

УДК 517.977

**ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА
НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ****Б. М. Арыстанбеков, Н. Б. Мельников**

Предложен проекционный метод для задач экономического роста на бесконечном интервале. В качестве базисных функций для параметризации решения используются ортогональные полиномы Лагерра, умноженные на экспоненту. Проведен численный анализ сходимости метода для интегрируемых случаев в модели Рамсея. Показано, что наилучшая сходимость метода достигается, если выбрать значение параметра в показателе экспоненты равным отрицательному собственному значению в матрице линеаризации гамильтоновой системы в неподвижной точке на бесконечности. В рассмотренных примерах проекционный метод приводит к системе уравнений с небольшим числом неизвестных в отличие от методов, использующих конечно-разностную аппроксимацию.

Ключевые слова: метод Галеркина, квадратура Гаусса — Лагерра, задача управления с бесконечным горизонтом, условия трансверсальности, модель Рамсея, функция полезности CRRA, замена Бернулли.

B. M. Arystanbekov, N. B. Melnikov. Projection method for economic growth problems on an infinite time interval.

A projection method is proposed for economic growth problems on an infinite interval. The orthogonal Laguerre polynomials multiplied by an exponential are used as the basis functions for the parametrization of the solution. Convergence of the method has been studied numerically for integrable cases in the Ramsey model. It is shown that the best convergence of the method is achieved if the parameter in the exponent is chosen to be equal to the negative eigenvalue of the linearization matrix of the Hamiltonian system at the equilibrium at infinity. In the considered examples, the projection method leads to a system of equations with a small number of unknowns, in contrast to the methods using finite difference approximation.

Keywords: Galerkin method, Gauss–Laguerre quadrature, infinite-horizon control problem, transversality conditions, Ramsey model, CRRA utility function, Bernoulli transformation.

MSC: 65K10, 37N40, 93C95

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-17-29

Введение

Вычисление равновесия в модели экономического роста сводится к решению краевой задачи, которая получается из условий оптимальности. Большинство численных методов, используемых для решения таких краевых задач, основаны на конечно-разностных аппроксимациях по времени. Альтернативный подход к решению краевых задач состоит в использовании проекционных (спектральных) методов (см., например, [1; 2]). Проекционный метод, описанный в работе [3], использует аппроксимацию решения на конечном отрезке (обзор приложений проекционных методов на конечном отрезке для динамических моделей экономики см., например, в работе [4]). Однако применение метода [3] для моделей экономического роста на бесконечном интервале времени возможно не всегда. Метод, предложенный в работе [5], является обобщением [3] для задач на бесконечном интервале. Оба метода [3; 5] сформулированы для задач с дискретным временем.

В настоящей работе предложен проекционный метод для задач экономического роста на бесконечном интервале с *непрерывным* временем. Краевым условием на бесконечности является предельное соотношение (условие трансверсальности). В качестве базисных функций используются ортогональные полиномы Лагерра, умноженные на экспоненту, а проекции невязки вычисляются с помощью соответствующего скалярного произведения. Свободный параметр в показателе экспоненты выбирается равным отрицательному собственному значению в

матрице линеаризации гамильтоновой системы в неподвижной точке на бесконечности (предполагаем, что оптимальная траектория стремится к неподвижной точке).

В предложенном нами методе есть ряд отличий по сравнению с дискретным аналогом [5], касающихся выбора базисных функций и скалярного произведения. Еще одно отличие от работы [5] состоит в подробном описании выбора показателя экспоненты с помощью линеаризации системы на бесконечности. Чтобы изложение метода не было слишком громоздким, мы ограничиваемся моделью экономического роста Рамсея (см., например, [6–8]). Для иллюстрации метода и анализа сходимости мы используем интегрируемые случаи в модели Рамсея [9]¹. В качестве входных параметров берутся значения, широко используемые в приложениях [7; 10–12]. Проекционный метод на бесконечном интервале мы сравниваем с методом разностной аппроксимации по времени, методом стрельбы и методом динамического программирования.

Работа построена следующим образом. В разд. 1 дается общее описание проекционного метода. Раздел 2 посвящен описанию модели Рамсея. Выписаны условия оптимальности и линеаризация гамильтоновой системы на бесконечности. В разд. 3 обсуждается выбор базисных функций для задачи на бесконечном интервале. В разд. 4 изложены интегрируемые случаи в модели Рамсея. В разд. 5 приведены значения входных параметров модели и метода и получены численные результаты. Исследована зависимость численных результатов от числа базисных функций и показателя экспоненты. В разд. 6 мы сравниваем предложенный проекционный метод с другими методами. В заключении сформулированы основные выводы и задачи для дальнейшего исследования.

1. Проекционный метод

Рассматриваем функциональное уравнение

$$\mathcal{N}(f) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ — неизвестная функция, определенная на отрезке I ; $\mathcal{N}: B_1 \rightarrow B_2$ — нелинейный оператор, действующий из пространства B_1 в пространство B_2 со скалярным произведением

$$(f_1(x), f_2(x)) = \int_I f_1(x)f_2(x)w(x)dx,$$

где $f_1, f_2 \in B_2$ и $w(x) \geq 0$ — весовая функция. В интересующей нас задаче оптимального управления \mathcal{N} является дифференциальным оператором. Обобщение на случай системы функциональных уравнений приведено в [13]. Функционал $\mathcal{N}(f)$ определен в пространстве B_1 , как правило, имеющем бесконечную размерность. Проекционный метод сводит решение функционального уравнения к конечномерной задаче.

Пусть $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ — базисная система функций в пространстве B_1 . Аппроксимируем функцию $f(x)$ конечными линейными комбинациями элементов данной системы. Для выбранной степени аппроксимации n определяем приближение $\hat{f}(x)$ по формуле

$$\hat{f}(x, \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x), \quad (1.2)$$

где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ — набор коэффициентов.

Равенство (1.1) эквивалентно тому, что элемент $\mathcal{N}(f)$ ортогонален некоторой базисной системе $\{p_j(x)\}_{j=1}^\infty$ из пространства B_2 . Вводим функцию невязки подстановкой формулы (1.2) в уравнение (1.1):

$$R(x, \mathbf{a}) \equiv \mathcal{N}(\hat{f}(x, \mathbf{a})).$$

¹В работе [5] для анализа сходимости вместо точного решения использовались результаты проекционного метода на конечном отрезке [3].

В силу того, что мы рассматриваем конечномерную аппроксимацию (1.2), для решения уравнения $R(x, \mathbf{a}) = 0$ требуется конечное число соотношений ортогональности. А именно, для вычисления n -мерного вектора \mathbf{a} необходимо ровно n соотношений

$$P_j(\mathbf{a}) \equiv (R(x, \mathbf{a}), p_j(x)) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Решая нелинейную систему уравнений (1.3), находим приближение (1.2).

Существуют различные варианты выбора *проекционных направлений* $p_j(x)$, $j = 1, \dots, n$ [1; 2]. В методе Галеркина полагается, что проекционные и базисные функции совпадают: $p_j(x) = \varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n$. Тогда система уравнений (1.3) выглядит следующим образом:

$$P_j(\mathbf{a}) \equiv (R(x, \mathbf{a}), \varphi_j(x)) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

или с использованием введенного скалярного произведения,

$$P_j(\mathbf{a}) = \int_I R(x, \mathbf{a}) \varphi_j(x) w(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

При удачном выборе базисных функций система нелинейных уравнений (1.3) имеет небольшую размерность, поэтому можем использовать метод Ньютона. Пусть выбрано некоторое начальное приближение \mathbf{a}^0 . Тогда следующее приближение вычисляем по формуле

$$\mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{a}^k - W^{-1}(\mathbf{a}^k) \mathbf{P}(\mathbf{a}^k), \quad (1.5)$$

где $\mathbf{P}(\mathbf{a})$ — невязка системы (1.3), а $W(\mathbf{a})$ — якобиан системы, который вычисляется с помощью конечно-разностной аппроксимации. В качестве условия останова итераций (1.5) используем соотношение

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{a}^k)\| \leq \tau_r \|\mathbf{P}(\mathbf{a}^0)\| + \tau_a,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора, τ_a и τ_r — абсолютная и относительная ошибки соответственно (подробнее см. [14]).

Если функции $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ близки к линейной зависимости, мы можем получить плохо обусловленную матрицу $W(\mathbf{a})$, что, в свою очередь, может приводить к значительным ошибкам вычисления обратной матрицы $W^{-1}(\mathbf{a})$ в формуле (1.5). Эта проблема устраняется, если используется ортогональный базис: число обусловленности ортогональной матрицы равно единице. На конечном отрезке I можно использовать систему ортогональных полиномов Чебышева (см. [1; 2]). На бесконечном интервале выбор базисных функций определяется поведением решения на бесконечности.

2. Задача экономического роста

Рассматриваем задачу экономического роста, отвечающую модели Рамсея (см., например, [6; 7]):

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c) dt \rightarrow \max_{k(t), c(t)}, \quad (2.1)$$

$$\dot{k} = f(k) - \delta k - c, \quad (2.2)$$

$$k(0) = k_0 > 0. \quad (2.3)$$

Здесь $u(c)$ — функция полезности, являющаяся возрастающей и выпуклой функцией потребления c , т.е. $u'(c) > 0$ и $u''(c) < 0$. Считаем также, что функция полезности удовлетворяет условиям Инады, а именно $\lim_{c \rightarrow 0} u'(c) = \infty$ и $\lim_{c \rightarrow \infty} u'(c) = 0$. Производственная функция $f(k)$ — строго выпуклая функция капитала k , удовлетворяющая условию $f(0) = 0$.

Так же как и функция полезности, производственная функция подчиняется условиям Инады, т. е. $\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$. Параметр $\rho \geq 0$ — коэффициент межвременного предпочтения, $\delta \in [0, 1]$ — темп устаревания капитала.

Для нахождения условий оптимальности решения задачи (2.1)–(2.3) используем принцип максимума [15]. Для этого записываем функцию

$$H(c, k, \psi) = e^{-\rho t} u(c(t)) + \psi(t) [f(k(t)) - \delta k(t) - c(t)],$$

где $\psi(t)$ — сопряженная функция. Условия оптимальности первого порядка имеют вид

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0, \quad (2.4)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial k}, \quad (2.5)$$

и при сделанных выше предположениях относительно $u(c)$ и $f(k)$ выполняется условие трансверсальности (см., например, [6; 8])

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) k(t) = 0. \quad (2.6)$$

Из уравнений (2.4) и (2.5) следуют соотношения

$$\psi(t) = e^{-\rho t} u'(c), \quad (2.7)$$

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t) (f'(k) - \delta) \quad (2.8)$$

соответственно. Подстановкой формулы (2.7) в уравнение (2.8) получаем уравнение Эйлера

$$\frac{\dot{c}}{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)c} (f'(k) - \delta - \rho). \quad (2.9)$$

Из уравнения Эйлера (2.9) и уравнения динамики капитала (2.2) составляем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{k} = f(k) - \delta k - c, \\ \frac{\dot{c}}{c} = \sigma (f'(k) - \delta - \rho). \end{cases} \quad (2.10)$$

Здесь

$$\sigma = -\frac{u'(c)}{u''(c)c} \quad (2.11)$$

— обратная величина эластичности замещения [7], которая в экономической теории в основном рассматривается как положительная константа. В частности, σ действительно постоянна для функции полезности CRRA, которая будет рассмотрена ниже в связи с интегрируемыми случаями в модели Рамсея.

При сделанных выше предположениях относительно $u(c)$ и $f(k)$ существует и единственно решение системы (2.10), удовлетворяющее начальному условию

$$k(0) = k_0 > 0$$

и условию трансверсальности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} u'(c(t)) k(t) = 0, \quad (2.12)$$

которое получается подстановкой формулы (2.7) в соотношение (2.6).

Система (2.10) имеет неподвижную точку (k_{ss}, c_{ss}) , которая определяется из уравнений

$$\begin{cases} f'(k_{ss}) = \delta + \rho, \\ c_{ss} = f(k_{ss}) - \delta k_{ss}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Матрица линеаризации системы (2.10) в точке (k_{ss}, c_{ss}) имеет вид

$$J(k_{ss}, c_{ss}) = \begin{bmatrix} \rho & -1 \\ \sigma f''(k_{ss})c_{ss} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Если $\sigma > 0$, определитель этой матрицы отрицателен: $\det(J) = \sigma f''(k_{ss})c_{ss} < 0$, поскольку $c_{ss} > 0$. В этом случае собственные значения матрицы J вещественны и имеют разные знаки, поэтому (k_{ss}, c_{ss}) — седловая точка. Оптимальная траектория отвечает устойчивому решению системы (2.10), приходящему в неподвижную точку (k_{ss}, c_{ss}) .

3. Параметризация решения на бесконечном интервале

Явный вид функционального уравнения (1.1) для модели Рамсея получается сведением системы дифференциальных уравнений (2.10) к одному уравнению относительно функции $k(t)$:

$$\mathcal{N}(k) \equiv f'(k)\dot{k} - \delta\dot{k} - \ddot{k} + \frac{u'(f(k) - \delta k - \dot{k})}{u''(f(k) - \delta k - \dot{k})} (f'(k) - \delta - \rho) = 0.$$

Параметризация решения должна быть такой, чтобы функция $k(t)$ достигала стационарной точки k_{ss} при $t \rightarrow \infty$. Поэтому вместо разложения (1.2) запишем

$$\hat{k}(t, \mathbf{a}) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(t) e^{-\lambda t} + k_{ss}(1 - e^{-\lambda t}). \quad (3.1)$$

Полагаем $\varphi_i(t) = L_i(\lambda t)$, где $L_i(t)$ — полиномы Лагерра, которые определяются рекуррентной формулой (см., например, [16])

$$L_{j+1}(t) = \left(\frac{2j+1-t}{j+1} \right) L_j(t) - \frac{j}{j+1} L_{j-1}(t)$$

при $L_0(t) = 1$ и $L_1(t) = 1 - t$. Полиномы Лагерра взаимно ортогональны на положительной полуоси с весовой функцией e^{-t} . Следовательно, функции $\varphi_i(t)$ ортогональны с весовой функцией $e^{-\lambda t}$:

$$(\varphi_i(t), \varphi_j(t)) = \int_0^{\infty} \varphi_i(t) \varphi_j(t) e^{-\lambda t} dt = 0, \quad i \neq j.$$

Параметр λ отвечает за скорость убывания $k(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому наиболее естественным кандидатом на роль λ в формуле (3.1) является собственное значение, отвечающее переменной k в линеаризации системы на бесконечности (2.14). Учитывая начальное условие $k(0) = k_0$ в формуле (3.1), получаем значение нулевого коэффициента

$$a_0 = \varphi_0(0)^{-1} \left(k_0 - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(0) \right).$$

Тогда итоговая аппроксимация примет следующий вид:

$$\hat{k}(t, \mathbf{a}) = \varphi_0(0)^{-1} \left(k_0 - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(0) \right) \varphi_0(t) e^{-\lambda t} + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(t) e^{-\lambda t} + k_{ss}(1 - e^{-\lambda t}), \quad (3.2)$$

где неизвестными являются n коэффициентов a_i .

Далее определяем функцию невязки $R(t, \mathbf{a}) \equiv \mathcal{N}(\hat{k})$ и применяем метод Галеркина. В результате у нас возникает система нелинейных уравнений вида

$$P_j(\mathbf{a}) \equiv \int_0^{\infty} R(t; \mathbf{a}) L_j(\lambda t) e^{-\lambda t} dt = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

которую решаем методом Ньютона.

Численная аппроксимация интеграла, участвующего в уравнениях системы (3.3), выполняется с помощью квадратурной формулы Гаусса — Лагерра (сравнение с другими методами см. в [5]):

$$\int_0^{\infty} e^{-t} f(t) dt \approx \sum_{i=1}^N w_i f(s_i).$$

Здесь N — степень аппроксимации интеграла, s_i — i -й корень полинома Лагерра $L_N(s)$, а коэффициент w_i определяется по формуле (см. [16])

$$w_i = \frac{s_i}{(N+1)^2 L_{N+1}^2(s_i)}.$$

Для применения данной квадратурной формулы в аппроксимации интеграла (3.3) делаем замену переменных $s = \lambda t$. Тогда формула (3.3) принимает вид

$$P_j(\mathbf{a}) = \lambda^{-1} \int_0^{\infty} R\left(\frac{s}{\lambda}, \mathbf{a}\right) L_j(s) e^{-s} ds,$$

а приближение интеграла вычисляется по формуле

$$P_j(\mathbf{a}) \approx \lambda^{-1} \sum_{i=1}^N w_i R\left(\frac{s_i}{\lambda}, \mathbf{a}\right) L_j(s_i).$$

Для иллюстрации и анализа сходимости проекционного метода мы рассматриваем интегрируемые случаи в модели (2.1)–(2.3).

4. Интегрируемые случаи в модели Рамсея

В работе [17] было получено аналитическое решение для дискретной модели экономического роста с логарифмической функцией полезности и производственной функцией Кобба — Дугласа при полном устаревании капитала, $\delta = 1$ (см. также [18]). Однако, как было показано в работе [19], аналитическое решение здесь удастся получить лишь для *дискретного* времени (приложение проекционного метода [5] для этого случая изложено в работе [20]).

В работе [9] аналитическое решение получено для двух случаев задачи Рамсея с функцией полезности CRRA в *непрерывном* времени. Функция полезности CRRA (Constant Relative Risk Aversion) определяется по формуле

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}, & \theta > 0, \quad \theta \neq 1, \\ \ln c, & \theta = 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Как отмечалось выше, для данной функции мы получаем постоянное значение эластичности замещения (2.11): $1/\sigma = \theta$.

4.1. Производственная функция Кобба — Дугласа

Рассматриваем задачу экономического роста (2.1)–(2.3) с производственной функцией Кобба — Дугласа $f(k) = k^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, и функцией полезности CRRA при $\theta \neq 1$. Записываем систему (2.10) для данных функций $f(k)$ и $u(c)$:

$$\begin{cases} \dot{k} = k^\alpha - \delta k - c, \\ \dot{c} = \sigma(\alpha k^\alpha - \delta - \rho). \end{cases} \quad (4.2)$$

Аналитическое решение этой системы удается получить для случая $\sigma = 1/\alpha$ [9]. Согласно формуле (2.11) это условие означает, что $\theta = \alpha$ в формуле (4.1).

Система (4.2) является нелинейной, но ее можно свести к линейной, используя замену Бернулли [9] (см. также [21]). В результате решение исходной нелинейной системы записывается в виде

$$\begin{aligned} c(k) &= \frac{\rho + \delta(1 - \alpha)}{\alpha} k, \\ k(t) &= \left[k_{ss}^{1-\alpha} + (k_0^{1-\alpha} - k_{ss}^{1-\alpha}) e^{-(1-\alpha)\frac{\rho+\delta}{\alpha}t} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где компоненты неподвижной точки вычисляются с помощью формул (2.13):

$$\begin{aligned} k_{ss} &= \left(\frac{\delta + \rho}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \\ c_{ss} &= \frac{\rho + \delta(1 - \alpha)}{\alpha} k_{ss}. \end{aligned}$$

4.2. АК-модель

Далее рассматриваем производственную функцию АК-модели: $f(k) = k^\alpha + ak$ (см. [7]). Система (2.10) в данном случае принимает вид

$$\begin{cases} \dot{k} = k^\alpha + ak - \delta k - c, \\ \dot{c} = \sigma (\alpha k^{\alpha-1} + a - \delta - \rho). \end{cases}$$

Из формул (2.13) получаем компоненты неподвижной точки:

$$k_{ss} = \left(\frac{\delta + \rho - a}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad (4.4)$$

$$c_{ss} = \frac{\rho + \delta(1 - \alpha) - a(1 - \alpha)}{\alpha} k_{ss}. \quad (4.5)$$

Аналитическое решение в случае $\sigma = 1/\alpha$ выводится аналогично предыдущему и имеет вид [9]

$$c(k) = \frac{\rho - (a - \delta)(1 - \alpha)}{\alpha} k, \quad (4.6)$$

$$k(t) = \left[-\frac{\alpha}{a - \delta - \rho} + \left(k_0^{1-\alpha} + \frac{\alpha}{a - \delta - \rho} \right) e^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}(a-\delta-\rho)t} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (4.7)$$

Отметим важные условия на параметры a , ρ и δ . Во-первых, для того чтобы функция $k(t)$ имела предел в бесконечности, показатель экспоненты в (4.7) должен быть отрицателен. Кроме того, необходимо, чтобы координаты неподвижной точки (4.4) и (4.5) были положительны. Отсюда следует неравенство $a < \delta + \rho$ ². Во-вторых, для выполнения условия трансверсальности (2.12) на решении системы (4.6) и (4.7) должно выполняться неравенство $\rho > (1 - \alpha)(a - \delta)$ (см. [9]), откуда следует, что $a < \rho/(1 - \alpha) + \delta$. Заметим, что первое неравенство для параметра a является более сильным, чем второе неравенство. Поэтому при задании параметров модели требуем лишь выполнения неравенства $a < \delta + \rho$.

Учитывая формулу (4.4) для неподвижной точки, а также наложенные нами условия на параметры, уравнение (4.7) можем переписать как

$$k(t) = \left[k_{ss}^{1-\alpha} + (k_0^{1-\alpha} - k_{ss}^{1-\alpha}) e^{-(1-\alpha)\frac{\rho+\delta-a}{\alpha}t} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (4.8)$$

²В работе [9] для выполнения условия сбалансированного роста требуется неравенство с противоположным знаком. В этом случае неподвижная точка k_{ss} отсутствует, и происходит рост капитала.

Из вида формул (4.3) и (4.8) замечаем, что аналитические решения для производственной функции $f(k) = k^\alpha$ и для производственной функции $f(k) = k^\alpha + ak$ имеют общую структуру. Отличием решения для второго случая, помимо формулы для неподвижной точки, является лишь дополнительное слагаемое a в показателе экспоненты.

5. Численные результаты

С помощью проекционного метода решаем задачу экономического роста (2.1)–(2.3) с функцией полезности CRRA как для производственной функции Кобба — Дугласа $f(k) = k^\alpha$, так и для АК-модели $f(k) = k^\alpha + ak$. Для сравнения численного решения с аналитическим решением рассматриваем интегрируемый случай $\sigma = 1/\alpha$.

Необходимо определить значения параметров модели. В работе [5] рассматривается значение $\alpha = 0.25$, что при нашем условии дает величину $\sigma = 4$. Однако малое значение параметра α плохо объясняет ряд эмпирических особенностей экономического роста [7]. К тому же значение $\sigma = 4$ является достаточно большим и не соответствует эмпирическим результатам для обратной величины эластичности замещения σ , в литературе ее значение варьируется от 1.5 до 3 (см., например, табл. 3 в статье [10]). Поэтому в работе [9] принимается значение $\alpha = 0.66$, что дает величину $\sigma = 1.5$. Мы приводим результаты расчетов для значений $\alpha = 0.25$ и $\alpha = 0.66$.

Для коэффициента межвременного предпочтения потребителя используем значение $\rho = 0.05$, а для коэффициента устаревания капитала — $\delta = 0.1$ (см. [11; 12]). Начальное значение капитала полагаем равным $k_0 = k_{ss}/2$ для всех дальнейших расчетов (k_{ss} вычисляется отдельно в каждом случае).

Т а б л и ц а 1

Максимальная относительная ошибка для капитала в случае $f(k) = k^\alpha$, $\alpha = 0.25$

n	$\lambda = 0.1\mu$	$\lambda = 0.5\mu$	$\lambda = \mu$	$\lambda = 2\mu$
0	3.64e-01	1.37e-01	1.50e-02	1.89e-01
1	2.41e-01	4.12e-02	7.96e-03	6.76e-02
2	1.84e-01	7.14e-03	2.52e-03	2.05e-02
3	1.41e-01	2.20e-03	9.38e-04	6.38e-03
4	1.07e-01	2.00e-03	3.81e-04	2.06e-03
5	8.02e-02	1.61e-03	1.68e-04	6.59e-04
6	5.89e-02	1.10e-03	7.95e-05	2.16e-04

Т а б л и ц а 2

Максимальная относительная ошибка для капитала в случае $f(k) = k^\alpha$, $\alpha = 0.66$

n	$\lambda = 0.1\mu$	$\lambda = 0.5\mu$	$\lambda = \mu$	$\lambda = 2\mu$
0	3.58e-01	1.21e-01	4.02e-02	2.19e-01
1	2.11e-01	2.03e-02	1.51e-02	7.67e-02
2	1.40e-01	9.53e-03	3.43e-03	2.15e-02
3	1.05e-01	7.04e-03	8.60e-04	6.67e-03
4	7.81e-02	4.25e-03	1.84e-04	2.11e-03
5	5.68e-02	2.29e-03	2.06e-05	6.80e-04
6	7.77e-01	1.29e-03	1.36e-05	2.20e-04

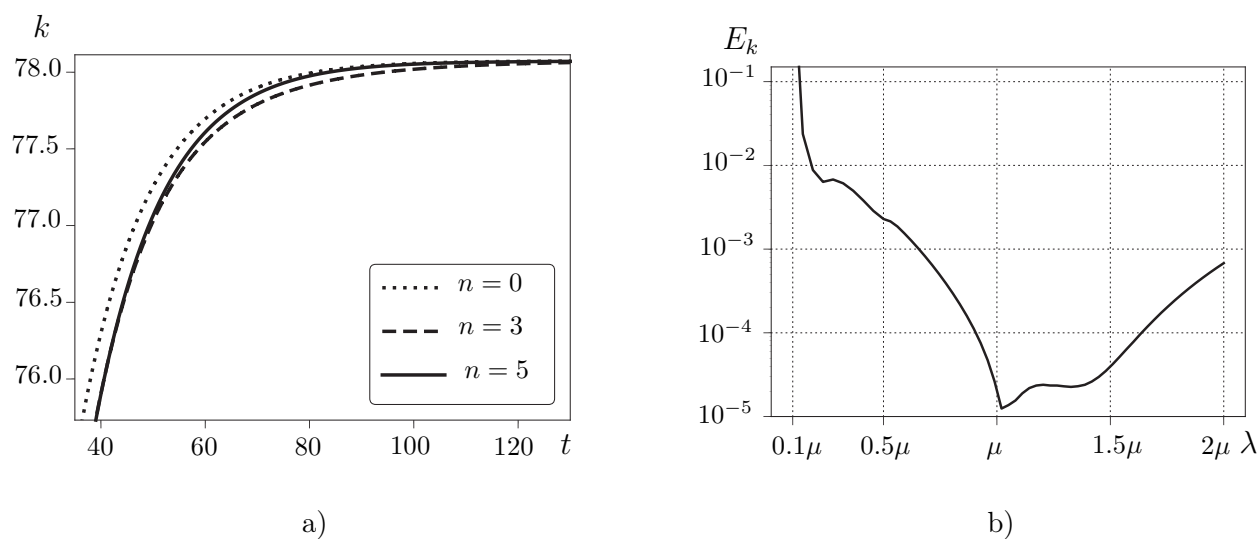


Рис. 1. В случае $f(k) = k^\alpha$, $\alpha = 0.66$: а) функция капитала при $\lambda = \mu$ и различных степенях аппроксимации n ; б) максимальная относительная ошибка для капитала при степени аппроксимации $n = 5$ и различных λ .

В качестве параметров численного метода берем следующие значения. Используем квадратуру Гаусса — Лагерра, имеющую $N = 20$ узлов. Абсолютную и относительную ошибки в методе Ньютона полагаем равными $\tau_a = 10^{-8}$ и $\tau_r = 10^{-6}$ соответственно. Начальное приближение — нулевой вектор размерности n .

Показатель λ в аппроксимации (3.2) варьируем в окрестности абсолютного значения μ отрицательного собственного значения матрицы линеаризации в неподвижной точке на бесконечности (2.14). Численные результаты метода оцениваем по величине относительной ошибки

$$E_k = \max_{t \in [0, T]} \frac{|k(t) - \hat{k}(t)|}{|k(t)|},$$

где $k(t)$ — аналитическое решение, $\hat{k}(t)$ — численное решение и $T = 200$ (для всех рассматриваемых случаев функция $\hat{k}(t)$ достигает стационарного состояния k_{ss} до момента $T = 200$).

В табл. 1 и 2 приведены ошибки E_k при различных вариантах выбора степени аппроксимации n и параметра λ . Как видно, с ростом n преимущество $\lambda = \mu$ становится вполне очевидным: при $n = 6$ получаемая точность в 100 раз выше по сравнению с выбором $\lambda = 0.5\mu$ и в 1000 раз выше по сравнению с $\lambda = 0.1\mu$. Характер зависимости ошибки для случаев $\alpha = 0.25$ и $\alpha = 0.66$ почти одинаков.

На рис. 1а изображена зависимость аппроксимации от числа базисных функций n . Аппроксимация с помощью $n = 5$ базисных функций при $\lambda = \mu$ визуально совпадает с точным решением. Из рис. 1б видно, что точка μ является точкой минимума функции ошибок. Схожее поведение функции ошибок получено для АК-модели при тех же параметрах, а также в случае полного устаревания капитала, $\delta = 1$.

6. Сравнение с другими методами

В разностном методе задача экономического роста (2.1)–(2.3) сводится к краевой задаче на конечном отрезке $[0, T]$ при некотором достаточно большом значении T . В качестве краевого условия на правом конце полагаем $k(T) = k_{ss}$. Отрезок $[0, T]$ разбивается на m равных подотрезков длины h , а производные первого и второго порядков по времени заменяются конечно-разностными аппроксимациями второго порядка по h . Получаемую нелинейную систему из $m + 1$ уравнений решаем методом Ньютона. В качестве начального приближения выбираем,

например, линейную функцию $k^0(t) = k_0 + t(k_{ss} - k_0)/T$. Максимальная относительная ошибка численного решения для $\alpha = \theta = 0.66$, $\delta = 0.1$, $\rho = 0.05$ и $T = 200$ составила $3.63 \cdot 10^{-5}$. Метод Ньютона сходится за несколько итераций, и время счета сопоставимо с проекционным методом. Но для больших T требуется большая размерность системы для достижения приемлемой точности. Для систем большой размерности разностный метод работает существенно медленнее проекционного метода, который дает приемлемую точность при небольшом числе базисных функций. К аналогичным выводам приводит использование метода стрельбы.

В методе динамического программирования необходимо решить уравнение Гамильтона—Якоби—Беллмана

$$\rho V(k) = \max_c \{u(c) + V'(k)(f(k) - \delta k - c)\}, \quad (6.1)$$

где максимум в правой части достигается при $c(k) = (u')^{-1}(V'(k))$. Рассматривается аппроксимация функции цены на m точках разбиения отрезка капитала. Обновляем $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_m)$ по явной схеме

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{h} + \rho V_i^n = u(c_i^n) + (V_i^n)'(f(k_i) - \delta k_i - c_i^n),$$

$$c_i^n = (u')^{-1}[(V_i^n)'], \quad i = 1, \dots, m,$$

при некотором начальном приближении \mathbf{V}^0 . С подробностями вычисления производной $(V_i^n)'$ можно ознакомиться в работах [22; 23].

Для случая $f(k) = k^\alpha$ с функцией полезности CRRA при $\alpha = \theta$ и $\delta = 0$ уравнение (6.1) имеет аналитическое решение:

$$V^*(k) = \left(\frac{\theta}{\rho}\right)^\theta \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-\theta} k^{1-\theta}\right), \quad c^*(k) = \frac{\rho}{\theta} k.$$

Для численного решения аппроксимируем функцию $V(k)$ на отрезке $[0.45k_{ss}, 1.25k_{ss}]$ и используем разбиение из $m = 200$ точек. В качестве начального приближения выбираем ‘стационарную’ функцию цены:

$$V^0(k) = \frac{u(c)}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{(k^\alpha)^{1-\theta}}{1-\theta},$$

которая получается подстановкой $\dot{k} = f(k) - \delta k - c = 0$ в уравнение (6.1). В качестве критерия останова используем условие

$$\frac{\|\mathbf{V}^i - \mathbf{V}^{i-1}\|}{\|\mathbf{V}^i\|} < \varepsilon.$$

Значение $\varepsilon = 10^{-7}$ обеспечивает максимальную относительную ошибку 10^{-3} для $c(k)$ за 893 итерации. Время счета одного порядка с проекционным методом. С увеличением длины отрезка по k и ростом числа точек, время и число итераций в методе динамического программирования заметно возрастает.

Заключение

Предложен проекционный метод для задач экономического роста на бесконечном интервале с *непрерывным* временем. Численный анализ показывает, что значение показателя экспоненты для параметризации решения лучше всего выбирать равным отрицательному собственному значению в матрице линеаризации гамильтоновой системы на бесконечности. В рассмотренных примерах для достижения заданной точности в проекционном методе на бесконечном интервале решается система уравнений небольшой размерности в отличие от методов, использующих разностную аппроксимацию. Отметим, что необходимо дальнейшее изучение проекционного метода в многосекторных и многорегиональных моделях с несколькими группами потребителей (см., например, [12]).

Актуальной задачей для дальнейшего исследования является также применение проекционного метода на бесконечном интервале к стохастическим моделям экономического роста. Как отмечается в работе [3], большинство подходов для таких задач используют идеи проекционных методов. Для анализа сходимости проекционного метода можно использовать интегрируемые случаи в стохастической модели Рамсея [24].

Благодарности. Мы благодарны редактору за полезные замечания, позволившие нам улучшить текст статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Boyd J.P.** Chebyshev and Fourier spectral methods. 2nd edn. NY: Dover Publ., 2001. 688 p.
2. **Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling T., Flannery B.P.** Numerical recipes. 3rd edn. NY: Cambridge Univ. Press, 2007. 1256 p.
3. **Judd K.L.** Projection methods for solving aggregate growth models // J. Econ. Theory. 1992. Vol. 58, no. 2. P. 410–452. doi: 10.1016/0022-0531(92)90061-L.
4. **Miftakhova A., Schmedders K., Schumacher M.** Computing economic equilibria using projection methods // Annu. Rev. Econ. 2020. Vol. 12. P. 317–353. doi: 10.1146/annurev-economics-080218-025711.
5. **Judd K.L.** The parametric path method: an alternative to Fair–Taylor and L-B-J for solving perfect foresight models // J. Econ. Dyn. Control. 2002. Vol. 26, no. 9–10. P. 1557–1583. doi: 10.1016/S0165-1889(01)00085-9.
6. **Blanchard O.J., Fischer S.** Lectures on macroeconomics. Cambridge, MA: MIT Press, 1993. 664 p.
7. **Barro J.R., Sala-i-Martin X.** Economic growth. 2nd edn. Cambridge, MA: MIT Press, 2003. 672 p.
8. **Асеев С.М., Кряжимский А.В.** Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды МИАН. 2007. Т. 257. С. 3–271.
9. **Smith W.T.** A closed form solution to the Ramsey model // J. Macroecon. 2006. Vol. 6, no. 1. P. 1–27. doi: 10.2202/1534-6005.1356.
10. **Lahiri S., Eckaus R.S., Babiker M.** The Effects of changing consumption patterns on the costs of emission restrictions. MIT Joint Program on the Science and Policy of Global Change. Report no. 64. Cambridge, MA, 2000. 14 p.
11. **Melnikov N.B., O’Neill B.C., Dalton M.G.** Accounting for household heterogeneity in general equilibrium economic growth models // Energy Econ. 2012. Vol. 34, no. 5. P. 1475–1483. doi: 10.1016/j.eneco.2012.06.010.
12. **Melnikov N.B., Gruzdev A.P., Dalton M.G., Weitzel M., O’Neill B.C.** Parallel extended path method for solving perfect foresight models // Comput. Econ. 2021. Vol. 58, no. 2. P. 517–534. doi: 10.1007/s10614-020-10044-y.
13. **Boháček R., Kejak M.** Projection methods for economies with heterogeneous agents: CERGE-EI Working Papers, WP258. Prague: CERGE-EI Publ., 2005. 32 p. (Working paper series: ISSN 1211-3298).
14. **Kelley C.T.** Iterative methods for linear and nonlinear equations. Philadelphia: SIAM, 1995. 179 p. doi: 10.1137/1.9781611970944.
15. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 p.
16. **Abramowitz M., Stegun I.A.** Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. NY: Dover Publ., 1972. 1076 p.
17. **Long J.B., Plosser C.I.** Real business cycles // J. Political Econ. 1983. Vol. 91, no. 1. P. 39–69. doi: 10.1086/261128.
18. **Stokey N., Lucas R.** Recursive methods in economic dynamics. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1989. 608 p.
19. **Chang F.** The inverse optimal problem: A dynamic programming approach // Econometrica. 1988. Vol. 56, no. 1. P. 147–172. doi: 10.2307/1911845.
20. **Arystanbekov B.M., Melnikov N.B.** Generalized Galerkin method for an infinite time-horizon economic growth problem // Теория оптимального управления и приложения (ОСТА 2022): материалы Междунар. конф. / ред. А. М. Тарасьев, Т. Ф. Филишова (Екатеринбург, 27 июня – 1 июля 2022 г.) Екатеринбург, 2022. С. 281–285.

21. Красовский А.А., Лебедев П.Д., Тарасьев А.М. Замена Бернулли в модели Рэмзи: оптимальные траектории при ограничениях на управление // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2017. Т. 57, №5. С. 768–782.
22. Oberman A.M. Convergent Difference Schemes for Degenerate Elliptic and Parabolic Equations: Hamilton–Jacobi Equations and Free Boundary Problems // SIAM J. Numerical Analysis. 2006. Vol. 44, no. 2. P. 879–895. doi: 10.1137/S0036142903435235.
23. Achdou Y., Han J., Lasry J.-M., Lions P.-L., Moll B. Income and wealth distribution in macroeconomics: A continuous-time approach // Rev. Econ. Stud. 2022. Vol. 89, no. 1. P. 45–86. doi: 10.1093/restud/rdab002.
24. Smith W.T. Inspecting the mechanism exactly: A closed-form solution to a stochastic growth model // J. Macroecon. 2007. Vol. 7, no. 1. P. 1–31. doi: 10.2202/1935-1690.1524.

Поступила 30.05.2022

После доработки 24.07.2022

Принята к публикации 1.08.2022

Арыстанбеков Батыр Маратович
 Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
 г. Москва
 e-mail: arysbatyr@gmail.com

Мельников Николай Борисович
 д-р физ.-мат. наук, доцент
 Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
 г. Москва
 e-mail: melnikov@cs.msu.ru

REFERENCES

1. Boyd J.P. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. 2nd edn. NY: Dover Publ., 2001, 688 p. ISBN: 0486411834.
2. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling T., Flannery B.P. *Numerical recipes*, 3rd edn. NY: Cambridge Univ. Press, 2007, 1256 p. ISBN: 0521880688.
3. Judd K.L. Projection methods for solving aggregate growth models. *J. Econ. Theory*, 1992, vol. 58, no. 2, pp. 410–452. doi: 10.1016/0022-0531(92)90061-L.
4. Miftakhova A., Schmedders K., Schumacher M. Computing economic equilibria using projection methods. *Annu. Rev. Econ.*, 2020, vol. 12, pp. 317–353. doi: 10.1146/annurev-economics-080218-025711.
5. Judd K.L. The parametric path method: an alternative to Fair–Taylor and L-B-J for solving perfect foresight models. *J. Econ. Dyn. Control*, 2002, vol. 26, no. 9–10, pp. 1557–1583. doi: 10.1016/S0165-1889(01)00085-9.
6. Blanchard O., Fischer S. *Lectures on macroeconomics*. Cambridge, MA: MIT Press, 1989, 664 p. ISBN: 9780262022835.
7. Barro J.R., Sala-i-Martin X. *Economic growth*, 2nd edn. Cambridge, MA: MIT Press, 2003, 672 p. ISBN: 0262025531.
8. Aseev S., Kryazhinskii A. The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2007, vol. 257, pp. 1–255. doi: 10.1134/S0081543807020010.
9. Smith W.T. A closed form solution to the Ramsey model. *J. Macroecon.*, 2006, vol. 6, no. 1, pp. 1–27. doi: 10.2202/1534-6005.1356.
10. Lahiri S., Eckaus R.S., Babiker M. The effects of changing consumption patterns on the costs of emission restrictions. In: *MIT Joint Program on the Science and Policy of Global Change*. Cambridge, MA, 2000, report no. 64, 14 p.
11. Melnikov N.B., O’Neill B.C., Dalton M.G. Accounting for household heterogeneity in general equilibrium economic growth models. *Energy Econ.*, 2012, vol. 34, no. 5, pp. 1475–1483. doi: 10.1016/j.eneco.2012.06.010.
12. Melnikov N.B., Gruzdev A.P., Dalton M.G., Weitzel M., O’Neill B.C. Parallel extended path method for solving perfect foresight models. *Comput. Econ.*, 2021, vol. 58, no. 2, pp. 517–534. doi: 10.1007/s10614-020-10044-y.

13. Boháček R., Kejak M. Projection methods for economies with heterogeneous agents. In: *CERGE-EI Working Papers*, WP258, Prague, 2005. 32 p.
14. Kelley C.T. Iterative methods for linear and nonlinear equations. Philadelphia: SIAM, 1995, 179 p. ISBN: 0898713528.
15. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes* NY; London: John Wiley & Sons, 1962, 360 p. ISBN: 0470693819. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*. Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
16. Abramowitz M., Stegun I.A. *Handbook of mathematical functions*. NY: Dover Publ., 1972, 1076 p. ISBN: 0486612724.
17. Long J., Plosser C.I. Real business cycles. *J. Political Econ.*, 1983, vol. 91, no. 1, pp. 39–69. doi: 10.1086/261128.
18. Stokey N., Lucas R. *Recursive methods in economic dynamics*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1989, 588 p. ISBN: 0674750969.
19. Chang F. The inverse optimal problem: A dynamic programming approach. *Econometrica*, 1988, vol. 56, no. 1, pp. 147–172. doi: 10.2307/1911845.
20. Arystanbekov B.M., Melnikov N.B. Generalized Galerkin method for an infinite time-horizon economic growth problem. In: *Proceedings of the International Conference “Optimal Control Theory and Applications” (Yekaterinburg, Russia, June 27–July 1, 2022)*, eds: T.F. Filippova, A.M. Tarasyev. Yekaterinburg: IMM UB RAS, 2022, pp. 281–285.
21. Krasovskii A.A., Lebedev P.D., Tarasyev A.M. Bernoulli substitution in the Ramsey model: optimal trajectories under control constraints. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2017, vol. 57, no. 5, pp. 770–783. doi: 10.1134/S0965542517050050.
22. Oberman A.M. Convergent difference schemes for degenerate elliptic and parabolic equations: Hamilton–Jacobi equations and free boundary problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2006, vol. 44, no. 2, pp. 879–895. doi: 10.1137/S0036142903435235.
23. Achdou Y., Han J., Lasry J.-M., Lions P.-L., Moll B. Income and wealth distribution in macroeconomics: A continuous-time approach. *Rev. Econ. Stud.*, 2022, vol. 89, no. 1, pp. 45–86. doi: 10.1093/restud/rdab002.
24. Smith W.T. Inspecting the mechanism exactly: A closed-form solution to a stochastic growth model. *J. Macroecon.*, 2007, vol. 7, no. 1, pp. 1–31. doi: 10.2202/1935-1690.1524.

Received May 30, 2022

Revised July 24, 2022

Accepted August 1, 2022

Batyr Maratovich Arystanbekov, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: arysbatyr@gmail.com.

Nikolai Borisovich Melnikov, Dr. Phys.-Math. Sci., Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: melnikov@cs.msu.ru.

Cite this article as: B. M. Arystanbekov, N. B. Melnikov. Projection method for economic growth problems on an infinite time interval. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 17–29.