

УДК 519.62

ОБЪЕКТ, ОБХОДЯЩИЙ ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА, И ТРАЕКТОРИЯ НАБЛЮДАТЕЛЯ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹

В. И. Бердышев

Автономный объект t , движущийся в условиях наблюдения в \mathbb{R}^2 с постоянной скоростью по кратчайшей кривой \mathcal{T}_t с заданными начальной и конечной точками, обходит упорядоченную совокупность попарно не пересекающихся выпуклых множеств. Задача наблюдателя f состоит в поиске траектории движения \mathcal{T}_f такой, что в каждый момент времени он находится на заданном расстоянии от объекта при ограничении сверху на величину его скорости. В работе предлагаются возможные варианты движения наблюдателя, отслеживающего перемещение объекта t на различных участках траектории \mathcal{T}_t .

Ключевые слова: навигация, оптимальная траектория, движущийся объект, наблюдатель.

V. I. Berdyshev. An object bypassing convex sets and an observer's trajectory in two-dimensional space.

An autonomous object t moving under observation in \mathbb{R}^2 with constant speed along a shortest curve \mathcal{T}_t with given initial and final points bypasses an ordered family of pairwise disjoint convex sets. The aim of the observer f , whose speed is upper bounded, is to find a trajectory \mathcal{T}_f on which the distance to the observer is at each time a certain prescribed value. Possible variants of motion are given for the observer f , who tracks the object on different segments of the trajectory \mathcal{T}_t .

Keywords: navigation, optimal trajectory, moving object, observer.

MSC: 00A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-66-73

1. Автономный объект t движется с постоянной скоростью $V(\cdot) = V_t(\cdot)$ по кратчайшей траектории \mathcal{T} , последовательно огибающей выпуклые попарно не пересекающиеся множества из заданного упорядоченного набора $\{G_i\}_1^k$. Начальная и конечная точки траектории обозначаются через t_* , t^* , ($t_*, t^* \notin \cup G_i$). Задача наблюдателя $f = f_\tau$ — поиск траектории \mathcal{T}_f , позволяющей ему двигаться с возможно малой скоростью V_f и держать объект $t = t_\tau$ в поле зрения в каждый момент времени τ на расстоянии δ : $\|t_\tau - f_\tau\| = \delta$, где $\delta > 0$ — заданное число. В работе предлагаются варианты искомым траекторий \mathcal{T}_f .

Кратчайшая траектория \mathcal{T}_t объекта состоит из набора дуг (см. рис. 1)

$$\widehat{\underline{t}_1, \bar{t}_1} \subset \partial G_1, \dots, \widehat{\underline{t}_i, \bar{t}_i} \subset \partial G_i, \dots, \widehat{\underline{t}_k, \bar{t}_k} \subset \partial G_k \quad (1)$$

и касательных к G_i отрезков

$$[t_*, \underline{t}_1], [\bar{t}_1, \underline{t}_2], \dots, [\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}] \dots [\bar{t}_k, t^*], \quad t_* = \bar{t}_0, \quad t^* = \underline{t}_{k+1}, \quad (2)$$

где ∂G — граница множества G . Обозначим

$$\Delta_i = \widehat{\underline{t}_i, \bar{t}_i}, \quad \Lambda_i = [\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}].$$

Достаточно рассмотреть такое расположение множеств G_i , когда “соседние” множества G_i , G_{i+1} разделяются прямой $\bar{t}_i, \underline{t}_{i+1}$, содержащей точки \bar{t}_i , \underline{t}_{i+1} (см. рис. 1). В самом деле, если пара G_i , G_{i+1} не разделяется этой прямой, то, заменив ее на выпуклую оболочку $\text{conv}(G_i, G_{i+1})$, получим задачу с меньшим количеством выпуклых множеств. Кроме того, угол между векторами скорости $V(\underline{t}_i)$, $V(\bar{t}_i)$ не превосходит 180° .

¹Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2022-874).

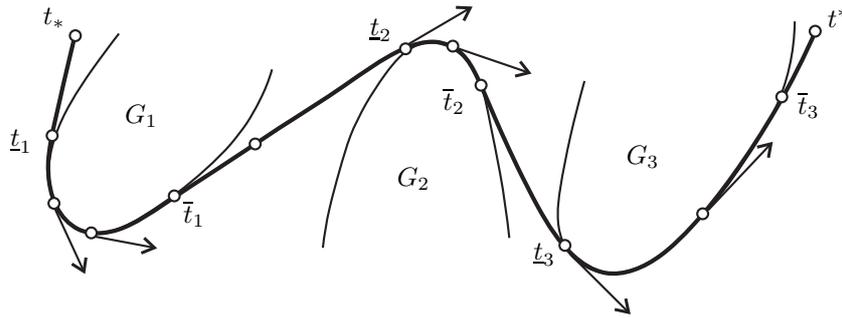


Рис. 1. Тонкими линиями отмечены границы множеств G_i , жирной линией изображена траектория \mathcal{T}_t , короткими отрезками — векторы скорости $V(t)$.

2. Простейший способ движения наблюдателя — движение по траектории

$$\mathcal{T}_f = \left\{ f = t \pm \delta \cdot \frac{V(t)}{|V(t)|} : t \in \mathcal{T}_t \right\}$$

вперед или за объектом с переменным вектором наблюдения $b = \frac{V(t)}{|V(t)|}$, с величиной скорости, зависящей от кривизны траектории \mathcal{T}_t . Эта скорость может принимать большие значения даже в случае гладкой траектории. В самом деле, представив фрагменты траекторий \mathcal{T}_t и \mathcal{T}_f графиками функций $t(\tau)$, $f(\tau)$ от времени (рис. 2), получим (см. [1, рис. 2]) выражение

$$V_f(\tau) = [1 + f'(\tau)^2]^{1/2} = \left\{ 1 + \left[t'(\tau) \pm \delta \frac{t''(\tau)}{(1 + t'(\tau)^2)^{3/2}} \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (3)$$

содержащее фактически формулу кривизны кривой $t(\tau)$ в точке τ .

Следует отметить нецелесообразность движения наблюдателя непосредственно по траектории \mathcal{T}_t вслед за t в случае строгой выпуклости или негладкости этой траектории из-за риска упустить t из зоны видимости.

3. Движение наблюдателя определяется видом участка (см. (1), (2)) траектории наблюдаемого объекта. Если этот участок — гладкая дуга Δ_i приемлемо малой кривизны, то наблюдателю целесообразно использовать траекторию $f = t + \delta \frac{V(t)}{|V(t)|}$ ($t \in \Delta_i \cup \Lambda_i$) движения вперед объекта t .

Для отслеживания объекта, движущегося по дуге Δ_i с большой кривизной (в частности, по негладкой дуге), можно использовать “освещенную” часть траектории \mathcal{T}_t : пусть $b = b_i = \frac{\underline{t}_{i+1} - \bar{t}_i}{\|\underline{t}_{i+1} - \bar{t}_i\|}$ — вектор, определяющий направление наблюдения, и пучок сонаправленных с ним

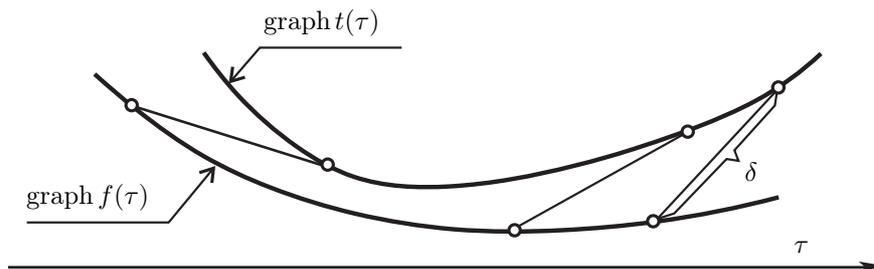


Рис. 2. Жирными линиями изображены траектории \mathcal{T}_t , \mathcal{T}_f , отрезками — векторы направления $-V(t)$ длины δ .

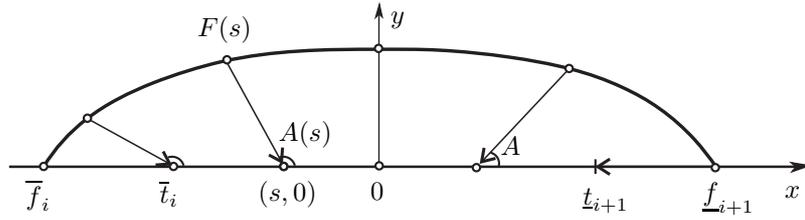


Рис. 4. Отрезками $[s, F(s)]$ обозначены векторы наблюдения.

Пример 1. Пусть $i = 1$. Зададим $Y > 0$, и пусть X — координата точки $\underline{t}_2 = (X, 0)$. Для точки $(s, 0)$, $s \geq 0$, определим число $y_s = Y - \frac{Y}{X}s$, $y_s \geq 0$, и на луче с вершиной $(0, -y_s)$, содержащем точку $(s, 0)$, отметим точку $F(s)$ такую, что $(s, 0) \in [(0, -y_s), F(s)]$ и $\|(s, 0) - F(s)\| = \delta$ (см. рис. 3). Пусть \mathcal{T} — объединение дуги $\{F(s) : 0 \leq s \leq X\}$ с ее симметричным образом $\{F(-s)\}$. Обозначив через f^3 точку из $\mathcal{T} \cap \partial G_1$ с максимальной абсциссой, найдем точку $t^3 = (x_0, 0)$ на оси абсцисс такую, что $\|f^3 - t^3\| = \delta$. Пусть число $y_0 > 0$ таково, что $t^3 \in [f^3, (0, -y_0)]$. Положим

$$\mathcal{T}_f = (\widehat{f^2, f^3} \subset \partial G_1) \cup \{F(s) : (s, 0) \in [t^3, \underline{t}_2]\} \quad (7)$$

и

$$Y = \frac{y_0 X}{X - x_0}.$$

Дуга $\{F(s) : 0 \leq s \leq X\}$ через числовой параметр s выражается в виде

$$x(s) = s \left(1 + \frac{\delta}{D}\right), \quad y(s) = \delta \frac{(Y - \frac{Y}{X}s)}{D},$$

где $D = \left[s^2 + \left(Y - \frac{Y}{X}s\right)^2\right]^{1/2}$, а скорость движения наблюдателя по ней имеет вид

$$[x'(s)^2 + y'(s)^2]^{1/2} \quad (8)$$

на участке $\widehat{f^3, \underline{f}_2}$.

Пример 2. Пусть $i = 1$. Далее предлагается способ построения кусочно-линейной дуги $\widehat{f^3, \underline{f}_2}$ траектории наблюдателя, обеспечивающий возможно малую скорость движения наблюдателя и позволяющий следить за объектом $t_\tau \in [\bar{t}_1, \underline{t}_2]$. Зададим число $\gamma > 1$. Напомним, что $f^2 = \bar{t}_1$, \underline{f}_2 — точка на оси абсцисс, для которой $\|\underline{f}_2 - \underline{t}_2\| = \delta$, $\underline{t}_2 \in [0, \underline{f}_2]$, а точка $t^2 \in [\bar{t}_1, 0]$ такова, что $\|\bar{t}_1 - t^2\| = \delta$. Точки $t^3 \in [t^2, 0]$ и $f^3 \in \partial G^1$ определены так, что $|\widehat{f^2, f^3}| = \gamma \|t^2 - t^3\|$. Разобьем отрезок $[t^3, \underline{t}_2]$ (рис. 5) равномерной сеткой узлов t^i на частичные отрезки $\Delta^i = [t^{i-1}, t^i]$, $i = 1, \dots, k$. На каждом отрезке Δ^i последовательно, начиная с $i = 4$, построим параллелограмм с основанием длины $|\Delta| = |\Delta^i|$, боковыми сторонами $[t^{i-1}, f^{i-1}]$, $[t^i, g^i]$ длины δ , отметим точку f^i такую, что

$$\|f^{i-1} - f^i\| = \gamma \cdot |\Delta|, \quad \|t^i - f^i\| = \delta, \quad (9)$$

и обозначим через $A^i = A^i(\delta, \gamma)$ угол между векторами $g^i - t^i$, $f^i - t^i$. Легко устанавливаются (см. рис. 5(a) и 5(b)) следующие утверждения.

Лемма 1. Для любого i справедливы утверждения:

- $A^i(\delta, \gamma) < A^i(\delta, \gamma')$ при $\gamma < \gamma'$;
- $A^i(\delta', \gamma) < A^i(\delta, \gamma)$ при $\delta < \delta'$;
- $A^i(\delta, \gamma) > 0$ при $\gamma > 1$.

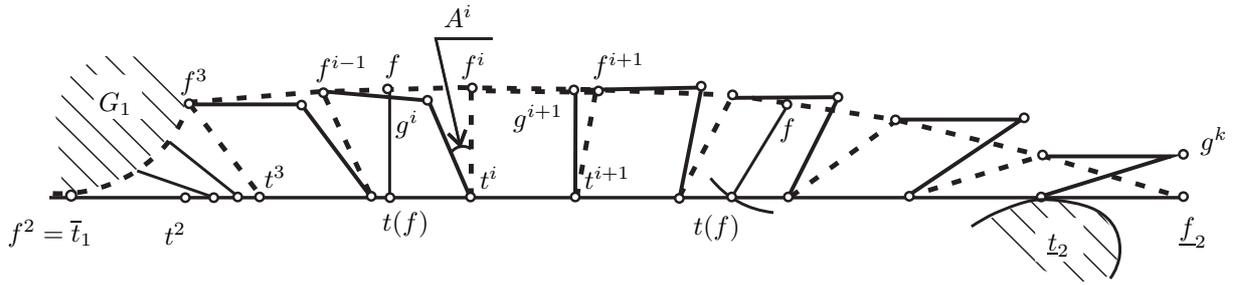
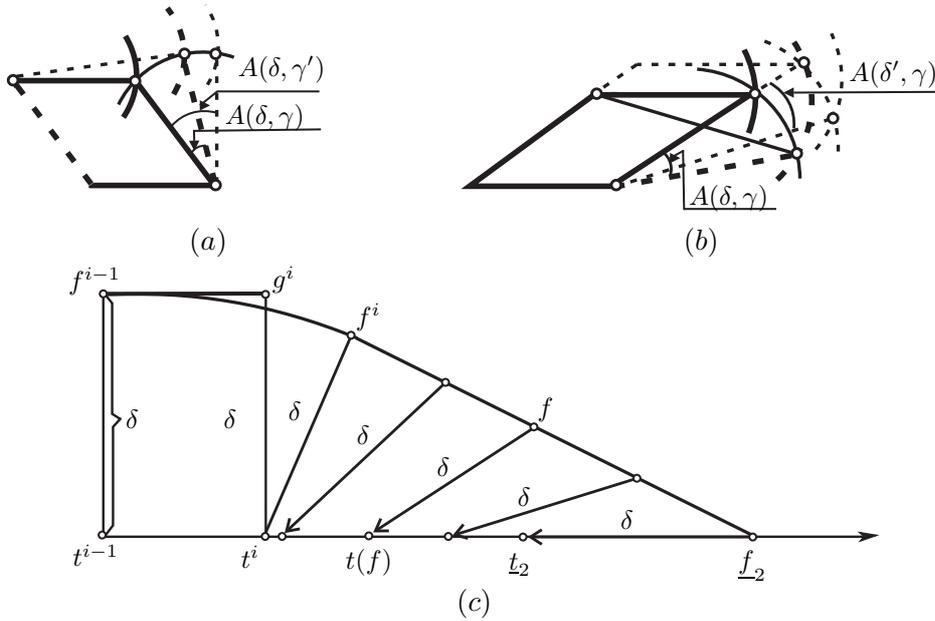


Рис. 5.



На рис. 5 сверху жирной штриховой линией изображена дуга $\widehat{f^2, f_2}$ траектории \mathcal{T}_f и отрезки $[t^i, f^i]$. Рис. 5(a) иллюстрирует п. 1 леммы 1; рис. 5(b) иллюстрирует п. 2 леммы 1; на рис. 5(c) стрелками изображены векторы $t(f) - f$ наблюдения.

Лемма 2. Для любой $f \in [f^{i-1}, f^i]$ существует единственная точка (см. рис. 5)

$$t = t(f) \in [t^{i-1}, t^i], \quad \|f - t(f)\| = \delta \tag{10}$$

такая, что отображение $f \rightarrow t(f)$ непрерывно и сохраняет порядок на отрезках

$$[f^{i-1}, f^i] \rightarrow [t^{i-1}, t^i].$$

Далее обратное к (10) отображение будем обозначать через $f = f(t)$.

Заметим, что условие равномерности сетки $\{t_i\}$ введено лишь ради простоты. Так, в ряду построенных четырехугольников (рис. 5) последними могут быть $[t^{i-1}, f^{i-1}, f^i, t^i]$ и $[t^i, f^i, f_2, t_2]$ (рис. 5(c)), где угол между вектором $f^i - t^i$ и осью абсцисс менее 45° , а $\widehat{f^{i-1}, f^i}$ — дуга окружности с центром на луче $f^{i-1} + \lambda(t^{i-1} - f^{i-1})$ ($\lambda > 0$). В этом случае легко установить взаимно однозначное соответствие $f \rightarrow t(f)$ между отрезками $[f^i, f_2]$, $[t^i, t_2]$.

С помощью леммы 1 устанавливается, что угол между вектором $f^i - t^i$ и осью абсцисс убывает с ростом i и в некоторой точке $t = t_\gamma$ ломаная $\bigcup_i [f^{i-1}, f^i]$ пересекает ось абсцисс, при этом ломаная непрерывно зависит от γ . Пусть $t = t(\gamma)$ — ближайшая к началу координат справа точка пересечения t_γ . Поскольку угол $A^i(\delta, \gamma)$ — непрерывная монотонная функция от γ , то найдется единственное значение γ^* , при котором $t_{\gamma^*} = f_2$. Далее пары: дуга $\widehat{f^2, f^3}$ с отрезком $[t^2, t^3]$, пары $[t^{i-1}, t^i]$, $[f^{i-1}, f^i]$ построены с использованием числа γ^* . Лемма 2 позволяет

установить взаимно однозначное соответствие $t = t(f)$ точек отрезков $[t^{i-1}, t^i]$, $[f^{i-1}, f^i]$, и наблюдатель может следить (в направлении вектора $t(f) - f$) за объектом, движущемуся по отрезку $[t^{i-1}, t^i]$. Константа γ^* зависит от длины $|\Delta| = |\Delta^i|$ частичных отрезков, она выражает среднюю скорость движения наблюдения по отрезку $[f^{i-1}, f^i]$ (см. (9)). Отметим, что при уменьшении величины $|\Delta|$ средняя скорость движения наблюдателя приближается к величине $\max V_f$.

Найдем производную отображения $f = f(t)$ в произвольной точке $t_* \in (t^i, t^{i+1})$. Пусть $t \in (t_*, t^{i+1})$, $[t, f']$ — вспомогательный отрезок длины δ , параллельный отрезку $[t_*, f_*]$, $f_* = f(t_*)$, точка $\bar{f} \in [f^i, f^{i+1}]$ такова, что прямая f', \bar{f} ортогональна отрезку $[t, f']$ (см. рис. 6), $f^* \in \overline{f_*, f'}$, и отрезок $[f^*, f^{i+1}]$ параллелен отрезку $[f', \bar{f}]$. Пусть угол между отрезком $[f^i, f^{i+1}]$ с осью абсцисс острый. Имеем $\|f - \bar{f}\| = o(\|f' - \bar{f}\|)$ ($t \rightarrow t_*$) и

$$\frac{\|f_* - f\|}{\|t_* - t\|} = \frac{\|f_* - f\|}{\|f_* - f'\|} = \frac{\|f_* - \bar{f}\| - \|f - \bar{f}\|}{\|f_* - f'\|}. \quad (11)$$

При $t \rightarrow t_*$ треугольник с вершинами f_* , $f' = f'_t$, $\bar{f} = \bar{f}_t$ “сжимается” к вершине f_* , сохраняя свойство взаимного подобия, поэтому отношение $\frac{\|f' - \bar{f}\|}{\|f_* - f'\|}$ не зависит от t . Отсюда с учетом (11) следует

Лемма 3. Для любого $t^* \in (t^i, t^{i+1})$ справедливо равенство

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=t_*} = \frac{\|f_* - f^{i+1}\|}{\|f^* - f_*\|}.$$

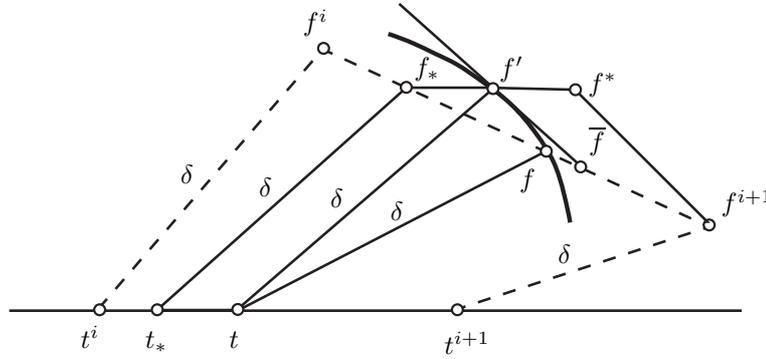


Рис. 6. Штриховыми линиями отмечены фрагмент $[f^i, f^{i+1}]$ траектории \mathcal{T}_f и боковые стороны $[t^i, f^i]$, $[t^{i+1}, f^{i+1}]$ четырехугольника $t^i f^i f^{i+1} t^{i+1}$, $[f_*, f^*]$ — вспомогательный отрезок, параллельный оси абсцисс.

Теперь рассмотрим задачу слежения за объектом, переходящим с отрезка $[\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}]$ на дугу $\widehat{t_{i+1}, \bar{t}_{i+1}}$, на примере $i = 1$. Если дуга Δ_2 имеет малую кривизну и $t_2 \in [\bar{t}_1, \underline{f}_2]$ (т.е. \underline{f}_2 расположены “впереди” объекта \underline{t}_2), то наблюдателю выгодно двигаться по траектории

$$f_\tau = t_\tau + \delta \frac{V_t(t_\tau)}{|V_t(t_\tau)|}, \quad t_\tau \in \Delta_2,$$

и далее по отрезку Λ_2 впереди t . Если кривизна дуги Δ_2 велика, то велик и угол между векторами $b_2 = \frac{V(t_2)}{|V_t|}$, $b_3 = \frac{V(t_3)}{|V_t|}$. Пусть $f_{2,3}$ — точка пересечения дуг $\Delta_2 + b_2$, $\Delta_2 - b_3$.

Объединение их фрагментов (рис. 7) $\mathcal{T}_f^{-b_2} = \widehat{\underline{f}_2, f_{2,3}}$, $\mathcal{T}_f^{b_3} = f_{2,3}, \widehat{(\bar{t}_2 - b_3)}$ обозначим через $\mathcal{T}_f^{-b_2, b_3}$. Легко установить взаимно однозначное соответствие между дугами Δ_2 и $\mathcal{T}_f^{-b_2, b_3}$ такое,

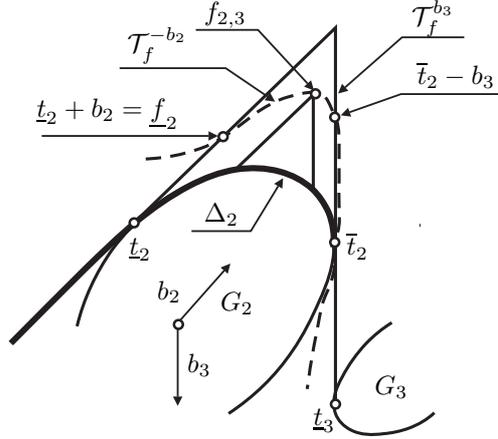


Рис. 7. Жирной линией обозначена траектория объекта, штриховой линией — траектория наблюдателя.

что при движении объекта t_τ по Δ_2 его образ f_τ движется по дуге $\mathcal{T}_f^{-b_2, b_3}$ с меньшей, чем V_t , скоростью.

5. Построим траекторию \mathcal{T}_f^* движения наблюдателя f_τ , следящего за равномерно движущимся по траектории \mathcal{T}_t объектом t_τ . Ради простоты положим $|V_t| = 1$. Обозначим через $W(\Delta_i)$ максимум величины скорости наблюдателя

$$f = t + \delta \cdot V(t), \quad (12)$$

отслеживающего движение объекта по дуге Δ_i ; $W(\Lambda_i)$ — наименьший из максимумов величины скорости движения наблюдателя по дугам слежения за объектом, преодолевающим отрезок Λ_i , приведенным в примерах 1, 2.

Для построения траектории \mathcal{T}_f вычислим величины

$$W(\Delta_i), \quad i = 1, \dots, k; \quad W(\Lambda_i), \quad i = 1, \dots, k - 1,$$

используя (3), (8), (10), (11). На нулевом шаге наблюдатель (11), стартуя в точке $f_* = t_* + \delta \cdot V_t(0)$, движется до встречи с дугой Δ_1 . На первом шаге наблюдатель следит за движением объекта на объединении $\Delta_1 \cup \Lambda_1$. Имеем два случая

$$W(\Delta_1) \geq W(\Lambda_1), \quad W(\Delta_1) < W(\Lambda_1).$$

В первом случае наблюдатель f_τ , отслеживая движущийся по Δ_1 объект t_τ , должен проследовать по дуге $\mathcal{T}_{f,1}^{b_1}$ со скоростью V_t , где $b_1 = \frac{t_2 - \bar{t}_1}{\|t_2 - \bar{t}_1\|}$, а далее он выбирает одну из дуг (см. примеры 1, 2) с меньшей величиной $W(\Lambda_1)$, с которой он следит за $t_\tau \in \Lambda_1$. Во втором случае наблюдатель следует по дуге $\{f = t + \delta \cdot V(t) : t \in \Delta_1 \cup \Lambda_1\}$

$$W(\Delta_1 \cup \Lambda_1) = \min \{W(\Delta_1), W(\Lambda_1)\},$$

и первый шаг завершают объект в точке t_2 , а наблюдатель — в точке $f_2 = t_2 + \delta \cdot b_1$. Такая позиция t_λ и f_λ выгодна наблюдателю. Второй шаг алгоритма отличается от первого лишь тем, что наблюдатель вместо дуги $\mathcal{T}_{f,1}^{b_1}$ использует дугу $\mathcal{T}_{f,2}^{-b_1, b_2}$. Следующие шаги выполняются по аналогии с первым. Построенную траекторию наблюдателя обозначим через \mathcal{T}_f^* . Имеет место

Теорема. Пусть упорядоченный набор выпуклых попарно не пересекающихся множеств G_i ($i = 1, \dots, k$) удовлетворяет условиям:

- соседние множества G_1, G_{i+1} разделяются прямой $\overline{t_i, t_{i+1}}$;
- угол между векторами скорости $V(t_i), V(\bar{t}_i)$ не превосходит π .

Тогда для движущегося по траектории T_f^* наблюдателя, отслеживающего объект, который преодолевает кратчайшую траекторию T_t с постоянной скоростью V_t , максимум $W(\Delta_i \cup \Lambda_i)$ величины скорости V_f удовлетворяет равенству

$$W(\Delta_i \cup \Lambda_i) = \min\{W(\Delta_i), W(\Lambda_i)\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

З а м е ч а н и е. Для характеристики качества траектории наблюдателя f , следящего за движением объекта t на частичных отрезках, вместо максимума величины скорости наблюдателя можно использовать среднюю скорость (9) наблюдателя.

Благодарности

Автор благодарит Виктора Борисовича Костоусова за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Berdyshev V.I.** The observer's trajectory following the object passing the obstacle on the shortest curve // *Eurasian J. Math. Comp. Appl.* 2021. Vol. 9, iss. 4. P. 4–16. doi: 10.32523/2306-6172-2021-9-4-4-16.
2. **Лю В.** Методы планирования пути в среде с препятствиями (обзор) // *Математика и мат. моделирование.* 2018. № 1. С. 15–58. doi: 10.24108/mathm.0118.0000098.

Поступила 28.03.2022

После доработки 22.04.2022

Принята к публикации 25.04.2022

Бердышев Виталий Иванович

академик РАН

научный руководитель

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: bvi@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Berdyshev V.I. The observer's trajectory following the object passing the obstacle on the shortest curve. *Eurasian J Math. Comp. Appl.*, 2021, vol. 9, iss. 4, pp. 4–16. doi: 10.32523/2306-6172-2021-9-4-4-16.
2. Lyu V. Path planning methods in an environment with obstacles (A review). *Mat. Mat. Model.*, 2018, vol. 1, pp. 15–58 (in Russian). doi: 10.24108/mathm.0118.0000098.

Received March 28, 2021

Revised April 22, 2022

Accepted April 25, 2022

Funding Agency: This study is a part of the research carried out at the Ural Mathematical Center and supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2022-874).

Vitalii Ivanovich Berdyshev, RAS Academician, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108Russia,

e-mail: bvi@imm.uran.ru.

Cite this article as: V. I. Berdyshev. An object bypassing convex sets and an observer's trajectory in two-dimensional space. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 66–73.