ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 2 2022

УДК 519.17

О ГРАФАХ ШИЛЛА С $b = 6$ И $b_2 \neq c_2$[1]

В. В. Биткина, А. К. Гутнова

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ (с валентностью k) диаметра 3, имеющий второе собственное значение θ_1, равное $a = a_3$. В этом случае a делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Граф Шилла имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$. Дж .Кулен и Ж. Пак показали, что для заданного числа b существует только конечное число графов Шилла. Допустимые массивы пересечений графов Шилла для $b \in \{2, 3\}$ найдены в статье Дж. Кулена, Ж. Пака. В статье А. А. Махнева, И. Н. Белоусова найдены допустимые массивы пересечений графов Шилла для $b \in \{4, 5\}$. Там же доказано, что Q-полиномиальные графы Шилла с $b = 5$ не существуют, а также найдены Q-полиномиальные графы Шилла с $b = 6$. Q-полиномиальный граф Шилла с $b = 6$ имеет массив пересечений $\{42t, 5(7t + 1), 3(t + 3); 1, 3(t + 3), 35t\}$, где $t \in \{7, 12, 17, 27, 57\}$, $\{372, 315, 75; 1, 15, 310\}$, $\{744, 625, 125; 1, 25, 620\}$, $\{930, 780, 150; 1, 30, 775\}$, $\{312, 265, 48; 1, 24, 260\}$, $\{624, 525, 80; 1, 40, 520\}$, $\{1794, 1500, 200; 1, 100, 1495\}$ или $\{5694, 4750, 600; 1, 300, 4745\}$. Ранее было доказано, что графы с массивами пересечений $\{372, 315, 75; 1, 15, 310\}$, $\{744, 625, 125; 1, 25, 620\}$, $\{1794, 1500, 200; 1, 100, 1495\}$ и $\{42t, 5(7t + 1), 3(t + 3); 1, 3(t + 3), 35t\}$ не существуют. В работе доказано, что дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{312, 265, 48; 1, 24, 260\}$, $\{624, 525, 80; 1, 40, 520\}$ и $\{930, 780, 150; 1, 30, 775\}$ не существуют.

Ключевые слова: граф Шилла, дистанционно регулярный граф, Q-полиномиальный граф.

V. V. Bitkina, A. K. Gutnova. On Shilla graphs with $b = 6$ and $b_2 \neq c_2$.

A Shilla graph is a distance-regular graph Γ (with valency k) of diameter 3 that has second eigenvalue θ_1 equal to $a = a_3$. In this case a divides k and the parameter $b = b(\Gamma) = k/a$ is defined. A Shilla graph has intersection array $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$. J. Koolen and J. Park showed that for fixed b there are finitely many Shilla graphs. Admissible intersection arrays of Shilla graphs were found for $b \in \{2, 3\}$ by Koolen and Park in 2010 and for $b \in \{4, 5\}$ by A. A. Makhnev and I. N. Belousov in 2021. Makhnev and Belousov also proved the nonexistence of Q-polynomial Shilla graphs with $b = 5$ and found Q-polynomial Shilla graphs with $b = 6$. A Q-polynomial Shilla graph with $b = 6$ has intersection array $\{42t, 5(7t+1), 3(t+3); 1, 3(t+3), 35t\}$ with $t \in \{7, 12, 17, 27, 57\}$, $\{372, 315, 75; 1, 15, 310\}$, $\{744, 625, 125; 1, 25, 620\}$, $\{930, 780, 150; 1, 30, 775\}$, $\{312, 265, 48; 1, 24, 260\}$, $\{624, 525, 80; 1, 40, 520\}$, $\{1794, 1500, 200; 1, 100, 1495\}$, or $\{5694, 4750, 600; 1, 300, 4745\}$. The nonexistence of graphs with intersection arrays $\{372, 315, 75; 1, 15, 310\}$, $\{744, 625, 125; 1, 25, 620\}$, $\{1794, 1500, 200; 1, 100, 1495\}$, and $\{42t, 5(7t+1), 3(t+3); 1, 3(t+3), 35t\}$ was proved earlier. We prove that distance-regular graphs with intersection arrays $\{312, 265, 48; 1, 24, 260\}$, $\{624, 525, 80; 1, 40, 520\}$, and $\{930, 780, 150; 1, 30, 775\}$ do not exist.

Keywords: Shilla graph, distance-regular graph, Q-polynomial graph.

MSC: 20D05

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-74-83

Введение

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Пусть Γ — граф диаметра d, $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, и вершины u, w смежны в Γ_i, если $d_\Gamma(u, w) = i$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-02-2022-890.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, a_1 — степень локального подграфа (окрестности вершины). Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе Γ числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ (см. [1]).

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий второе собственное значение θ_1, равное $a = a_3$. В этом случае a делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Далее, $a_1 = a - b$ и Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$. Допустимые массивы пересечений графов Шилла найдены в [2] для $b \in \{2,3\}$ и в [3] для $b \in \{4,5\}$. В [3] доказано, что Q-полиномиальные графы Шилла с $b = 5$ не существуют. Там же найдены Q-полиномиальные графы Шилла с $b = 6$.

Предложение 1 [3, Theorem 1]. *Q-полиномиальный граф Шилла с $b = 6$ имеет массив пересечений*

(1) $\{42t, 5(7t+1), 3(t+3); 1, 3(t+3), 35t\}$, *где* $t \in \{7, 12, 17, 27, 57\}$;

(2) $\{372, 315, 75; 1, 15, 310\}$, $\{744, 625, 125; 1, 25, 620\}$ *или* $\{930, 780, 150; 1, 30, 775\}$;

(3) $\{312, 265, 48; 1, 24, 260\}$, $\{624, 525, 80; 1, 40, 520\}$, $\{1794, 1500, 200; 1, 100, 1495\}$ *или* $\{5694, 4750, 600; 1, 300, 4745\}$.

В работе изучаются Q-полиномиальные графы Шилла с массивами пересечений $\{312, 265, 48; 1, 24, 260\}$, $\{624, 525, 80; 1, 40, 520\}$ и $\{930, 780, 150; 1, 30, 775\}$.

Теорема 1. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений* $\{312, 265, 48; 1, 24, 260\}$ *и* $\{624, 525, 80; 1, 40, 520\}$ *не существуют.*

Теорема 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{930, 780, 150; 1, 30, 775\}$ *не существует.*

1. Тройные числа пересечений

В доказательстве теоремы используются тройные числа пересечений [4].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Пусть u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d. Через $\left\{ \begin{matrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{matrix} \right\}$ обозначим множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, а через $\left[\begin{matrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{matrix} \right]$ — число вершин в $\left\{ \begin{matrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{matrix} \right\}$. Числа $\left[\begin{matrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{matrix} \right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[\begin{matrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{matrix} \right]$ будем писать $[r_1r_2r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1r_2r_3]$ нет общих формул. Однако, в [4] изложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1r_2r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u,v)$, $U = d(v,w)$, $V = d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x,u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$ и сосчитав число вершин, находящихся на всех возможных расстояниях от третьей:

$$\begin{cases} \sum_{l}^{d}[ljh] = p_{jh}^{U} - [0jh], \\ \sum_{l}^{d}[ilh] = p_{ih}^{V} - [i0h], \\ \sum_{l}^{d}[ijl] = p_{ij}^{W} - [ij0]. \end{cases} \qquad (+)$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j| > W$ или $i+j < W$ имеем $p_{ij}^{W} = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, \ldots, d\}$.

Положим

$$S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th} \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}.$$

Если параметр Крейна $q_{ij}^{h} = 0$, то $S_{ijh}(u, v, w) = 0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{ijh\} = \left\{ \begin{matrix} uvw \\ ijh \end{matrix} \right\}$ и

$$[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}, \quad [ijh]' = \begin{bmatrix} uvw \\ ihj \end{bmatrix}, \quad [ijh]^{*} = \begin{bmatrix} uvw \\ jih \end{bmatrix}, \quad [ijh]^{\sim} = \begin{bmatrix} uvw \\ hji \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

В случаях $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$ или $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$ вычисление чисел $[ijh]' = \begin{bmatrix} uvw \\ ihj \end{bmatrix}$, $[ijh]^{*} = \begin{bmatrix} uvw \\ jih \end{bmatrix}$ и $[ijh]^{\sim} = \begin{bmatrix} uvw \\ hji \end{bmatrix}$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

2. Граф с массивом $\{312, 265, 48; 1, 24, 260\}$

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{312, 265, 48; 1, 24, 260\}$. Так как многочлен Тервиллигера (см. [5]) равен $-(x^2 - 20x + 244)(5x - 48)(x + 6)$, то неглавные собственные значения локального подграфа лежат в $[-6, 48/5) \cup \{46\}$.

Далее, Γ является формально самодуальным графом, имеет $1 + 312 + 3445 + 636 = 4394$ вершин, спектр $312^1, 52^{312}, 0^{3445}, -26^{636}$ и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 312 & 3445 & 636 \\ 1 & 52 & 0 & -53 \\ 1 & 0 & -13 & 12 \\ 1 & -26 & 65 & -40 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Для чисел пересечений графа* Γ *выполняются равенства*
(1) $p_{11}^{1} = 46$, $p_{21}^{1} = 265$, $p_{22}^{1} = 2650$, $p_{32}^{1} = 530$, $p_{33}^{1} = 106$;
(2) $p_{11}^{2} = 24$, $p_{12}^{2} = 240$, $p_{13}^{2} = 48$, $p_{22}^{2} = 2712$, $p_{23}^{2} = 492$, $p_{33}^{2} = 96$;
(3) $p_{12}^{3} = 260$, $p_{13}^{3} = 52$, $p_{22}^{3} = 2665$, $p_{23}^{3} = 520$, $p_{33}^{3} = 63$.

Доказательство следует из леммы 4.1.7 [1]. □

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, $\Omega = \Gamma_2(u)$ и $\Lambda = \Gamma_2(\Omega)$ — граф, у которого множество вершин совпадает с множеством вершин у Ω, и две вершины x и y в нем смежны тогда и только тогда, когда $d_{\Gamma}(x, y) = 2$. Тогда Λ — регулярный граф степени 2712 на 3445 вершинах.

Лемма 2. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 2$, $d(v,w) = 1$. *Тогда выполняются равенства*

$$[111] = -3r_3/10 - r_4/5 + 48/5, \quad [112] = [121] = 3r_3/10 + r_4/5 + 72/5,$$

$$[122] = -23r_3/10 - r_4/5 + 1008/5, \quad [123] = [132] = 2r_3 + 24, \quad [133] = -2r_3 + 24;$$

$$[211] = -7r_3/10 + r_4/5 + 182/5, \quad [212] = [221] = 7r_3/10 - r_4/5 + 1013/5,$$

$$[222] = 13r_3/10 - 4r_4/5 + 10497/5, \quad [223] = [232] = -2r_3 + r_4 + 410, \quad [233] = 2r_3 - r_4 + 82;$$

$$[311] = r_3, \quad [312] = [321] = -r_3+48, \quad [322] = r_3+r_4+348, \quad [323] = [332] = -r_4+96, \quad [333] = r_4,$$

где $r_3 \in \{0, 2, \ldots, 12\}$, $r_4 \in \{0, 1, \ldots, 48\}$ *и число* $3r_3 + 2r_4 + 4$ *делится на* 10.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Упрощение формул $(+)$ с использованием чисел пересечений, полученных в лемме 1, а также с учетом равенств

$$S_{113}(u,v,w) = S_{131}(u,v,w) = S_{311}(u,v,w) = 0. \qquad (**)$$

По лемме 2 имеем $2061 \leq [222] = (13r_3 - 8r_4 + 20994)/10 \leq 2115$.

Лемма 3. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 2$. *Тогда выполняются равенства*

$$[111] = r_7, \quad [112] = -3r_{10}/5 + 3r_{11}/10 - 3r_7 - 2r_8/5 + 4r_9/5 + 24,$$

$$[113] = 3r_{10}/5 - 3r_{11}/10 + 2r_7 + 2r_8/5 - 4r_9/5,$$

$$[121] = -r_{10} - r_7 + 24, \quad [122] = 8r_{10}/5 + 7r_{11}/10 + 3r_7 + 2r_8/5 - 4r_9/5 + 168,$$

$$[123] = -3r_{10}/5 - 7r_{11}/10 - 2r_7 - 2r_8/5 + 4r_9/5 + 48, \quad [131] = r_{10}, [132] = -r_{10} - r_{11} + 48, [133] = r_{11};$$

$$[211] = -3r_{10}/5 + 4r_{11}/5 - 3r_7 - 2r_8/5 + 3r_9/10 + 24,$$

$$[212] = 2r_{10}/5 - 17r_{11}/10 + 9r_7 + 8r_8/5 - 17r_9/10 + 168,$$

$$[213] = r_{10}/5 + 9r_{11}/10 - 6r_7 - 6r_8/5 + 7r_9/5 + 48,$$

$$[221] = 8r_{10}/5 - 4r_{11}/5 + 3r_7 + 2r_8/5 + 7r_9/10 + 168,$$

$$[222] = -7r_{10}/5 + 7r_{11}/10 - 9r_7 - 13r_8/5 + 7r_9/10 + 2195,$$

$$[223] = -r_{10}/5 + r_{11}/10 + 6r_7 + 11r_8/5 - 7r_9/5 + 348,$$

$$[231] = -r_{10} - r_9 + 48, \quad [232] = r_{10} + r_{11} + r_8 + r_9 + 348, \quad [233] = -r_{11} - r_8 + 96;$$

$$[311] = 3r_{10}/5 - 4r_{11}/5 + 2r_7 + 2r_8/5 - 3r_9/10, \quad [312] = r_{10}/5 + 7r_{11}/5 - 6r_7 - 6r_8/5 + 9r_9/10 + 48,$$

$$[313] = -4r_{10}/5 - 3r_{11}/5 + 4r_7 + 4r_8/5 - 3r_9/5, \quad [321] = -3r_{10}/5 + 4r_{11}/5 - 2r_7 - 2r_8/5 - 7r_9/10 + 48,$$

$$[322] = -r_{10}/5 - 7r_{11}/5 + 6r_7 + 11r_8/5 + r_9/10 + 348, \quad [323] = 4r_{10}/5 + 3r_{11}/5 - 4r_7 - 9r_8/5 + 3r_9/5 + 96,$$

$$[331] = r_9, \quad [332] = -r_8 - r_9 + 96, \quad [333] = r_8,$$

где $r_7, r_{10} \in \{0, 1, \ldots, 24\}$, $r_8 \in \{0, 1, \ldots, 76\}$, $r_9, r_{11} \in \{0, 1, \ldots, 48\}$ *и число* $4r_{10} + 3r_{11} - 4r_8 - 2r_9$ *делится на* 10.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Упрощение формул (+) с учетом равенств (**). $\square$

По лемме 3 имеем $1748 \le [222] = (-14r_{10} + 7r_{11} - 26r_8 + 7r_9)/10 - 9r_7 + 2195 \le 2262$. Так как $\{v, w\} \cup \Lambda(v) \cup \Lambda(v)$ содержит $5424 - [222]$ вершин, то $1979 \le [222]$.

Симметризация. По лемме 3, используя формулы (*), имеем равенства

$$[111] = r_7 = r_7' = r_7^* = r_7^{\sim}, \quad [131] = r_{10} = r_{10}^{\sim}, \quad [133] = r_{11} = r_{11}', \quad [331] = r_9 = r_9^*,$$

$$[333] = r_8 = r_8' = r_8^* = r_8^{\sim}, \quad [133] = r_{11} = r_{11}' = [331]^{\sim} = r_9^{\sim}.$$

Отсюда $r_{11} = r_{11}' = r_9^{\sim}$.

Далее,

$$[112] = -3r_{10}/5 + 3r_{11}/10 - 3r_7 - 2r_8/5 + 4r_9/5 + 24 = [121]' = -r_{10}' - r_7' + 24,$$

поэтому $(-6r_{10} + 3r_{11} - 4r_8 + 8r_9)/10 - 2r_7 + r_{10}' = 0$ и $-6r_{10} - 4r_8 + r_9$ делится на 10. Поэтому число r_9 четно.

Аналогично,

$$[112] = (-6r_{10}+6r_{11}-30r_7-4r_8+8r_9)/10+24 = [211]^{\sim} = (-6r_{10}^{\sim}+8r_{11}^{\sim}-30r_7^{\sim}-4r_8^{\sim}+3r_9^{\sim})/10+24,$$

поэтому $6r_{11} + 8r_9 = 8r_{11}^{\sim} + 3r_9^{\sim}$ и $r_9^{\sim} = 0$.

Число $-r_{10}^{\sim} + r_8^{\sim} + 3r_9^{\sim} = -r_{10} + r_8 + 3r_{11}$ делится на 10, поэтому $-r_{10} + r_8$ делится на 10.

Подсчитаем число d пар вершин y, z на расстоянии 3 в графе Ω, где $y \in \left\{ \begin{matrix} uv \\ 21 \end{matrix} \right\}$ и $z \in \left\{ \begin{matrix} uv \\ 22 \end{matrix} \right\}$. С одной стороны, по лемме 2 имеем $[223] = -2r_3 + r_4 + 410$, где $r_3 \in \{0, 2, \ldots, 12\}$, $r_4 \in \{0, 1, \ldots, 48\}$ и число $3r_3 + 2r_4 + 4$ делится на 10, поэтому $44640 = 240(-24 + 210) \le d \le 240(48 + 410) = 109920$. С другой стороны, по лемме 3 имеем

$$[213] = (2r_{10} - 60r_7 - 12r_8)/10 + 48,$$

поэтому $44640 \le d = \sum_i (2r_{10}^i - 60r_7^i - 12r_8^i)/10 + 130176 \le 109920$. Отсюда

$$202560 \le \sum_i (-2r_{10}^i + 60r_7^i + 12r_8^i) \le 855360 \quad \text{и} \quad 74.69 \le \sum_i (-2r_{10}^i + 60r_7^i + 12r_8^i)/2712 \le 315.4.$$

Таким образом, $55.469 \le \sum_i [213]^i \le 79.54$. Противоречие с тем, что $[231] = -r_{10} - r_9 + 48 \le 48$.

Итак, дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{312, 265, 48; 1, 24, 260\}$ не существует. $\square$

3. Граф с массивом $\{624, 525, 80; 1, 40, 520\}$

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{624, 525, 80; 1, 40, 520\}$. Так как многочлен Тервиллигера (см. [5]) равен $-5(x+6)(x-14)(x-20)(x-34)$, то неглавные собственные значения локального подграфа лежат в $[-6, 14] \cup \{20\} \cup \{98\}$.

Далее, Γ имеет $1 + 624 + 8190 + 1260 = 10075$ вершин, спектр $624^1, 104^{372}, 4^{7098}, -26^{2604}$ и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 372 & 7098 & 2604 \\ 1 & 62 & 91/2 & -217/2 \\ 1 & 0 & -65/3 & 62/3 \\ 1 & -31 & 338/3 & -248/3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что кратность $m_1 = 372$ собственного значения $\theta_1 = 104$ меньше k. По следствию теоремы 4.4.4 из [1] для $b = b_1/(\theta_1+1) = 5$ граф $\Sigma = [u]$ имеет собственное значение $-1-b = -6$ кратности по крайней мере $k - m_1 = 520$.

Лемма 4. *Для чисел пересечений графа* Γ *выполняются равенства*
(1) $p^1_{11} = 98$, $p^1_{21} = 525$, $p^1_{32} = 1050$, $p^1_{22} = 6615$, $p^1_{33} = 210$;
(2) $p^2_{11} = 40$, $p^2_{12} = 504$, $p^2_{13} = 80$, $p^2_{22} = 6665$, $p^2_{23} = 1020$, $p^2_{33} = 160$;
(3) $p^3_{12} = 520$, $p^3_{13} = 104$, $p^3_{22} = 6630$, $p^3_{23} = 1040$, $p^3_{33} = 115$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из леммы 4.1.7 [1]. $\square$

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, $\Delta = \Gamma_3(u)$ и $\Sigma = \Delta_2$. Тогда Σ — регулярный граф степени 1040 на 1260 вершинах.

Лемма 5. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 3, d(v,w) = 1$. *Тогда выполняются равенства:*

$$[122] = 4/3\, r_{23} + 1300/3, \quad [123] = [132] = -4/3\, r_{23} + 260/3, \quad [133] = 4/3\, r_{23} + 52/3;$$

$$[211] = 2/3\, r_{23} + 230/3, \quad [212] = [221] = -2/3\, r_{23} + 1330/3, \quad [222] = -5/3\, r_{23} + 16015/3,$$

$$[223] = [232] = 7/3\, r_{23} + 2545/3, \quad [233] = -7/3\, r_{23} + 575/3;$$

$$[311] = -2/3\, r_{23} + 64/3, \quad [312] = [321] = 2/3\, r_{23} + 245/3, \quad [322] = 1/3\, r_{23} + 2530/3,$$

$$[323] = [332] = -r_{23} + 115, \quad [333] = r_{23},$$

где $r_{23} \in \{0, 1, \ldots, 32\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Упрощение формул (+) с использованием чисел пересечений, полученных в лемме 4, а также с учетом равенств (∗∗). $\square$

По лемме 5 имеем $844 \leq [322] = (r_{23} + 2530)/3 \leq 854$.

Лемма 6. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 3, d(v,w) = 2$. *Тогда выполняются равенства:*

$$[122] = -16/11\, r_{32} + 4/11\, r_{33} + 4860/11, \quad [123] = [132] = 16/11\, r_{32} - 4/11\, r_{33} + 860/11,$$

$$[133] = -16/11\, r_{32} + 4/11\, r_{33} + 284/11;$$

$$[211] = -r_{32} + 40, \quad [212] = 221] = 17/11\, r_{32} + 4/11\, r_{33} + 4420/11,$$

$$[213] = [231] = -6/11\, r_{32} - 4/11\, r_{33} + 860/11, \quad [222] = -7/11\, r_{32} - 23/11\, r_{33} + 59395/11,$$

$$[223] = [232] = -10/11\, r_{32} + 19/11\, r_{33} + 9115/11, \quad [233] = 16/11\, r_{32} - 15/11\, r_{33} + 1465/11;$$

$$[311] = r_{32}, \quad [312] = [321] = -17/11\, r_{32} - 4/11\, r_{33} + 1124/11,$$

$$[313] = [331] = 6/11\, r_{32} + 4/11\, r_{33} + 20/11, \quad [322] = 23/11\, r_{32} + 19/11\, r_{33} + 9060/11,$$

$$[323] = [332] = -6/11\, r_{32} - 15/11\, r_{33} + 1245/11, \quad [333] = r_{33},$$

где $r_{32} \in \{0, 1, \ldots, 35\}$, $r_{33} \in \{0, 1, \ldots, 83\}$ *и* $r_{32} - 3r_{33} + 7$ *делится на* 11.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Упрощение формул (+) с учетом равенств (∗∗). $\square$

По лемме 6 имеем $824 \leq [322] = (23r_{32} + 19r_{33} + 9060)/11 \leq 1039$.

Подсчитаем число d пар вершин y, z на расстоянии 1 в графе Δ, где $y \in \begin{Bmatrix} uv \\ 21 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} uv \\ 22 \end{Bmatrix}$. Напомним, что $p^3_{13} = 104$, $p^3_{23} = 1040$ и $p^3_{33} = 115$. С одной стороны, по лемме 5 имеем $[221] = (-2r_{23} + 1330)/3$, где $r_{23} \in \{0, 1, \ldots, 32\}$, значит, $43888 = 104(-64 + 1330)/3 \leq d \leq 104 \cdot 1329/3 = 46072$. С другой стороны, по лемме 6 имеем $[211] = -r_{32} + 40$, поэтому

$$43888 \leq d = -\sum_i r^i_{32} + 41600 \leq 46072;$$

противоречие.

Итак, дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{624, 525, 80; 1, 40, 520\}$ не существует. $\square$

Теорема 1 доказана. $\square$

4. Граф с массивом $\{930, 780, 150; 1, 30, 775\}$

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{930, 780, 150; 1, 30, 775\}$. Так как многочлен Тервиллигера (см. [5]) равен $-30(x+6)(x+1)(x-25)(x-119)$, то неглавные собственные значения локального подграфа лежат в $[-6, -1] \cup \{25\} \cup \{149\}$.

Далее, Γ является формально самодуальным графом, имеет $1 + 930 + 24180 + 4680 = 29791$ вершин, спектр $930^1, 155^{930}, 0^{24180}, -31^{4680}$ и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 930 & 24180 & 4680 \\ 1 & 155 & 0 & -156 \\ 1 & 0 & -31 & 30 \\ 1 & -31 & 155 & -125 \end{pmatrix}.$$

Лемма 7. *Для чисел пересечений графа* Γ *выполняются равенства*
(1) $p^1_{11} = 149$, $p^1_{21} = 780$, $p^1_{32} = 3900$, $p^1_{22} = 19500$, $p^1_{33} = 780$;
(2) $p^2_{11} = 30$, $p^2_{12} = 750$, $p^2_{13} = 150$, $p^2_{22} = 19649$, $p^2_{23} = 3780$, $p^2_{33} = 750$;
(3) $p^3_{12} = 775$, $p^3_{13} = 155$, $p^3_{22} = 19530$, $p^3_{23} = 3875$, $p^3_{33} = 649$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из леммы 4.1.7 [1]. □

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, $\Omega = \Gamma_2(u)$ и $\Lambda = \Omega_2$. Тогда Λ — регулярный граф степени 19649 на 24180 вершинах.

Лемма 8. *Пусть* $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 3$. *Тогда выполняются равенства:*

$$[112] = r_{12}/24 - 3/2\, r_{13} - 9/20\, r_{14} - 2075/24, \quad [113] = -r_{12}/24 + 3/2\, r_{13} + 9/20\, r_{14} + 2795/24,$$

$$[121] = -r_{13} + 30, \quad [122] = -r_{12}/24 + 15r_{13}/2 + 29/20\, r_{14} + 15755/24,$$

$$[123] = r_{12}/24 - 13/2\, r_{13} - 29/20\, r_{14} + 1525/24, \quad [131] = r_{13},$$

$$[132] = -6\, r_{13} - r_{14} + 180, \quad [133] = 5\, r_{13} + r_{14} - 30;$$

$$[212] = -r_{12}/24 + 3/2\, r_{13} + 29/20\, r_{14} + 17075/24, \quad [213] = r_{12}/24 - 3/2\, r_{13} - 29/20\, r_{14} + 925/24,$$

$$[221] = 5r_{12}/24 - 3/2\, r_{13} - 5/4\, r_{14} + 305/24, \quad [222] = -23r_{12}/24 - 3r_{13}/2 - 29/20\, r_{14} + 454501/24,$$

$$[223] = 3r_{12}/4 + 3\, r_{13} + 27/10\, r_{14} + 2795/4, \quad [231] = -5r_{12}/24 + 3/2\, r_{13} + 5/4\, r_{14} + 17695/24,$$

$$[232] = r_{12}, \quad [233] = -19r_{12}/24 - 3r_{13}/2 - 5/4\, r_{14} + 73001/24;$$

$$[312] = -r_{14} + 150, \quad [313] = r_{14}, \quad [321] = -5r_{12}/24 + 5/2r_{13} + 5/4\, r_{14} + 17575/24,$$

$$[322] = r_{12} - 6\, r_{13} - 65, \quad [323] = -19r_{12}/24 + 7/2\, r_{13} - 5/4\, r_{14} + 74705/24,$$

$$[331] = 5r_{12}/24 - 5/2\, r_{13} - 5/4\, r_{14} - 13975/24, \quad [332] = -r_{12} + 6\, r_{13} + r_{14} + 3695,$$

$$[333] = 19r_{12}/24 - 7/2\, r_{13} + 1/4\, r_{14} - 56705/24,$$

где $r_{12} \in \{2975, 2976, \ldots, 3779\}$, $r_{13} \in \{0, 1, \ldots, 30\}$, $r_{14} \in \{0, 5, 10, \ldots, 130\}$ *и число* $5r_{12} + 60r_{13} - 54r_{14} - 55$ *делится на* 120.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Упрощение формул (+) с использованием чисел пересечений, полученных в лемме 7, а также с учетом равенств (∗∗). □

По лемме 8 имеем $15083 \le [222] = -23r_{12}/24 - 3r_{13}/2 - 29r_{14}/20 + 454501/24 \le 16086$. Так как $\{v, w\} \cup \Lambda(v) \cup \Lambda(v)$ содержит $39300 - [222]$ вершин, то $15120 \le [222]$.

Число d ребер между $\Lambda(w)$ и $\Lambda - (\{w\} \cup \Lambda(w))$ удовлетворяет неравенствам

$$68602350 = 750 \cdot 15265 + 3780 \cdot 15120 \le d \le 750 \cdot 16013 + 3780 \cdot 16086 = 72814830,$$

$$3491.39 \le 19648 - \lambda \le 3705.8 \;\text{ и }\; 15942.2 \le \lambda \le 16156.61,$$

где λ — среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$.

Лемма 9. *Пусть $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 2$, $r_9 = 5s$. Тогда выполняются равенства:*

$$[111] = r_7, \quad [112] = -19r_{10}/6 + 44s/6 - 6r_7 - r_8/6 + 30, \quad [113] = 19r_{10}/6 - 44s/6 + 5r_7 + r_8/6,$$

$$[121] = -r_{10} - r_7 + 30, \quad [122] = 25r_{10}/6 - 14s/6 + 6r_7 + r_8/6 + 570,$$

$$[123] = -19r_{10}/6 + 14s/6 - 5r_7 - r_8/6 + 150, \quad [131] = r_{10}, \quad [132] = -r_{10} - 5s + 150, \quad [133] = 5s;$$

$$[211] = -19r_{10}/6 + 44s/6 - 6r_7 - r_8/6 + 30, \quad [212] = 103r_{10}/6 - 139s/3 + 36r_7 + 7r_8/6 + 570,$$

$$[213] = -14r_{10} + 39s - 30r_7 - r_8 + 150, \quad [221] = 25r_{10}/6 - 19s/6 + 6r_7 + r_8/6 + 570,$$

$$[222] = -109r_{10}/6 + 109s/3 - 36r_7 - 13r_8/6 + 16198, \quad [223] = 14r_{10} - 34s + 30r_7 + 2r_8 + 2880,$$

$$[231] = -r_{10} - 5s + 150, \quad [232] = r_{10} + 10s + r_8 + 2880, \quad [233] = -5s - r_8 + 750;$$

$$[311] = 19r_{10}/6 - 44s/6 + 5r_7 + r_8/6, \quad [312] = -14r_{10} + 39s - 30r_7 - r_8 + 150,$$

$$[313] = 65r_{10}/6 - 190s/6 + 25r_7 + 5r_8/6, \quad [321] = -19r_{10}/6 + 14s/6 - 5r_7 - r_8/6 + 150,$$

$$[322] = 14r_{10} - 34s + 30r_7 + 2r_8 + 2880, \quad [323] = -65r_{10}/6 + 190s/6 - 25r_7 - 11r_8/6 + 750,$$

$$[331] = 5s, \quad [332] = -r_8 - 5s + 750, \quad [333] = r_8,$$

где $r_7 \in \{0,1,\ldots,30\}$, $r_{10} \in \{0,3,\ldots,30\}$, $r_8 \in \{0,3,\ldots,672\}$, $s \in \{0,6,\ldots,30\}$ и число $r_{10} - r_8$ делится на 6.

Доказательство. Упрощение формул (+) дает равенства

$$[111] = r_7, \quad [112] = -19r_{10}/6 + 19r_{11}/30 - 6r_7 - r_8/6 + 5/6\, r_9 + 30,$$

$$[113] = 19r_{10}/6 - 19r_{11}/30 + 5r_7 + 1/6\, r_8 - 5/6\, r_9, \quad [121] = -r_{10} - r_7 + 30,$$

$$[122] = 25r_{10}/6 + 11r_{11}/30 + 6r_7 + r_8/6 - 5/6\, r_9 + 570,$$

$$[123] = -19r_{10}/6 - 11r_{11}/30 - 5r_7 - r_8/6 + 5/6\, r_9 + 150,$$

$$[131] = r_{10}, \quad [132] = -r_{10} - r_{11} + 150, \quad [133] = r_{11};$$

$$[211] = -19r_{10}/6 + 5r_{11}/6 - 6r_7 - r_8/6 + 19/30\, r_9 + 30,$$

$$[212] = 103r_{10}/6 - 139r_{11}/30 + 36r_7 + 7r_8/6 - 139r_9/30 + 570,$$

$$[213] = -14r_{10} + 19r_{11}/5 - 30r_7 - r_8 + 4\, r_9 + 150, \quad [221] = 25r_{10}/6 - 5r_{11}/6 + 6r_7 + r_8/6 + 11r_9/30 + 570,$$

$$[222] = -109r_{10}/6 + 109r_{11}/30 - 36r_7 - 13r_8/6 + 109r_9/30 + 16198,$$

$$[223] = 14r_{10} - 14r_{11}/5 + 30\, r_7 + 2\, r_8 - 4\, r_9 + 2880, \quad [231] = -r_{10} - r_9 + 150,$$

$$[232] = r_{10} + r_{11} + r_8 + r_9 + 2880, \quad [233] = -r_{11} - r_8 + 750;$$

$$[311] = 19r_{10}/6 - 5r_{11}/6 + 5r_7 + 1/6\, r_8 - 19/30\, r_9, \quad [312] = -14r_{10} + 4r_{11} - 30\, r_7 - r_8 + 19/5\, r_9 + 150,$$

$$[313] = 65r_{10}/6 - 19r_{11}/6 + 25r_7 + 5r_8/6 - 19/6\, r_9,$$

$$[321] = -19r_{10}/6 + 5r_{11}/6 - 5r_7 - r_8/6 - 11/30\, r_9 + 150,$$

$$[322] = 14r_{10} - 4r_{11} + 30\, r_7 + 2\, r_8 - 14/5\, r_9 + 2880,$$

$$[323] = -65r_{10}/6 + 19r_{11}/6 - 25r_7 - 11r_8/6 + 19/6\, r_9 + 750,$$

$$[331] = r_9, \quad [332] = -r_8 - r_9 + 750, \quad [333] = r_8,$$

где $r_7, r_{10} \in \{0,1,\ldots,30\}$, $r_8 \in \{0,1,\ldots,672\}$, $r_9, r_{11} \in \{0,1,\ldots,150\}$ и число $5r_{10} + 19r_{11} - 5r_8 + 19r_9$ делится на 30.

Симметризация. Используя формулы (*), имеем равенства

$$[111] = r_7 = r_7' = r_7^* = r_7^{\sim}, \quad [131] = r_{10} = r_{10}^{\sim}, \quad [133] = r_{11} = r_{11}',$$

$$[331] = r_9 = r_9^*, \quad [333] = r_8 = r_8' = r_8^* = r_8^{\sim}.$$

Отсюда $[133] = r_{11} = r_{11}' = [331]^{\sim} = r_9^{\sim}$, и $r_{11} = r_{11}' = r_9^{\sim}$.

Далее,

$$[313] = 65r_{10}/6 - 190s/6 + 25r_7 + 5r_8/6 = [133]^* = r_{11}^*$$

и $13r_{10}/6 - 44s/6 + 5r_7 + r_8/6 = 0$, поэтому $r_{10} + r_8 - 2s$ делится на 6. С учетом делимости $-r_{10} + 10s + r_8$ на 6 число r_{10} делится на 3, $r_{10} + r_8$ четно и $2s - r_8$ делится на 3.

Так как $[221] = 25r_{10}/6 - 19s/6 + 6r_7 + r_8/6 + 570$, то число s четно и $-s + r_8$ делится на 3. Отсюда s делится на 6, r_8 делится на 3 и выполняются равенства из заключения леммы. □

По лемме 9 имеем $13117 \le [222] = -109r_{10}/6 + 109s/3 - 36r_7 - 13r_8/6 + 16198 \le 17288$. Так как $\{v, w\} \cup \Lambda(v) \cup \Lambda(v)$ содержит $39298 - [222]$ вершин, то $15118 \le [222]$.

Подсчитаем число g пар вершин y, z на расстоянии 2 в графе Δ, где $y \in \begin{Bmatrix} uv \\ 23 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} uv \\ 22 \end{Bmatrix}$. Напомним, что $p_{13}^3 = 155$, $p_{23}^3 = 3875$ и $p_{33}^3 = 649$. С одной стороны, по лемме 8 имеем

$$[222] = -23r_{12}/24 - 3r_{13}/2 - 29r_{14}/20 + 454501/24,$$

поэтому

$$9812880 = 649 \cdot 15120 \le g \le 649 \cdot 16086 = 10439814.$$

С другой стороны, по лемме 9 имеем $[232] = r_{10} + 10s + r_8 + 2880$, поэтому

$$9812880 \le g = \sum_i (r_{10}^i + r_8^i + 10s^i) + 11160000 \le 10439814;$$

противоречие.

Итак, дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{930, 780, 150; 1, 30, 775\}$ не существует. □

Теорема 2 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.** Distance-Regular Graphs. Berlin; Heidelberg; NY: Springer-Verlag, 1989. 495 p. ISBN: 0387506195.
2. **Koolen J. H., Park J.** Shilla distance-regular graphs // European J. Comb. 2010. Vol. 31, no. 8. P. 2064–2073. doi: 10.1016/j.ejc.2010.05.012.
3. **Belousov I. N., Makhnev A. A.** Shilla graphs with $b = 5$ and $b = 6$ // Ural Math. J. 2021. Vol. 7, no. 2. P. 51–58. doi: 10.15826/umj.2021.2.004.
4. **Jurishich A., Vidali J.** Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // Des. Codes Cryptogr. 2012. Vol. 65. P. 29–47.
5. **Gavrilyuk A. L., Koolen J. H.** A characterization of the graphs of bilinear $(d \times d)$-forms over $\mathbb{F}_2$ // Combinatorika. 2010. Vol. 39. P. 289–321.

Поступила 17.02.2022

После доработки 28.04.2022

Принята к публикации 30.04.2022

Биткина Виктория Васильевна
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры прикладной математики и информатики
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова
г. Владикавказ
e-mail: bviktoriyav@mail.ru

Гутнова Алина Казбековна
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры прикладной математики и информатики
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова
г. Владикавказ
e-mail: gutnovaalina@gmail.com

REFERENCES

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs.* Berlin; Heidelberg; NY: Springer-Verlag, 1989, 495 p. ISBN: 0387506195 .
2. Koolen J.H., Park J. Shilla distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, 2010, vol. 31, no. 8, pp. 2064–2073. doi: 10.1016/j.ejc.2010.05.012 .
3. Makhnev A.A., Belousov I.N. Shilla graphs with $b = 5$ and $b = 6$. *Ural Math. J.*, 2021, vol. 7, no. 2, pp. 51–58. doi: 10.15826/umj.2021.2.004 .
4. Jurisic A., Vidali J. Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3. *Des. Codes Cryptogr.*, 2012, vol. 65, pp. 29–47.
5. Gavrilyuk A.L., Koolen J. A characterization of the graphs of bilinear $(d \times d)$-forms over $\mathbb{F}_2$. *Combinatorica*, 2019, vol. 39, no. 2, pp. 289–321. doi: 10.1007/s00493-017-3573-4 .

Received February 17, 2022
Revised April 28, 2022
Accepted April 30, 2022

Funding Agency: This study supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2022-890).

Viktoriya V. Bitkina, Cand. Phys.-Math. Sci., North Ossetian State University, Vladikavkaz, 362025 Russia, e-mail: bviktoriyav@mail.ru .

Alina K. Gutnova, Cand. Phys.-Math. Sci., North Ossetian State University, Vladikavkaz, 362025 Russia, e-mail: gutnovaalina@gmail.com .

Cite this article as: V. V. Bitkina, A. K. Gutnova. On Shilla graphs with $b = 6$ and $b_2 \neq c_2$, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 74–83 .