3–16. doi:10.26516/1997-7670.2021.37.3 .
15. **Парлетт Б.** Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983. 384 с.

16. **Субботина Н.Н., Крупенников Е.А.** Слабые со звездой аппроксимации решения задачи динамической реконструкции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 2. С. 208–220. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-208-220 .

Поступила 30.05.2022
После доработки 5.07.2022
Принята к публикации 11.07.2022

Аргучинцев Александр Валерьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Иркутский государственный университет
г. Иркутск
e-mail: arguch@math.isu.ru

Срочко Владимир Андреевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор
Иркутский государственный университет
г. Иркутск
e-mail: srochko@math.isu.ru

REFERENCES

1. Rao A.V. A survey of numerical methods for optimal control. *Adv. Astron. Sci.*, 2009, vol. 135, art. no. AAS 09-334, 32 p.
2. Golfetto W.A., da Silva Fernandes S. A review of gradient algorithms for numerical computation of optimal trajectories. *J. Aerosp. Technol. Manag.*, 2012, vol. 4, pp. 131–143. doi: 10.5028/JATM.2012.04020512 .
3. Srochko V.A. *Iteratsionnye metody resheniya zadach optimal'nogo upravleniya* [Iterative methods for solving optimal control problems]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2000, 160 p. ISBN: 5-92210086-6 .
4. Gabasov R., Kirillova F.M., Pavlenok N.S. Constructing open-loop and closed-loop solutions of linear-quadratic optimal control problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no. 10, pp. 1715–1745. doi: 10.1134/S0965542508100023 .
5. Kostyukova O.I., Fedartsova N.M. Investigation of solution properties of linear-quadratic parametric optimal control problem. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy*, 2012, vol. 4, pp. 43–51 (in Russian).
6. Grad J.R., Morris K.A. Solving the linear quadratic optimal control problem for infinite-dimensional systems. *Comput. Math. with Appl.*, 1996, vol. 32, no. 9, pp. 99–119. doi: 10.1016/0898-1221(96)00180-0 .
7. Arguchintsev A.V., Srochko V.A. Procedure for regularization of bilinear optimal control problems based on a finite-dimensional model. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, no. 1, pp. 180–188 (in Russian). doi: 10.21638/11701/spbu10.2022.115 .
8. Strekalovsky A.S. *Elementy nevypukloi optimizatsii* [Elements of nonconvex optimization]. Novosibirsk: Nauka Publ., 2003, 356 p. ISBN: 5-02-032064-1 .
9. Strekalovsky A.S. On global maximum of a convex terminal functional in optimal control problems. *J. Glob. Optim*, 1995, vol. 7, no. 1, pp. 75–91. doi: 10.1007/BF01100206 .
10. Horn R.A., Johnson C.R. *Matrix analysis.* Cambridge: Cambridge University Press, 1985, 561 p. doi: 10.1017/CBO9780511810817 . Translated to Russian under the title *Matrichnyi analiz.* Moscow: Mir Publ., 1989, 561 p.
11. Izmailov A.F., Solodov M.V. *Chislennye metody optimizatsii* [Numerical methods of optimization]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2005, 304 p. ISBN: 5-9221-0045-9 .
12. Pshenichny B.N., Danilin Yu.M. *Numerical methods in extremal problems.* Moscow: Mir Publ., 1978, 276 p. ISBN: 9781399867313 . Original Russian text published in Pshenichnyi B.N., Danilin Yu.M. *Chislennye metody v ekstremal'nykh zadachakh*, Moscow: Nauka Publ., 1975, 319 p.
13. Konnov I.V. *Nelineinaya optimizatsiya i variatsionnye neravenstva.* [Nonlinear optimization and variational inequalities]. Kazan': Kazan. Univ, 2013, 508 p. ISBN: 978-5-00019-059-3 .

14. Srochko V.A., Aksenyushkina E.V., Antonik V.G. Resolution of a linear-quadratic optimal control problem based on finite-dimensional models. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2021, vol. 37, pp. 3–16 (in Russian). doi: 10.26516/1997-7670.2021.37.3 .
15. Parlett B.N. *The symmetric eigenvalue problem.* Philadelphia: SIAM, 1980, 422 p. ISBN: 9780898714029 . Translated to Russian under the title *Simmetrichnaya problema sobstvennykh znachenii: Chislennye metody.* Moscow: Mir Publ., 1983, 384 p.
16. Subbotina N. N., Krupennikov E. A. Weak* approximations for the solution of a dynamic reconstruction problem. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, vol. 27, no. 2, pp. 208–220 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-208-220 .

Received May 30, 2022
Revised July, 5 2022
Accepted July 11, 2022

Funding Agency: This work was supported by the Vladimir Potanin Foundation (grant no. GSAD-0022/212).

Alexander Valeryevich Arguchintsev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Irkutsk State University, Irkutsk, 664003 Russia, e-mail: arguch@math.isu.ru .

Vladimir Andreevich Srochko, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Irkutsk State University, Irkutsk, 664003 Russia, e-mail: srochko@math.isu.ru .

Cite this article as: A. V. Arguchintsev, V. A. Srochko. Solution of a linear–quadratic problem on a set of piecewise constant controls with parametrization of the functional. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 5–16.