ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 2 2022

УДК 517.988.68

ОБ АППРОКСИМАЦИИ НОРМАЛИ К ЛИНИЯМ РАЗРЫВА ЗАШУМЛЕННОЙ ФУНКЦИИ

А. Л. Агеев, Т. В. Антонова

Работа посвящена построению регуляризующих алгоритмов для решения некорректной задачи определения нормали и положения линий разрыва функции двух переменных. Предполагается, что вне линий разрыва функция гладкая, а в каждой точке на линии имеет разрыв первого рода. Рассматривается случай, когда точная функция неизвестна, а вместо нее в каждом узле равномерной сетки с шагом τ известны средние значения на квадрате со стороной τ от возмущенной функции. Возмущенная функция приближает точную функцию в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$, и уровень возмущения δ считается известным. Ранее авторами были исследованы (получены оценки точности) глобальные дискретные регуляризирующие алгоритмы аппроксимации множества линий разрыва зашумленной функции. Для подавления шума при построении алгоритмов используется идея усреднения исходных возмущенных данных по обеим переменным. В настоящей работе конструируются методы, позволяющие находить множество пар (точка сетки и вектор): точка сетки аппроксимирует линию разрыва точной функции, а соответствующий вектор аппроксимирует нормаль к линии разрыва. Эти алгоритмы исследуются для частного случая, когда линии разрыва являются ломаными. Получены оценки точности аппроксимации линий разрыва и нормалей.

Ключевые слова: некорректная задача, метод регуляризации, линии разрыва, глобальная локализация, порог разделимости, нормаль.

A. L. Ageev, T. V. Antonova. Approximation of the normal to the discontinuity lines of a noisy function.

The work is devoted to the construction of regularizing algorithms for solving the ill-posed problem of determining the normal and the position of the discontinuity lines of a function of two variables. It is assumed that the function is smooth outside the discontinuity lines, and at each point on the line it has a discontinuity of the first kind. The case is considered when the exact function is unknown, and instead of it, at each node of a uniform grid with a step τ, the mean values on the square with side τ of the perturbed function are known. The perturbed function approximates the exact function in the space $L_2(\mathbb{R}^2)$ and the perturbation level δ is assumed to be known. Previously, the authors investigated (obtained accuracy estimates for) global discrete regularizing algorithms for approximating the set of discontinuity lines of a noisy function. To suppress noise when constructing the algorithms, the idea of averaging the original disturbed data over both variables is used. In this work, methods are constructed that allow finding a set of pairs (grid point and vector): the grid point approximates the discontinuity line of the exact function, and the corresponding vector approximates the normal to the discontinuity line.These algorithms are investigated for the special case when the break lines are polygonal. Estimates of the accuracy of approximation of discontinuity lines and normals are obtained.

Keywords: ill-posed problem, regularization method, discontinuity lines, global localization, discretization, separability threshold, normal.

MSC: 65J22, 68U10

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-7-23

Введение

Определение границ объектов на изображении часто является неотъемлемой частью задачи обработки изображений. Пусть границы объектов являются линиями, на которых функция двух переменных (изображение) терпит разрыв первого рода (линии разрыва), а вне линий разрыва функцию можно считать гладкой. Во многих ситуациях точная функция f неизвестна, а вместо нее известна информация о приближенной функции f^δ. Рассматривается случай, когда возмущения таковы, что линии разрыва приближенной функции могут не аппроксимировать линии разрыва точной функции, то есть задача аппроксимации линий разрыва является некорректно поставленной и для ее решения необходимо строить регуляризирующие алгоритмы [1; 2]. Иногда кроме аппроксимации (локализации) линий разрыва точной функции необходимо также аппроксимировать нормаль к линиям разрыва. В частности, в качестве блока в алгоритме локализации в [3] оценивается нормаль к линии разрыва, и эта оценка далее используется для улучшения качества локализации линий разрыва. Насколько известно авторам, никаких строгих теоретических исследований алгоритмов аппроксимации нормали (оценок точности) на сегодняшний день нет. В настоящей работе для частного случая, когда линии разрыва являются замкнутыми ломаными, построен алгоритм (по схеме работы [3]) и получены оценки точности аппроксимации нормали. Все результаты могут быть перенесены на случай криволинейных линий разрыва.

Различные алгоритмы, позволяющие локализовать линии разрыва зашумленной функции двух переменных, их численную реализацию и ссылки на литературу можно найти, например, в [4; 5, гл. 10]). В российских и зарубежных научных журналах за последние годы этой тематике посвящено много работ. Например, в [6] строятся фильтры, рассчитанные на локализацию линий разрыва в условиях импульсных шумов, при этом используются совместно усреднения с помощью маски и медианные фильтры. Локализация линий разрыва также входит в качестве блока в [7] при сглаживании изображений, сохраняющих структуру. Локальные оценки точности аппроксимации линий разрыва для алгоритмов усреднения были впервые получены в [8], обобщающий глобальный теоретический анализ алгоритмов локализации для случая кусочно-линейных линий разрыва проведен в [9].

В работе изучается модельная ситуация, когда вместо точной функции f известна информация о функции f^δ, $\|f^\delta - f\|_{L_2} \le \delta$, $L_2 := L_2(\mathbb{R}^2)$: для равномерной сетки с шагом τ предполагается, что в каждом узле известны средние значения на квадрате со стороной τ функции f^δ. Уровень возмущения δ считается известным. Для простоты предполагаем, что линия разрыва Γ является ломаной. По исходным данным алгоритм должен выдать множество пар (точка сетки и вектор) таких, что точка сетки аппроксимирует точку на линии разрыва, а соответствующий вектор аппроксимирует нормаль к линии разрыва в этой точке. Сразу нужно обратить внимание на то, что точка сетки может аппроксимировать вершину ломаной, в которой нормаль не определена. Естественно, в этом случае нельзя гарантировать, что соответствующий вектор, выдаваемый алгоритмом, будет приближать какую-либо нормаль. Поэтому при исследовании алгоритмов нужно показать, что количество такого рода пар (с плохой аппроксимацией) мало по сравнению с общим числом пар, выдаваемых алгоритмом.

Локализация линии разрыва проводится так же, как в работе [9]: алгоритм строит множество точек, аппроксимирующих линию разрыва по зашумленным данным. Затем в каждой точке аппроксимирующего множества вычисляется вектор, который в большинстве точек приближает нормаль линии разрыва исходной функции. Получены оценка количества точек, в которых найденный вектор приближает нормаль линии разрыва, и оценка количества точек, в которых этот вектор может не приближать нормаль. Для получения наилучшего порядка аппроксимации нормали выбрана связь параметров регуляризации, при которой порядок точности локализации линий разрыва хуже, чем в [9]. Вместо оценок точности локализации порядка δ получены оценки порядка $\delta^{1/2}$. Однако такой выбор параметров позволяет получить наилучшую оценку аппроксимации нормали порядка $\delta^{1/2}$.

В разд. 1 настоящей работы получено вспомогательное утверждение для оценки нормали. В разд. 2 введены основные понятия, приведена постановка задачи и проведена дискретизация. В разд. 3 и 4 получены предварительные оценки соответственно для точности локализации и для оценки нормали. В последнем разделе работы приведен основной алгоритм, сформулированы и доказаны теоремы аппроксимации с соответствующими оценками.

1. Подход к аппроксимации нормали

Изложим основную идею аппроксимации нормали к линии разрыва функции f. Пусть точка $(\hat{x}, \hat{y})$ лежит на линии разрыва Γ в точке гладкости этой линии, т. е. точка $(\hat{x}, \hat{y})$ принадлежит внутренности одного из отрезков, составляющих Г. Прямую, на которой лежит этот отрезок, обозначим $\mathfrak{L}$: $x(t) = a_x t + b_x,\ y(t) = a_y t + b_y,\ a_x, b_x, a_y, b_y \in \mathbb{R}$. Поскольку используемые в настоящей работе методы локальны, то прежде чем перейти к исследованию работы методов локализации для функции f, построим алгоритм определения нормали к линии $\mathfrak{L}$ по функции $f_{\mathfrak{L}}$, аппроксимирующей функцию f в точке $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Gamma \cap \mathfrak{L}$.

Если прямая $\mathfrak{L}$ не параллельна оси OX, то положим $p = f(\hat{x} - 0, \hat{y}),\ q = f(\hat{x} + 0, \hat{y})$. Если прямая $\mathfrak{L}$ не параллельна оси OY, то положим $p = f(\hat{x}, \hat{y} - 0),\ q = f(\hat{x}, \hat{y} + 0)$. Пока предполагаем, что функция f ограничена и имеет разрыв первого рода в каждой точке на линии Г, то есть p, q конечны и $p \neq q$. Определим функцию $f_{\mathfrak{L}}$:

$$f_{\mathfrak{L}}(x, y) = \begin{cases} p, & a_x(y - \hat{y}) - a_y(x - \hat{x}) \geq 0, \\ q, & a_x(y - \hat{y}) - a_y(x - \hat{x}) < 0, \end{cases} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ введем норму $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Через $\boldsymbol{n}_{\mathfrak{L}}$ обозначим нормаль к прямой $\mathfrak{L}$. Рассмотрим усреднение функции $f_{\mathfrak{L}}$ с помощью функции двух переменных $\omega(x, y)$, предполагая, что все нужные нам интегралы и производные существуют:

$$F[f_{\mathfrak{L}}](x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\mathfrak{L}}(\xi, \eta)\omega(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.1}$$

Введем вектор градиента функции $F[f_{\mathfrak{L}}]$

$$\nabla F[f_{\mathfrak{L}}](x, y) = \Big(\frac{\partial F[f_{\mathfrak{L}}](x, y)}{\partial x}, \ \frac{\partial F[f_{\mathfrak{L}}](x, y)}{\partial y} \Big).$$

Сформулируем основную лемму о совпадении направления вектора $\nabla F[f_{\mathfrak{L}}]$ с направлением нормали к линии $\mathfrak{L}$. В дальнейшем будет доказана близость частных производных по x и по y функций $F[f_{\mathfrak{L}}]$ и $F[f]$, а затем и дискретных аналогов, посчитанных с использованием возмущенных данных (см. разд. 4). Это позволит получить оценки близости дискретного аналога вектора $\nabla F[f^\delta]$ к нормали одного из отрезков линии Г.

Лемма 1. *Пусть функция* $F[f_{\mathfrak{L}}](x, y)$, *определенная* (1.1), *существует и имеет в* $\mathbb{R}^2$ *непрерывные частные производные. Если для точки* $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$ *имеем* $\|\nabla F[f_{\mathfrak{L}}](\tilde{x}, \tilde{y})\| \neq 0$, *тогда* $\nabla F[f_{\mathfrak{L}}](\tilde{x}, \tilde{y}) / \|\nabla F[f_{\mathfrak{L}}](\tilde{x}, \tilde{y})\| = \pm \boldsymbol{n}_{\mathfrak{L}}$, *то есть нормированный градиент функции* $F[f_{\mathfrak{L}}]$ *в этом случае совпадает с одной из нормалей к прямой* $\mathfrak{L}$.

Доказательство. Производная по направлению $\nu = \nu(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial F[f_{\mathfrak{L}}](x, y)}{\partial \nu(\alpha)} = \frac{\partial F[f_{\mathfrak{L}}](x, y)}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial F[f_{\mathfrak{L}}](x, y)}{\partial y} \sin\alpha.$$

Поскольку $\|\nabla F[f_{\mathfrak{L}}](\tilde{x}, \tilde{y})\| \neq 0$, то из [11, гл. V, §3, п. 184] следует, что

$$\|\nabla F[f_{\mathfrak{L}}](\tilde{x}, \tilde{y})\| = \max_{\alpha} \Big\| \frac{\partial F[f_{\mathfrak{L}}](\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \nu(\alpha)} \Big\| > 0.$$

Обозначим угол, при котором достигается этот максимум, через α^*:

$$\cos\alpha^* = \frac{\partial F[f_{\mathfrak{L}}](\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial x} / \|\nabla F[f_{\mathfrak{L}}](\tilde{x}, \tilde{y})\|, \qquad \sin\alpha^* = \frac{\partial F[f_{\mathfrak{L}}](\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial y} / \|\nabla F[f_{\mathfrak{L}}](\tilde{x}, \tilde{y})\|. \tag{1.2}$$

Легко видеть, что функция $F[f_{\mathfrak{L}}](x, y)$ постоянна вдоль любой линии, параллельной прямой $\mathfrak{L}$, значит, ее производная вдоль любой линии, параллельной $\mathfrak{L}$, равна нулю. Применим это соображение к прямой, параллельной прямой $\mathfrak{L}$ и проходящей через точку $(\tilde{x},\tilde{y})$. Обозначая угол, определяющий это направление, через $\bar{\alpha}$, получаем

$$\frac{\partial F[f_{\mathfrak{L}}](\tilde{x},\tilde{y})}{\partial\nu(\bar{\alpha})}=\frac{\partial F[f_{\mathfrak{L}}](\tilde{x},\tilde{y})}{\partial x}\cos\bar{\alpha}+\frac{\partial F[f_{\mathfrak{L}}](\tilde{x},\tilde{y})}{\partial y}\sin\bar{\alpha}=\min_{\alpha}\Big\|\frac{\partial F[f_{\mathfrak{L}}](\tilde{x},\tilde{y})}{\partial\nu(\alpha)}\Big\|=0.$$

Следовательно, направляющий вектор прямой $\mathfrak{L}$ может быть вычислен, например, по формуле

$$\cos\bar{\alpha}=-\frac{\partial F[f_{\mathfrak{L}}](\tilde{x},\tilde{y})}{\partial y}/\|\nabla F[f_{\mathfrak{L}}](\tilde{x},\tilde{y})\|,\quad \sin\bar{\alpha}=\frac{\partial F[f_{\mathfrak{L}}](\tilde{x},\tilde{y})}{\partial x}/\|\nabla F[f_{\mathfrak{L}}](\tilde{x},\tilde{y})\|.$$

Очевидно, что направления $\nu(\bar{\alpha}),\nu(\alpha^*)$ перпендикулярны. Следовательно, (1.2) определяет одну из нормалей к прямой $\mathfrak{L}$.

Лемма доказана.

В настоящей работе используется частный случай функции ω. Сформулируем следствие из леммы 1, отвечающее нашим потребностям. Пусть финитная функция $\phi(t)$ (с носителем на $[-1,1]$) имеет непрерывную производную на $\mathbb{R}$. Положим $\phi_\lambda(t)=\phi(t/\lambda)$, $\lambda>0$, и

$$F_\lambda[f_{\mathfrak{L}}](x,y)=\frac{1}{\lambda}\int\limits_{y-\lambda}^{y+\lambda}\int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda}f_{\mathfrak{L}}(\xi,\eta)\phi_\lambda(x-\xi)\phi_\lambda(y-\eta)d\xi d\eta,\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{1.3}$$

Из теоремы в [12, гл. VII, §5, п. 5.4] следует, что функция $F_\lambda[f_{\mathfrak{L}}](x,y)$, определенная (1.3), существует и имеет на $\mathbb{R}^2$ непрерывные частные производные, которые могут быть вычислены по формулам

$$\frac{\partial F[f_{\mathfrak{L}}](x,y)}{\partial x}=\frac{1}{\lambda}\int\limits_{y-\lambda}^{y+\lambda}\int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda}f_{\mathfrak{L}}(\xi,\eta)\phi'_\lambda(x-\xi)\phi_\lambda(y-\eta)d\xi d\eta,$$

$$\frac{\partial F[f_{\mathfrak{L}}](x,y)}{\partial y}=\frac{1}{\lambda}\int\limits_{y-\lambda}^{y+\lambda}\int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda}f_{\mathfrak{L}}(\xi,\eta)\phi_\lambda(x-\xi)\phi'_\lambda(y-\eta)d\xi d\eta.$$

Следствие. *Для функции* $F_\lambda[f_{\mathfrak{L}}](x,y)$, *определенной* (1.3), *заключение леммы* 1 *справедливо.*

2. Постановка задачи, дискретизация вспомогательных функций

Пусть функция $f(x,y)$ двух переменных в квадрате $\mathfrak{D}=\{(x,y)\colon |x|\le d,|y|\le d\}$, $d>0$, имеет конечное число l линий разрыва Γ_k, которые являются отрезками; вне этих отрезков функция f гладкая (точные условия на функцию f выписаны ниже). Для удобства будем предполагать, что функция f вне квадрата $\mathfrak{D}$ равна нулю и не имеет скачка на границе $\mathfrak{D}$ (это условие непринципиально и может быть снято).

Предполагаем, что отрезки Γ_k, $k=1,2,\ldots,l$, образуют замкнутый контур, обозначим $\Gamma=\cup_1^l\Gamma_k$, $|\Gamma_k|$ — длина отрезка Γ_k. Отрезки, имеющие общие концы, назовем смежными. Пусть отрезки занумерованы так, что Γ_k,Γ_{k+1} смежные; через ϑ_k обозначим наименьший положительный угол между этими отрезками. Введем величину

$$\Theta_k=\begin{cases}(\sin\vartheta_k)^{-1}, & 0<\vartheta_k<\pi/2,\\ 1, & \pi/2\le\vartheta_k<\pi.\end{cases} \tag{2.1}$$

Пусть отрезки Γ_k, $k=1,2,\ldots,l$, заданы параметрически: $x_k(t)=a_{x,k}t+b_{x,k}$, $y_k(t)=a_{y,k}t+b_{y,k}$, $0\le t\le|\Gamma_k|$, $a_{x,k},b_{x,k},a_{y,k},b_{y,k}\in\mathbb{R}$, $k=1,2,\ldots,l$.

В следующем определении приведены условия гладкости функции f вне множества Γ.

О п р е д е л е н и е 1. Введем линейное множество $MV_1(\mathbb{R})$ функций $g \in L_2(\mathbb{R})$ одной переменной с конечным числом разрывов первого рода: на любом отрезке таком, что соответствующий интервал не содержит точек разрыва, функция g непрерывно дифференцируема; функция g ограничена на $\mathbb{R}$; функция g' ограничена на $\mathbb{R}$ (в точках разрыва функции g доопределяем функцию g' нулем). Определим линейное множество $MV_1(\mathbb{R}^2)$, состоящее из функций двух переменных $f(x,y) \in L_2(\mathbb{R}^2)$[1], для которых выполнены следующие условия: для всех y функция $f(\cdot,y)$ принадлежит множеству $MV_1(\mathbb{R})$, для всех x функция $f(x,\cdot)$ принадлежит множеству $MV_1(\mathbb{R})$.

Заметим, что условия гладкости в настоящей работе несколько более сильные, чем в работах [9; 10].

Введем понятие скачка функции f на отрезках разрыва Γ_k, $k = 1,2,\dots,l$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть отрезок Γ_k не параллелен оси OX. Определим скачок $\Delta_x(x,y) = f(x+0,y) - f(x-0,y)$ функции f в точках $(x,y) \in \Gamma_k$ (исключая концы отрезка). Пусть отрезок Γ_k не параллелен оси OY. Определим скачок $\Delta_y(x,y) = f(x,y+0) - f(x,y-0)$ функции f в точках $(x,y) \in \Gamma_k$ (исключая концы отрезка). Если отрезок Γ_k параллелен оси OX, то в точках $(x,y) \in \Gamma_k$ скачок $\Delta_x(x,y)$ не определен. Если отрезок Γ_k параллелен оси OY, то соответственно не определен скачок $\Delta_y(x,y)$ в точках $(x,y) \in \Gamma_k$.

З а м е ч а н и е 1. Легко видеть, что для функции $f \in MV_1(\mathbb{R}^2)$ определение 2 корректно. Отметим, что если отрезок Γ_k не параллелен осям OX и OY, то в точках $(x,y) \in \Gamma_k$ существуют скачки $\Delta_x(x,y)$, $\Delta_y(x,y)$, причем $|\Delta_x(x,y)| = |\Delta_y(x,y)|$.

Введем класс функций $\mathfrak{M}$, на котором будут проводиться оценки точности работы алгоритма локализации линий разрыва.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть функция $f \in MV_1(\mathbb{R}^2)$ имеет линию разрыва $\Gamma = \cup_1^l \Gamma_k$, и скачок функции f на отрезках $\{\Gamma_k\}_1^l$ удовлетворяет определению 2. Класс $\mathfrak{M}$ состоит из таких функций f, дополнительно удовлетворяющих следующим условиям:

(i) задано положительное число r такое, что для всех $(x,y) \in \mathfrak{D}$ имеем $|f(x,y)| \le r$; для $(x,y) \notin \Gamma$ выполнены неравенства $|f'_x(x,y)| \le r$, $|f'_y(x,y)| \le r$; для $(x,y) \in \Gamma$ существуют и ограничены величины $|f'_x(x \pm 0,y)| \le r$, $|f'_y(x,y \pm 0)| \le r$;

(ii) заданы положительные числа L, $\Delta^{\min}$: $0 < l \le L$, $\min\{|\Delta_x(x,y)|\colon (x,y) \in \Gamma_k, \Gamma_k \nparallel OX, k = 1,2,\dots,l\} \ge \Delta^{\min}$, $\min\{|\Delta_y(x,y)|\colon (x,y) \in \Gamma_k, \Gamma_k \nparallel OY, k = 1,2,\dots,l\} \ge \Delta^{\min}$;

(iii) заданы положительные числа Θ и S: $\max\limits_{1\le k\le l} \Theta_k \le \Theta$, $\min\limits_{1\le k\le l} |\Gamma_k| \ge S$.

Таким образом, класс $\mathfrak{M}$ зависит от параметров $r, L, \Delta^{\min}, \Theta, S$. Для краткости будем опускать эти параметры в обозначении класса. Без ограничения общности можно считать, что $r = 1$, что мы и будем делать в дальнейшем.

Введем в квадрате $\mathfrak{D}$ равномерную сетку $T = \{(x^n, y^m)\}$ с шагом τ (условия на τ сформулированы в теореме): $x^n = -d + n\tau$, $y^m = -d + m\tau$, где $n = 0,1,\dots,M$, $m = 0,1,\dots,M$, $M = 2d/\tau$. (Без ограничения общности будем считать, что M — целое число, поскольку всегда можно подходящим образом увеличить d.)

Постановка задачи. Пусть $f \in \mathfrak{M}$, функция $f^\delta \in L_2(\mathbb{R}^2)$ такова, что $\|f - f^\delta\|_{L_2} \le \delta$. По уровню погрешности δ и значениям $f^\delta_{n,m}$ в точках равномерной сетки $T = \{(x^n, y^m)\}$ с заданным шагом τ, которые с функцией f^δ связаны соотношением

$$f^\delta_{n,m} = \frac{1}{\tau^2} \int\limits_{y^m}^{y^m+\tau} \int\limits_{x^n}^{x^n+\tau} f^\delta(\xi,\eta)\, d\xi d\eta, \tag{2.2}$$

[1]Для получения оценок удобнее считать, что функции заданы на $\mathbb{R}^2$, несмотря на то что они имеют конечный носитель.

требуется аппроксимировать множество Γ подмножеством точек сетки T с оценкой точности приближения. Кроме того, в каждой точке аппроксимирующего множества нужно найти вектор, который в большинстве точек приближает нормаль линии разрыва Γ точной функции f.

З а м е ч а н и е 2. Постановка задачи не вполне описана, так как необходимо определить понятие “аппроксимировать”. Это понятие введено в формулировке теоремы 1, где дана оценка не только близости точек сетки, найденных алгоритмом, к множеству линий разрыва, но и их количества.

З а м е ч а н и е 3. Поскольку в углах линий разрыва нормаль не определена, а угловая точка может аппроксимироваться алгоритмом, то соответствующий вектор, выдаваемый алгоритмом, не будет аппроксимировать никакую нормаль. Поэтому в теореме 2 будет получена оценка количества точек, в которых найденный вектор приближает нормаль линий разрыва, и оценка количества точек, в которых этот вектор может не приближать нормаль.

При построении регулярных методов локализации для подавления шума используется идея усреднения возмущенных значений $f^{\delta}_{n,m}$. Сначала введем и исследуем вспомогательные функции (усреднения) — две непрерывные функции и их дискретные аналоги. Для проведения усреднения определим множество непрерывных усредняющих функций $\widetilde{\Phi F}$ одной переменной $\phi(t),\ t\in\mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

(a) ϕ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и ϕ'' непрерывна на $(-1,1)$;

(b) существуют $0<b<1,\ a>0$ такие, что $\phi(t)\ge a$ для $t\in[-b,b]$;

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\phi(t)dt=1$;

(d) $\phi(t)=0$ для $t\notin[-1,1]$; $\phi(t)\ge 0$ для $t\in[-1,1]$.

Введем константу $C=\max\limits_{t\in(-1,1)}\{|\phi''(t)|,|\phi'(t)|,\phi(t)\}$ (в силу условий $(a),(d)$ константа C существует). Ясно, что функция $\phi\in\widetilde{\Phi F}$ принадлежит классу $W_1^1(\mathbb{R})$. Положим $\phi_\lambda(t)=\phi(t/\lambda),\ \lambda>0$.

В качестве вспомогательных функций для алгоритма локализации рассмотрим частные производные функции $F_\lambda[f]$, вычисленной по формуле (1.3). Функция $F_\lambda[f](x,y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные [12, гл. VII, §5, п. 5.4]

$$\frac{\partial F_\lambda[f](x,y)}{\partial x}=\frac{1}{\lambda}\int\limits_{y-\lambda}^{y+\lambda}\int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda}f(\xi,\eta)\phi'_\lambda(x-\xi)\phi_\lambda(y-\eta)d\xi d\eta,\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2; \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial F_\lambda[f](x,y)}{\partial y}=\frac{1}{\lambda}\int\limits_{y-\lambda}^{y+\lambda}\int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda}f(\xi,\eta)\phi_\lambda(x-\xi)\phi'_\lambda(y-\eta)d\xi d\eta,\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{2.4}$$

Дискретные значения усредняющей функции для функции двух переменных будем вычислять по формуле

$$\Lambda^{i,j}_\lambda=\phi'_\lambda(-i\tau)\phi_\lambda(-j\tau)\tau^2/\lambda,\quad \text{где}\quad -K\le i,j\le K-1.$$

Параметр K будет определен ниже как функция уровня погрешности δ и шага сетки τ. Введем дискретные функции, которые при подходящей связи параметров приближают частные производные функции $F_\lambda[f]$ в точках (x^n,y^m) сетки T,

$$G^\delta_x(x^n,y^m)=G^{\delta,K}_{x,\lambda}(x^n,y^m)=\sum_{j=-K}^{K-1}\sum_{i=-K}^{K-1}\Lambda^{i,j}_\lambda f^\delta_{n+i,m+j},$$

$$G^\delta_y(x^n,y^m)=G^{\delta,K}_{y,\lambda}(x^n,y^m)=\sum_{j=-K}^{K-1}\sum_{i=-K}^{K-1}\Lambda^{j,i}_\lambda f^\delta_{n+i,m+j}.$$

Лемма 2. *Пусть зафиксированы усредняющая функция* $\phi \in \widetilde{\Phi F}$ *и натуральное число* K. *Тогда в условиях рассматриваемой задачи при* $\lambda = K\tau$ *в точках* $(x^n, y^m) \in T$ *справедливы следующие оценки:*

$$\Big|G_x^\delta(x^n, y^m) - \frac{\partial F_\lambda[f](x^n, y^m)}{\partial x}\Big| \le \frac{A_0(\delta + 4\tau)}{\lambda},$$

$$\Big|G_y^\delta(x^n, y^m) - \frac{\partial F_\lambda[f](x^n, y^m)}{\partial y}\Big| \le \frac{A_0(\delta + 4\tau)}{\lambda}, \qquad A_0 = 2C^2.$$

Доказательство. Разбивая интегралы в (2.3) на сумму интегралов по тем же квадратам, что и в (2.2), подставляя выражение для $f^\delta_{n+i,m+j}$ и используя обозначение $\Delta f = f^\delta - f$, получаем

$$G_x^\delta(x^n, y^m) - \frac{\partial F_\lambda[f](x^n, y^m)}{\partial x}$$

$$= \sum_{j=-K}^{K-1} \sum_{i=-K}^{K-1} \int\limits_{y^m+j\tau}^{y^m+(j+1)\tau} \int\limits_{x^n+i\tau}^{x^n+(i+1)\tau} f(\xi,\eta)\Big[\frac{\Lambda_\lambda^{i,j}}{\tau^2} - \frac{1}{\lambda}\phi'_\lambda(x^n-\xi)\phi_\lambda(y^m-\eta)\Big]d\xi d\eta$$

$$+ \sum_{j=-K}^{K-1} \sum_{i=-K}^{K-1} \frac{\Lambda_\lambda^{i,j}}{\tau^2} \int\limits_{y^m+j\tau}^{y^m+(j+1)\tau} \int\limits_{x^n+i\tau}^{x^n+(i+1)\tau} \Delta f(\xi,\eta) d\xi d\eta. \tag{2.5}$$

Поскольку для всех i, j имеем $|\Lambda_\lambda^{i,j}| \le C^2\tau^2/\lambda^2$ и $\|\Delta f\|_{L_2} \le \delta$, то, используя неравенство Коши — Буняковского, второе слагаемое оценим следующим образом:

$$\Big|\sum_{j=-K}^{K-1} \sum_{i=-K}^{K-1} \frac{\Lambda_\lambda^{i,j}}{\tau^2} \int\limits_{y^m+j\tau}^{y^m+(j+1)\tau} \int\limits_{x^n+i\tau}^{x^n+(i+1)\tau} \Delta f(\xi,\eta) d\xi d\eta\Big| \le \frac{C^2}{\lambda^2} \int\limits_{y^m-\lambda}^{y^m+\lambda} \int\limits_{x^n-\lambda}^{x^n+\lambda} |\Delta f(\xi,\eta)| d\xi d\eta$$

$$\le \frac{C^2}{\lambda^2} \sqrt{\int\limits_{y^m-\lambda}^{y^m+\lambda} \int\limits_{x^n-\lambda}^{x^n+\lambda} d\xi d\eta} \sqrt{\int\limits_{y^m-\lambda}^{y^m+\lambda} \int\limits_{x^n-\lambda}^{x^n+\lambda} |\Delta f(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta} \le \frac{C^2}{\lambda^2} 2\lambda\,\delta = \frac{2C^2\delta}{\lambda}.$$

Перейдем к оценке первого слагаемого в правой части (2.5). По формуле конечных приращений для функции двух переменных [11, гл. V, п. 183]

$$|\phi'_\lambda(-i\tau)\phi_\lambda(-j\tau) - \phi'_\lambda(x^n-\xi)\phi_\lambda(y^m-\eta)| \le \tau|\phi''_\lambda(\theta_1)\phi_\lambda(\theta_2) + \phi'_\lambda(\theta_1)\phi'_\lambda(\theta_2)| \le 2C^2\tau/\lambda^2, \tag{2.6}$$

где $\theta_1 \in (-(i+1)\tau, -i\tau)$, $\theta_2 \in (-(j+1)\tau, -j\tau)$. Следовательно, используя условие (i) на функцию f, подставляя выражение для $\Lambda_\lambda^{i,j}$ и используя оценку (2.6), для первого слагаемого в правой части (2.5) получаем

$$\Big|\sum_{j=-K}^{K-1} \sum_{i=-K}^{K-1} \int\limits_{y^m+j\tau}^{y^m+(j+1)\tau} \int\limits_{x^n+i\tau}^{x^n+(i+1)\tau} f(\xi,\eta)\Big[\frac{\Lambda_\lambda^{i,j}}{\tau^2} - \frac{1}{\lambda}\phi'_\lambda(x^n-\xi)\phi_\lambda(y^m-\eta)\Big]d\xi d\eta\Big|$$

$$\le \frac{1}{\lambda}\frac{2C^2\tau}{\lambda^2} \sup_{(x,y)\in\mathfrak{D}} |f| \,\Big|\int\limits_{y^m-\lambda}^{y^m+\lambda} \int\limits_{x^n-\lambda}^{x^n+\lambda} d\xi d\eta\Big| \le \frac{8C^2\tau}{\lambda}.$$

Первая оценка доказана. Оценка для G_y^δ получается аналогично.

Лемма доказана.

3. Вспомогательные оценки для точности локализации линий разрыва

Для множеств U_1, $U_2 \in \mathbb{R}^2$ положим

$$\rho(U_1; U_2) = \inf\{\|u_1 - u_2\|:\ u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}.$$

В следующей лемме приведены оценки сверху для функций $\partial F_\lambda[f]/\partial x$, $\partial F_\lambda[f]/\partial y$, определенных формулами (2.3), (2.4), вне окрестности множества Γ.

Лемма 3. *Пусть зафиксирована усредняющая функция* $\phi \in \widetilde{\Phi F}$. *Тогда в условиях рассматриваемой задачи для любого* $\lambda > 0$ *в точках* $(x, y) \in \mathfrak{D}$ *таких, что* $\rho((x, y); \Gamma) \geq \sqrt{2}\lambda$, *имеют место оценки*

$$\Big|\frac{\partial F_\lambda[f](x,y)}{\partial x}\Big| \leq \lambda, \quad \Big|\frac{\partial F_\lambda[f](x,y)}{\partial y}\Big| \leq \lambda.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим область интегрирования в формулах (2.3), (2.4) через $\Pi_\lambda(x, y)$. Поскольку при выполнении условия $\rho((x, y); \Gamma) \geq \sqrt{2}\lambda$ в области $\Pi_\lambda(x, y)$ функция f не имеет разрывов (т. е. $\Pi_\lambda(x, y) \cap \Gamma = \varnothing$), то можно от двойного интеграла в (2.3) перейти к повторному и к внутреннему интегралу применить формулу интегрирования по частям:

$$\frac{\partial F_\lambda[f](x,y)}{\partial x} = \frac{1}{\lambda}\int\limits_{y-\lambda}^{y+\lambda}\Bigg(\int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda} f'_x(\xi,\eta)\phi_\lambda(x-\xi)d\xi\Bigg)\phi_\lambda(y-\eta)d\eta.$$

Используя условия на функции f и ϕ, получаем требуемую оценку

$$\Big|\frac{\partial F_\lambda[f](x,y)}{\partial x}\Big| \leq \frac{1}{\lambda}\sup_{(x,y)\in\mathfrak{D}}|f'_x|\int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda}\phi_\lambda(x-\xi)d\xi\int\limits_{y-\lambda}^{y+\lambda}\phi_\lambda(y-\eta)d\eta \leq \lambda.$$

Первая оценка получена. Вторая оценка получается аналогично.

Лемма доказана.

Оценки в предыдущей лемме получены в предположении, что пересечение области усреднения и ломаной Γ пусто. В следующей лемме получим оценки в случае, когда это пересечение состоит из отрезка. Для этого нужно, во-первых, чтобы область усреднения не пересекала смежные отрезки (в том числе углы ломаной), а во-вторых, чтобы область усреднения не пересекала несмежные отрезки.

Обсудим достаточные условия, гарантирующие, что если область усреднения пересекается с отрезком Γ_k, то она не пересекается со смежными отрезками Γ_{k-1} и Γ_{k+1}. Для этого достаточно, чтобы точка, в которой вычисляется усреднение, была далека от углов ломаной. Зададим вектор $\varepsilon{=}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l)$, $\varepsilon_k{>}0$. Определим Γ_k^ε как часть отрезка Γ_k без окрестностей концов длины ε_{k-1} и ε_k: $\Gamma_k^\varepsilon = \{(x, y)\colon x = x_k(t), y = y_k(t), \varepsilon_{k-1} \leq t \leq |\Gamma_k| - \varepsilon_k\}$. Отметим, что числа ε_k будут выбраны таким образом, что $\Gamma_k^\varepsilon \neq \varnothing$ и в области усреднения с центром в точке $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Gamma_k^\varepsilon$ нет смежных отрезков Γ_{k-1} и Γ_{k+1}. Обозначим $\Gamma^\varepsilon = \cup_{k=1}^{l}\Gamma_k^\varepsilon$.

Для того чтобы в пересечение области усреднения и ломаной Γ не попадали одновременно два несмежных отрезка, вводится *условие разделимости.*

Получим оценки снизу для частных производных $\partial F_\lambda[f]/\partial x$, $\partial F_\lambda[f]/\partial y$, определенных формулами (2.3), (2.4), в точках сетки T, близких к Γ^ε. Напомним, что величины Θ_k, $k = 1, 2, \ldots, l$, определены в (2.1), константы a, b введены в условии (b) на функцию ϕ, величина $\Delta^{\min}$ входит в определение класса $\mathfrak{M}$, τ — шаг сетки T. Введем константу $\varkappa = a^2 b$.

Лемма 4. *Пусть зафиксирована усредняющая функция* $\phi \in \widetilde{\Phi F}$. *Тогда в условиях рассматриваемой задачи для всех положительных* λ *и* $\tau \leq b\lambda/4$ *при выполнении условия разделимости* $\min\limits_{1\leq k,j\leq l,\ k\neq j}\rho(\Gamma_k^\varepsilon; \Gamma_j^\varepsilon) \geq \sqrt{2}\lambda + \tau$, *где* $\varepsilon = (\Theta_1(\sqrt{2}\lambda + \tau), \Theta_2(\sqrt{2}\lambda + \tau), \ldots, \Theta_l(\sqrt{2}\lambda + \tau))$,

в точках $(x,y) \in \mathfrak{D}$ *таких, что* $\rho((x,y);\Gamma^{\varepsilon}) \le \tau$, *имеет место хотя бы одна из оценок*:
либо

$$\Big|\frac{\partial F_{\lambda}[f](x,y)}{\partial x}\Big| \ge \varkappa\Delta^{\min} - \lambda,$$

либо

$$\Big|\frac{\partial F_{\lambda}[f](x,y)}{\partial y}\Big| \ge \varkappa\Delta^{\min} - \lambda.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\rho((x,y);\Gamma^{\varepsilon}) \le \tau$, то $\Pi_{\lambda}(x,y) \cap \Gamma \ne \varnothing$. Условие разделимости $\min\limits_{1\le k,j\le l,\, k\ne j} \rho(\Gamma^{\varepsilon}_k;\Gamma^{\varepsilon}_j) \ge \sqrt{2}\lambda$ гарантирует, что в области интегрирования $\Pi_{\lambda}(x,y)$ в (2.3) функция f имеет разрывы только на отрезке Γ_k. Предположим, что $|a_{x,k}/a_{y,k}| \le 1$, и докажем первую оценку (если $|a_{y,k}/a_{x,k}| \le 1$, то справедлива вторая оценка).

Поскольку $|a_{x,k}/a_{y,k}| \le 1$, то отрезок Γ_k не параллелен OX, следовательно, на нем определен скачок Δ_x (см. определение 2). Согласно [8, лемма 1] имеет место разложение

$$\frac{\partial F_{\lambda}[f](x,y)}{\partial x} = \frac{1}{\lambda}\int\limits_{y-\lambda}^{y+\lambda}\Bigg(\int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda} f(\xi,\eta)\phi'_{\lambda}(x-\xi)d\xi\Bigg)\phi_{\lambda}(y-\eta)d\eta$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int\limits_{y-\lambda}^{y+\lambda} \Delta_x(x_k(t(\eta)),\eta)\phi_{\lambda}(x - x_k(t(\eta)))\phi_{\lambda}(y-\eta)d\eta$$

$$+ \frac{1}{\lambda}\int\limits_{y-\lambda}^{y+\lambda}\Bigg(\int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda} f'_{\xi}(\xi,\eta)\phi_{\lambda}(x-\xi)d\xi\Bigg)\phi_{\lambda}(y-\eta)d\eta, \tag{3.1}$$

где $(x_k(t(\eta)),\eta) \in \Gamma_k$, $t(\eta) = (\eta - b_{y,k})/a_{y,k}$. Второе слагаемое в правой части (3.1) оценивалось в лемме 3:

$$\Bigg|\frac{1}{\lambda}\int\limits_{y-\lambda}^{y+\lambda}\Bigg(\int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda} f'_{\xi}(\xi,\eta)\phi_{\lambda}(x-\xi)d\xi\Bigg)\phi_{\lambda}(y-\eta)d\eta\Bigg| \le \lambda.$$

Рассмотрим первое слагаемое. Поскольку функция $\Delta_x(x,y)$ не меняет знак на Γ_k, то без ограничения общности можно считать, что значение функции $\Delta_x(x,y)$ положительно в пределах интегрирования. Следовательно, в силу неотрицательности функции ϕ справедлива оценка снизу

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_{y-\lambda}^{y+\lambda} \Delta_x(x_k(t(\eta)),\eta)\phi_{\lambda}(x - x_k(t(\eta)))\phi_{\lambda}(y-\eta)d\eta$$

$$\ge \frac{1}{\lambda}\int\limits_{y-b\lambda/2}^{y+b\lambda/2} \Delta_x(x_k(t(\eta)),\eta)\phi_{\lambda}(x - x_k(t(\eta)))\phi_{\lambda}(y-\eta)d\eta.$$

По условию теоремы существует точка $(\hat{x},\hat{y}) \in \Gamma^{\varepsilon}_k$ такая, что $\rho((x,y);(\hat{x},\hat{y})) \le \tau$, т. е. $|x-\hat{x}| + |y-\hat{y}| \le 2\tau$. Следовательно,

$$|x - x_k(t(\eta))| \le |x-\hat{x}| + |\hat{x} - x_k(t(\eta))|$$

$$\le |x-\hat{x}| + |a_{x,k}/a_{y,k}||\hat{y}-\eta| \le |x-\hat{x}| + |\hat{y}-y| + |y-\eta| \le 2\tau + |y-\eta| \le 2\tau + b\lambda/2.$$

Учитывая, что $\tau \le b\lambda/4$, имеем $|x - x_k(t(\eta))| \le b\lambda$. Используя условия на функции f и ϕ, для первого слагаемого в правой части (3.1) получаем оценку

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_{y-\lambda}^{y+\lambda} \Delta_x(x_k(t(\eta)),\eta)\phi_\lambda(x - x_k(t(\eta)))\phi_\lambda(y-\eta)d\eta \ge \frac{a\Delta^{\min}}{\lambda}\int\limits_{y-b\lambda/2}^{y+b\lambda/2}\phi_\lambda(y-\eta)d\eta \ge a^2b\Delta^{\min}.$$

Лемма доказана.

Напомним, что величины a, b введены в условии (b) на функцию ϕ, величина $\Delta^{\min}$ входит в определение класса $\mathfrak{M}$, $A_0 = 2C^2$, $\varkappa = a^2 b$. Введем константы

$$P = \frac{\varkappa\Delta^{\min}}{2}, \qquad \bar{\delta}_0 = \min\Big\{\Big(\frac{P}{\sqrt{2}(5A_0+2)}\Big)^2, \Big(\frac{b}{4}\Big)^2\Big\}.$$

Заметим, что $\bar{\delta}_0 < 1$. Обозначим $\lceil z \rceil = [z] + 1$, где $[z]$ — целая часть числа z. Положим

$$K = K(\tau,\delta) = \Big\lceil \frac{\delta^{1/2}}{\tau} \Big\rceil. \tag{3.2}$$

Напомним, что (см. формулировку леммы 2)

$$\lambda = K\tau. \tag{3.3}$$

Ниже нам понадобятся очевидные оценки для τ и λ, которые сформулируем в виде отдельного утверждения.

Утверждение. *Пусть $\delta \le \bar{\delta}_0$ и шаг τ заданной равномерной сетки T удовлетворяет условию $\tau \le \delta$, тогда при связи параметров* (3.2), (3.3) *имеем $\tau \le b\lambda/4$ и $\delta^{1/2} \le \lambda \le \delta^{1/2} + \tau < 2\delta^{1/2}$.*

Справедливость этих оценок следует из связи параметров (3.2), (3.3) и выбора $\bar{\delta}_0$. □

В точках (x^n, y^m) сетки T определим функцию

$$H^\delta(x^n, y^m) = \sqrt{(G_x^\delta(x^n,y^m))^2 + (G_y^\delta(x^n,y^m))^2}. \tag{3.4}$$

Лемма 5. *Пусть зафиксирована усредняющая функция $\phi \in \widetilde{\Phi F}$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для всех $\delta \le \bar{\delta}_0$, $\tau \le \delta$ при связи параметров* (3.2), (3.3) *и при выполнении условия разделимости $\min\limits_{1\le k,j\le l,\, k\ne j} \rho(\Gamma_k^\varepsilon; \Gamma_j^\varepsilon) \ge \sqrt{2}\lambda + \tau$, где $\varepsilon = (\Theta_1(\sqrt{2}\lambda+\tau), \Theta_2(\sqrt{2}\lambda+\tau), \dots, \Theta_l(\sqrt{2}\lambda+\tau))$, для значения функции H^δ в точках $(x^n, y^m) \in T$ имеют место оценки*

(1) *если $\rho((x^n,y^m);\Gamma) \ge \sqrt{2}\lambda$, то $H^\delta(x^n,y^m) < P$,*

(2) *если $\rho((x^n,y^m);\Gamma^\varepsilon) \le \tau$, то $H^\delta(x^n,y^m) > P$.*

Доказательство. Покажем справедливость (1). Для точек (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n,y^m);\Gamma) \ge \sqrt{2}\lambda$, используя оценки лемм 2 и 3, получаем

$$H^\delta(x^n,y^m) \le \sqrt{2}\max\{|G_x^\delta(x^n,y^m)|, |G_y^\delta(x^n,y^m)|\} \le \sqrt{2}\Big(\frac{A_0(\delta+4\tau)}{\lambda} + \lambda\Big).$$

Поскольку $\tau \le \delta$ и $\delta \le \bar{\delta}_0$, то при данном выборе параметров, используя оценки для λ из утверждения, имеем

$$H^\delta(x^n,y^m) < \sqrt{2}(5A_0+2)\delta^{1/2} \le P.$$

Перейдем к доказательству (2). Для точек (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n,y^m);\Gamma^\varepsilon) \le \tau$, используя оценки лемм 2 и 4, получаем

$$H^\delta(x^n,y^m) \ge \min\big\{|G_x^\delta(x^n,y^m)|, |G_y^\delta(x^n,y^m)|\big\} \ge \varkappa\Delta^{\min} - \frac{A_0(\delta+4\tau)}{\lambda} - \lambda.$$

При данном выборе параметров $H^\delta(x^n,y^m) > \varkappa\Delta^{\min} - P/\sqrt{2} > P$.

Лемма доказана.

4. Вспомогательные оценки для аппроксимации нормали

Пусть точка $(\hat{x},\hat{y}) \in \Gamma_k$. Напомним, что отрезки Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, l$, заданы параметрически: $x_k(t) = a_{x,k}t + b_{x,k}$, $y_k(t) = a_{y,k}t + b_{y,k}$, $0 \le t \le |\Gamma_k|$, $a_{x,k}, b_{x,k}, a_{y,k}, b_{y,k} \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, l$. Введем функцию f_k в точках $(x, y) \in \mathfrak{D}$. Для k такого, что $\Gamma_k \nparallel OX$, положим

$$f_k(x,y) = \begin{cases} f(\hat{x}-0,\hat{y}), & a_{x,k}(y-\hat{y}) - a_{y,k}(x-\hat{x}) \ge 0, \\ f(\hat{x}+0,\hat{y}), & a_{x,k}(y-\hat{y}) - a_{y,k}(x-\hat{x}) < 0. \end{cases}$$

Для k такого, что $\Gamma_k \nparallel OY$, положим

$$f_k(x,y) = \begin{cases} f(\hat{x},\hat{y}-0), & a_{x,k}(y-\hat{y}) - a_{y,k}(x-\hat{x}) \ge 0, \\ f(\hat{x},\hat{y}+0), & a_{x,k}(y-\hat{y}) - a_{y,k}(x-\hat{x}) < 0. \end{cases}$$

Напомним, что $A_0 = 2C^2$, τ — шаг сетки T. Введем функцию

$$\beta(\delta,\tau,\lambda) = \frac{A_0(\delta+4\tau)}{\lambda} + 8C\lambda.$$

Функция $F_\lambda[f_k]$, вычисленная по формуле (1.3), непрерывна и имеет непрерывные частные производные (см. разд. 1). В следующей лемме получены оценки близости функций G_x^δ, G_y^δ и соответствующих частных производных функции $F_\lambda[f_k]$ в точках сетки T из окрестности Γ_k.

Лемма 6. *Пусть зафиксированы усредняющая функция $\phi \in \widetilde{\Phi F}$ и натуральное число K. Тогда в условиях рассматриваемой задачи при связи параметров $\lambda = K\tau$ и при выполнении условия разделимости $\min\limits_{1\le k,j\le l,\, k\ne j} \rho(\Gamma_k^\varepsilon;\Gamma_j^\varepsilon) \ge 2\sqrt{2}\lambda$, где $\varepsilon = (\Theta_1 2\sqrt{2}\lambda, \Theta_2 2\sqrt{2}\lambda, \ldots, \Theta_l 2\sqrt{2}\lambda)$, в точках $(x^n, y^m) \in T$ таких, что $\rho((x^n,y^m);(\hat{x},\hat{y})) \le \sqrt{2}\lambda$, где $(\hat{x},\hat{y}) \in \Gamma_k^\varepsilon$, имеют место оценки*

$$\Big|G_x^\delta(x^n,y^m) - \frac{\partial F_\lambda[f_k](x^n,y^m)}{\partial x}\Big| \le \beta(\delta,\tau,\lambda),$$

$$\Big|G_y^\delta(x^n,y^m) - \frac{\partial F_\lambda[f_k](x^n,y^m)}{\partial y}\Big| \le \beta(\delta,\tau,\lambda).$$

Кроме того,

$$|G_x^\delta(x^n,y^m)| \le 2C + \beta(\delta,\tau,\lambda), \quad |G_y^\delta(x^n,y^m)| \le 2C + \beta(\delta,\tau,\lambda).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем справедливость первой оценки. Рассмотрим разность

$$\Big|\frac{\partial F_\lambda[f](x^n,y^m)}{\partial x} - \frac{\partial F_\lambda[f_k](x^n,y^m)}{\partial x}\Big| = \Bigg|\frac{1}{\lambda}\int\limits_{y^m-\lambda}^{y^m+\lambda}\int\limits_{x^n-\lambda}^{x^n+\lambda} (f-f_k)(\xi,\eta)\phi'_\lambda(x^n-\xi)\phi_\lambda(y^m-\eta)d\xi d\eta\Bigg|.$$

Условие разделимости $\min\limits_{1\le k,j\le l,\, k\ne j} \rho(\Gamma_k^\varepsilon;\Gamma_j^\varepsilon) \ge 2\sqrt{2}\lambda$ гарантирует, что в области интегрирования $\Pi_\lambda(x^n,y^m)$ функция f имеет разрывы только на отрезке Γ_k. Напомним, что $(\hat{x},\hat{y}) \in \Gamma_k^\varepsilon$. Применим формулу конечных приращений для функции двух переменных [11, гл. V, п. 183] отдельно в точках по разные стороны от отрезка разрыва Γ_k. Нетрудно видеть, что, дополнительно используя условия на функцию f, для модуля разности $f - f_k$ имеет место оценка $|f-f_k| \le |\xi-\hat{x}|+|\eta-\hat{y}|$. По условию леммы $\rho((x^n,y^m);(\hat{x},\hat{y})) \le \sqrt{2}\lambda$, т. е. $|x^n-\hat{x}|+|y^m-\hat{y}| \le 2\lambda$. Тогда

$$|f-f_k| \le |\xi-\hat{x}| + |\eta-\hat{y}| \le |\xi-x^n| + |x^n-\hat{x}| + |\eta-y^m| + |y^m-\hat{y}| \le 4\lambda.$$

Следовательно,

$$\Big|\frac{\partial F_\lambda[f](x^n,y^m)}{\partial x} - \frac{\partial F_\lambda[f_k](x^n,y^m)}{\partial x}\Big| \le 8C\lambda.$$

Используя дополнительно первую оценку из леммы 2, получаем первую оценку настоящей леммы. Вторая оценка может быть получена аналогично.

Подставляя в равенство (3.1) функцию f_k вместо f, для всех точек $(x,y) \in \mathfrak{D}$ имеем

$$\Big|\frac{\partial F_\lambda[f_k](x,y)}{\partial x}\Big| \le 2C. \tag{4.1}$$

Аналогично

$$\Big|\frac{\partial F_\lambda[f_k](x,y)}{\partial y}\Big| \le 2C. \tag{4.2}$$

Оценки для $|G_x^\delta(x^n,y^m)|$ и $|G_y^\delta(x^n,y^m)|$ следуют из оценок (4.1), (4.2) и первых двух оценок настоящей леммы.

Лемма доказана.

В точках $(x,y) \in \mathfrak{D}$, для которых $\|\nabla F_\lambda[f_k](x,y)\| \neq 0$, определим вектор

$$\boldsymbol{n}_k(x,y) = \Big(\frac{\partial F_\lambda[f_k](x,y)/\partial x}{\|\nabla F_\lambda[f_k](x,y)\|}, \quad \frac{\partial F_\lambda[f_k](x,y)/\partial y}{\|\nabla F_\lambda[f_k](x,y)\|}\Big).$$

В точках (x^n,y^m) сетки T, для которых $H^\delta(x^n,y^m) \neq 0$, определим вектор

$$\boldsymbol{n}^\delta(x^n,y^m) = \Big(\frac{G_x^\delta(x^n,y^m)}{H^\delta(x^n,y^m)}, \quad \frac{G_y^\delta(x^n,y^m)}{H^\delta(x^n,y^m)}\Big). \tag{4.3}$$

Введем константы

$$B = 5A_0 + 16C, \qquad \hat{\delta}_0 = \min\Big\{\Big(\frac{P^2}{4B(4C+B)}\Big)^2,\ 1\Big\}.$$

Напомним, что

$$\beta(\delta,\tau,\lambda) = \frac{A_0(\delta+4\tau)}{\lambda} + 8C\lambda.$$

Лемма 7. *Пусть зафиксирована усредняющая функция $\phi \in \widetilde{\Phi F}$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для всех $\delta < \hat{\delta}_0$, $\tau \le \delta$ при связи параметров* (3.2), (3.3) *и при выполнении условия разделимости* $\min\limits_{1\le k,j\le l,\ k\neq j} \rho(\Gamma_k^\varepsilon;\Gamma_j^\varepsilon) \ge 2\sqrt{2}\lambda$, *где* $\varepsilon{=}(\Theta_1 2\sqrt{2}\lambda, \Theta_2 2\sqrt{2}\lambda, \ldots, \Theta_l 2\sqrt{2}\lambda)$, *в точках $(x^n,y^m) \in T$ таких, что $H^\delta(x^n,y^m) > P$ и $\rho((x^n,y^m);(\hat{x},\hat{y})) \le \sqrt{2}\lambda$, где $(\hat{x},\hat{y}) \in \Gamma_k^\varepsilon$, вектор $\boldsymbol{n}_k(x^n,y^m)$ совпадает с одной из нормалей к отрезку Γ_k, а для синуса угла между векторами $\boldsymbol{n}^\delta(x^n,y^m)$, $\boldsymbol{n}_k(x^n,y^m)$ справедлива оценка*

$$\sin(\widehat{\boldsymbol{n}^\delta(x^n,y^m),\boldsymbol{n}_k}(x^n,y^m)) \le \frac{4\sqrt{2}CB}{P^2}\delta^{1/2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала получим оценку снизу для $\|\nabla F_\lambda[f_k](x^n,y^m)\|$ в точках $(x^n,y^m) \in T$ таких, что $H^\delta(x^n,y^m) > P$. Используя оценки (4.1), (4.2) и лемму 6, имеем

$$\Big|(H^\delta(x^n,y^m))^2 - \|\nabla F_\lambda[f_k](x^n,y^m)\|^2\Big| = \Big|(G_x^\delta(x^n,y^m))^2 - \Big(\frac{\partial F_\lambda[f_k](x^n,y^m)}{\partial x}\Big)^2$$

$$+ (G_y^\delta(x^n,y^m))^2 - \Big(\frac{\partial F_\lambda[f_k](x^n,y^m)}{\partial y}\Big)^2\Big| \le 2\beta(\delta,\tau,\lambda)(4C+\beta(\delta,\tau,\lambda)).$$

При данном выборе параметров

$$\beta(\delta,\tau,\lambda) = \frac{A_0(\delta+4\tau)}{\lambda} + 8C\lambda < (5A_0+16C)\delta^{1/2} = B\delta^{1/2}.$$

Используя условие $\delta < \hat{\delta}_0$, получаем $\left|(H^\delta(x^n,y^m))^2 - \|\nabla F_\lambda[f_k](x^n,y^m)\|^2\right| < 2B(4C+B)\delta^{1/2} = P^2/2$. Следовательно,

$$\|\nabla F_\lambda[f_k](x^n,y^m)\|^2 \geq (H^\delta(x^n,y^m))^2 - \left|(H^\delta(x^n,y^m))^2 - \|\nabla F_\lambda[f_k](x,y)\|^2\right| > P^2 - P^2/2 = P^2/2.$$

Таким образом, $\|\nabla F_\lambda[f_k](x^n,y^m)\| > P/\sqrt{2}$. Согласно следствию из леммы 1 вектор $\boldsymbol{n}_k(x^n,y^m)$ совпадает с нормалью отрезка Γ_k. Перейдем к оценке синуса угла между векторами $\boldsymbol{n}^\delta(x^n,y^m)$, $\boldsymbol{n}_k(x^n,y^m)$:

$$\sin(\widehat{\boldsymbol{n}^\delta(x^n,y^m),\boldsymbol{n}_k}(x^n,y^m)) = \cos(\widehat{\boldsymbol{n}^\delta(x^n,y^m),\boldsymbol{n}_k^\perp}(x^n,y^m)) = |(\boldsymbol{n}^\delta(x^n,y^m),\boldsymbol{n}_k^\perp(x^n,y^m))|,$$

где

$$\boldsymbol{n}_k^\perp(x,y) = \Big(-\frac{\partial F_\lambda[f_k](x,y)/\partial y}{\|\nabla F_\lambda[f_k](x,y)\|},\quad \frac{\partial F_\lambda[f_k](x,y)/\partial x}{\|\nabla F_\lambda[f_k](x,y)\|}\Big).$$

Используя оценки (4.1), (4.2) и лемму 6, имеем

$$\left|-G_x^\delta(x^n,y^m)\frac{\partial F_\lambda[f_k](x,y)}{\partial y} + G_y^\delta(x^n,y^m)\frac{\partial F_\lambda[f_k](x,y)}{\partial x}\right|$$

$$\leq \left|\frac{\partial F_\lambda[f_k](x,y)}{\partial y}\Big(\frac{\partial F_\lambda[f_k](x,y)}{\partial x} - G_x^\delta(x^n,y^m)\Big) + \frac{\partial F_\lambda[f_k](x,y)}{\partial x}\Big(G_y^\delta(x^n,y^m) - \frac{\partial F_\lambda[f_k](x,y)}{\partial y}\Big)\right|$$

$$\leq 4C\beta(\delta,\tau,\lambda) \leq 4CB\delta^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\sin(\widehat{\boldsymbol{n}^\delta(x^n,y^m),\boldsymbol{n}_k}(x^n,y^m)) \leq \frac{4CB\delta^{1/2}}{\|H^\delta(x^n,y^m)\|\|\nabla F_\lambda[f_k](x,y)\|} \leq \frac{4\sqrt{2}CB}{P^2}\delta^{1/2}.$$

Лемма доказана.

5. Исследование алгоритма локализации линий разрыва

Изложенный ниже метод локализации определяет множество T^δ точек сетки T, аппроксимирующих множество Γ. Обозначим через $N = N(T^\delta)$ количество точек множества T^δ. Договоримся, если $T^\delta = \varnothing$, считать $\rho((x^n,y^m);T^\delta) = \infty$ для любой точки (x^n,y^m) сетки T. Кроме того, в каждой точке множества T^δ алгоритм вычисляет вектор, аппроксимирующий нормаль линии Γ. Напомним, что функция H^δ определена в (3.4), вектор $\boldsymbol{n}^\delta(x^n,y^m)$ вычисляется по формуле (4.3); константы L, $\Delta^{\min}$, Θ и S введены в определении класса $\mathfrak{M}$.

Приведенный ниже алгоритм локализации в своей работе использует параметр регуляризации λ, являющийся функцией уровня погрешности данных δ,

$$\lambda = K\tau, \qquad K = K(\tau,\delta) = \Big\lceil \frac{\delta^{1/2}}{\tau} \Big\rceil, \tag{5.1}$$

и величину порога $P = \varkappa\Delta^{\min}/2$, где $\varkappa = a^2 b$.

А л г о р и т м $\Pi D_{\boldsymbol{n}}(\delta, f_{n,m}^\delta)$

Подготовка к циклу. Положим $N := 0$; $T^\delta := \varnothing$.

Цикл перебора точек (x^n,y^m) *сетки* T. Если в процессе перебора нерассмотренных точек сетки T не осталось, то — конец цикла;

иначе для точки (x^n,y^m) проверяем: если $H^\delta(x^n,y^m) > P$ и $\rho((x^n,y^m);T^\delta) > 3\sqrt{2}\lambda$, то $N := N+1$; $T^\delta := T^\delta \cup (x^n,y^m)$, и продолжаем цикл;

иначе продолжаем цикл.

В каждой точке $(x^n,y^m) \in T^\delta$ вычисляем вектор $\boldsymbol{n}^\delta(x^n,y^m)$.

Заметим, что выше сформулирован целый класс алгоритмов. Чтобы получить конкретный метод, нужно зафиксировать усредняющую функцию $\phi \in \widetilde{\Phi F}$ и правило перебора точек. Далее будем считать, что конкретное правило перебора и усредняющая функция выбраны и зафиксированы.

Пусть множества U_1, $U_2 \in \mathbb{R}^2$. Введем меру близости множества U_1 к множеству U_2

$$\mu(U_1; U_2) = \sup_{u_1 \in U_1} \inf_{u_2 \in U_2} \|u_1 - u_2\|.$$

Положим

$$\delta_0 = \min\left\{\bar{\delta}_0,\ \hat{\delta}_0,\ 1/49,\ (S/(9\sqrt{2}\Theta))^2\right\}, \quad h(\delta) = 4\sqrt{2}\delta^{1/2}.$$

Теорема 1. *В условиях рассматриваемой задачи для всех* $\delta \le \delta_0$, $\tau \le \delta$ *при связи параметров* (5.1) *и при выполнении условия разделимости* $\min\limits_{1 \le k,j \le l,\, k \ne j} \rho(\Gamma_k^\varepsilon; \Gamma_j^\varepsilon) \ge h(\delta)$, *где* $\varepsilon = (\Theta_1 h(\delta), \Theta_2 h(\delta), \ldots, \Theta_l h(\delta))$, *алгоритм* $\Pi D_{\boldsymbol{n}}(\delta, f_{n,m}^\delta)$ *построит множество точек* T^δ *такое, что*

(1) $\mu(T^\delta; \Gamma) \le 2\sqrt{2}\delta^{1/2}$;

(2) $\mu(\Gamma^\varepsilon; T^\delta) \le 4\sqrt{2}\delta^{1/2}$; $\quad \mu(\Gamma; T^\delta) \le 4\sqrt{2}(1+\Theta)\delta^{1/2}$;

(3) *для всех различных точек* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in T^\delta$ *справедливо неравенство*

$$\rho((x_1, y_1); (x_2, y_2)) > 3\sqrt{2}\delta^{1/2};$$

(4) *множество* $T^\delta \ne \varnothing$, *и справедливы оценки*

$$\frac{1}{7\sqrt{2}} \frac{|\Gamma|}{\delta^{1/2}} - \frac{8L\Theta}{7} \le N(T^\delta) \le \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|\Gamma|}{\delta^{1/2}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что при выборе $h(\delta) = 4\sqrt{2}\delta^{1/2}$ выполнено условие разделимости в лемме 5.

Докажем оценку (1). Из оценки в п. (1) леммы 5 следует, что $\mu(T^\delta; \Gamma) \le \sqrt{2}\lambda$. Используя оценку для λ из утверждения перед леммой 5, получаем требуемое неравенство.

Докажем оценки (2). Согласно алгоритму $\Pi D_{\boldsymbol{n}}$ все Γ^ε можно покрыть кругами с центром в точках из множества T^δ радиусом $3\sqrt{2}\lambda + \sqrt{2}\tau/2$. Если это не так, то согласно п. (2) леммы 5 обязательно найдется точка сетки T, не принадлежащая множеству T^δ и находящаяся на расстоянии больше $3\sqrt{2}\lambda$ от множества T^δ, в которой функция H^δ больше порога P. Этого не может быть, поскольку в ходе работы алгоритма $\Pi D_{\boldsymbol{n}}$ перебираются все точки сетки T. Следовательно, $\mu(\Gamma^\varepsilon; T^\delta) \le 3\sqrt{2}\lambda + \sqrt{2}\tau/2$ и $\mu(\Gamma; T^\delta) \le 3\sqrt{2}\lambda + \sqrt{2}\tau/2 + \Theta h(\delta)$. Поскольку $h(\delta) = 4\sqrt{2}\delta^{1/2}$, то, учитывая условия на параметры, получаем требуемые оценки.

Докажем оценку (3). Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in T^\delta$. По построению множества T^δ алгоритмом $\Pi D_{\boldsymbol{n}}$ справедливо неравенство $\rho((x_1, y_1); (x_2, y_2)) > 3\sqrt{2}\lambda \ge 3\sqrt{2}\delta^{1/2}$.

Докажем оценки (4). Согласно оценке в п. (1) леммы 5 круг с центром в точке из множества T^δ радиусом $\sqrt{2}\lambda$ обязательно содержит точку из Γ. Пусть $(x^n, y^m) \in T^\delta$, тогда существует $(x, y) \in \Gamma$ такая, что $\rho((x^n, y^m); (x, y)) \le \sqrt{2}\lambda$. Аналогично для $(x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}}) \in T^\delta$ существует $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma$ такая, что $\rho((x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}}); (\bar{x}, \bar{y})) \le \sqrt{2}\lambda$. Ясно, что $\rho((x, y); (\bar{x}, \bar{y})) \ge \rho((x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}}); (x^n, y^m)) - 2\sqrt{2}\lambda$. Используя для первого слагаемого оценку из доказательства п. (3) настоящей теоремы, имеем $\rho((x, y); (\bar{x}, \bar{y})) \ge \sqrt{2}\lambda$. Следовательно, для количества точек множества T^δ справедлива оценка сверху

$$N(T^\delta) \le \frac{|\Gamma|}{\sqrt{2}\lambda} \le \frac{|\Gamma|}{\sqrt{2}\delta^{1/2}}.$$

Получим оценку снизу. В доказательстве п. (2) показано, что все Γ^ε можно покрыть кругами с центром в точках из множества T^δ радиусом $3\sqrt{2}\lambda + \sqrt{2}\tau/2$. Поскольку, учитывая условие

$\delta \le 1/49$, имеем $h(\delta) - (3\sqrt{2}\lambda + \sqrt{2}\tau/2) \ge \delta^{1/2}/\sqrt{2} > 0$, то количество таких кругов на Γ_k^ε должно быть не меньше

$$\frac{|\Gamma_k^\varepsilon|}{2(3\sqrt{2}\lambda + \sqrt{2}\tau/2)} \ge \frac{|\Gamma_k| - \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{7\sqrt{2}\delta^{1/2}} \ge \frac{|\Gamma_k|}{7\sqrt{2}\delta^{1/2}} - \frac{8\Theta}{7}.$$

При $\delta \le (S/(9\sqrt{2}\Theta))^2$ эта величина больше нуля для всех k. Суммируя по k, при выбранных параметрах получаем

$$N(T^\delta) \ge \frac{|\Gamma|}{7\sqrt{2}\delta^{1/2}} - \frac{8L\Theta}{7}.$$

Требуемая оценка получена, и теорема доказана.

Теорема 2. *В условиях рассматриваемой задачи для всех* $\delta \le \delta_0$, $\tau \le \delta$ *при связи параметров* (5.1) *и при выполнении условия разделимости* $\min\limits_{1\le k,j\le l,\, k\ne j} \rho(\Gamma_k^\varepsilon; \Gamma_j^\varepsilon) \ge h(\delta)$, *где* $\varepsilon = (\Theta_1 h(\delta), \Theta_2 h(\delta), \ldots, \Theta_l h(\delta))$, *алгоритм* $\Pi D_{\boldsymbol{n}}(\delta, f_{n,m}^\delta)$ *построит множество точек* $T^\delta = T_1^\delta \cup T_2^\delta$ *такое, что*

(1) *для всех точек* $(x^n, y^m) \in T_1^\delta$ *существует точка* $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Gamma^\varepsilon$ *такая, что*

$$\sin\left(\widehat{\boldsymbol{n}^\delta(x^n, y^m), \boldsymbol{n}}(\hat{x}, \hat{y})\right) \le \frac{4\sqrt{2}CB}{P^2}\delta^{1/2},$$

где $\boldsymbol{n}(\hat{x}, \hat{y})$ *— нормаль к линии* Γ *в точке* $(\hat{x}, \hat{y})$*;*

(2) *для количества точек множеств* T_1^δ *и* T_2^δ *справедливы оценки*

$$N(T_2^\delta) \le 8L\Theta, \quad \frac{1}{7\sqrt{2}}\frac{|\Gamma|}{\delta^{1/2}} - \frac{8L\Theta}{7} \le N(T_1^\delta) \le \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|\Gamma|}{\delta^{1/2}}.$$

Доказательство. При выборе $h(\delta) = 4\sqrt{2}\delta^{1/2}$ выполнено условие разделимости в леммах 5 и 7.

Докажем (1). Поскольку $(x^n, y^m) \in T^\delta$, то $H^\delta(x^n, y^m) > P$. Согласно п. (1) леммы 5 существует точка $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Gamma_k$ такая, что $\rho((x^n, y^m); (\hat{x}, \hat{y})) \le \sqrt{2}\lambda$. При этом, если $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Gamma_k^\varepsilon$, то считаем, что $(x^n, y^m) \in T_1^\delta$, если $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Gamma_k \setminus \Gamma_k^\varepsilon$, то считаем, что $(x^n, y^m) \in T_2^\delta$. Пусть $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Gamma_k^\varepsilon$, тогда $\boldsymbol{n}(\hat{x}, \hat{y})$ является нормалью отрезка Γ_k. По лемме 7 нормаль отрезка Γ_k совпадает с вектором $\boldsymbol{n}_k(x^n, y^m)$, для которого имеет место оценка

$$\sin(\widehat{\boldsymbol{n}^\delta(x^n, y^m), \boldsymbol{n}_k}(x^n, y^m)) \le \frac{4\sqrt{2}CB}{P^2}\delta^{1/2}.$$

Докажем (2). Поскольку $|\Gamma_k \setminus \Gamma_k^\varepsilon| = \varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}$, то $|\Gamma_k \setminus \Gamma_k^\varepsilon| \le 2\Theta h(\delta)$. Таким образом, для количества точек множества T_2^δ справедлива следующая оценка:

$$N(T_2^\delta) \le \frac{2\Theta L h(\delta)}{\sqrt{2}\lambda} \le 8L\Theta.$$

Оценка для $N(T_1^\delta)$ совпадает с оценкой количества точек для всего множества T^δ, полученной в п. (4) теоремы 1.

Теорема доказана.

Заключение. Самым любопытным с точки зрения использования оценок нормали в алгоритмах локализации является порядок аппроксимации. Напомним, что в [9] при другом выборе параметра регуляризации была получена оценка точности локализации порядка δ. Это существенно лучше оценки точности настоящей работы порядка $\delta^{1/2}$, полученной при $\lambda = O(\delta^{1/2})$. Однако при таком выборе λ оценка точности для нормали получается наилучшей. Следовательно, данным методом при одном и том же выборе параметра регуляризации не получается одновременно хорошо аппроксимировать и линию разрыва, и нормаль. Это обстоятельство ставит вопросы о конструировании алгоритмов совместной аппроксимации линии разрыва и нормали максимально возможного порядка по точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
2. **Vasin V. V., Ageev A. L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995. 255 c.
3. **Canny J.** A computational approach to edge detection // IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 1986. Vol. PAMI-8, no. 6. P. 679–698. doi: 10.1109/TPAMI.1986.4767851 .
4. **Малла С.** Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
5. **Гонсалес Р., Вудс Р.** Цифровая обработка изображений. (Изд. 3-е испр. и допол.). М.: Техносфера, 2012. 1104 с.
6. **Mafi M., Rajaei H., Cabrerizo M., Adjouadi M.** A robust edge detection approach un the presence of high impulse noise intensity through switching adaptive median and fixed weighted mean filtering // IEEE Trans. Image Process. 2018. Vol. 27, no. 11. P. 5475–5489. doi: 10.1109/TIP.2018.2857448 .
7. **Mozerov M., van de Weijer J.** Improved recursive geodesic distance computation for edge preserving filter // IEEE Trans. Image Process., 2017. Vol. 26, no. 8. P. 3696–3706.
8. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1(49). С. 3–13.
9. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** К вопросу о глобальной локализации линий разрыва функции двух переменных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 2. С. 12–23.
10. **Ageev A.L., Antonova T.V.** New methods for the localization of discontinuities of the first kind for functions of bounded variation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2013. Vol. 21. no. 2. P. 177–191. doi: 10.1515/jip-2012-0039 .
11. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 1. 8-е изд. М.: Физматлит, 2003. 680 с.
12. **Макаров Б.М., Подкорытов А.Н** Лекции по вещественному анализу. СПб.: БХВ–Петербург, 2011. 688 с.

Поступила 16.12.2021
После доработки 20.01.2022
Принята к публикации 24.01.2022

Агеев Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: ageev@imm.uran.ru

Антонова Татьяна Владимировна
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: tvantonova@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Methods for solutions of ill-posed problems. N.Y.: Wiley, 1977, 258 p. ISBN: 0470991240 . Original Russian text published in Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*, Moscow: Nauka Publ., 1979, 288 p.
2. Vasin V.V., Ageev A.L. *Ill-posed problems with a priori information.* Utrecht: VSP, 1995, 255 p. ISBN: 9789067641913 .
3. Canny J. A computational approach to edge detection. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 1986, vol. PAMI-8, no. 6, pp. 679–698. doi: 10.1109/TPAMI.1986.4767851 .
4. Mallat S. *A wavelet tour of signal processing: the sparse way.* NY: Acad. Press, 1999, 620 p. ISBN: 0-12-466606-X . Translated to Russian under the title *Veivlety v obrabotke signalov*, Moscow: Mir Publ., 2005, 671 p.

5. Gonzalez R.C., Woods R.E. *Digital image processing.* Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2006, 976 p. ISBN: 978-0131687288 . Translated to Russian under the title *Tsifrovaya obrabotka izobrazhenii*, Moscow: Tekhnosfera Publ., 2012, 1104 p.
6. Mafi M., Rajaei H., Cabrerizo M., Adjouadi M. A robust edge detection approach in the presence of high impulse noise intensity through switching adaptive median and fixed weighted mean filtering. *IEEE Trans. Image Process.*, 2018, vol. 27, no. 11, pp. 5475–5490. doi: 10.1109/TIP.2018.2857448 .
7. Mozerov M., van de Weijer J. Improved recursive geodesic distance computation for edge preserving filter. *IEEE Trans. Image Process.*, 2017, vol. 26, no. 8, pp. 3696–3706. doi: 10.1109/TIP.2017.2705427 .
8. Ageev A.L., Antonova T.V. Approximation of discontinuity lines of a noisy function of two variables. *J. Appl. Indust. Math.*, 2012, vol. 6, no. 3, pp. 269–279. doi: 10.1134/S1990478912030015 .
9. Ageev A.L., Antonova T.V. On the problem of global localization of discontinuity lines for a function of two variables. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 2, pp. 12–23. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-12-23 . (in Russian)
10. Ageev A.L., Antonova T.V. New methods for the localization of discontinuities of the first kind for functions of bounded variation. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2013, vol. 21, no. 2, pp. 177–191. doi: 10.1515/jip-2012-0039 .
11. Fikhtenholtz G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* (Course of differential and integral calculus). Vol. 1. Ed. 8. Moscow: Fizmatlit Publ., 2003, 680 p. ISBN: 5-9221-0156-0 .
12. Makarov B.M., Podkorytov A.N *Lektsii po veshchestvennomu analizu* (Lectures on real analysis). SPb.: BKHV–Peterburg, 2011, 688 p. ISBN: 9785977506311 .

Received December 16, 2021
Revised January 20, 2022
Accepted January 24, 2022

Alexander Leonidivich Ageev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: ageev@imm.uran.ru .

Tatiana Vladimirovna Antonova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: tvantonova@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. L. Ageev, T. V. Antonova. Approximation of the normal to the discontinuity lines of a noisy function. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 7–23.