ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 2 2022

УДК 517.982.256+517.982.252

ТОМОГРАФИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СОЛНЦ В ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

А. Р. Алимов

Недавно А. Р. Алимов и Б. Б. Беднов охарактеризовали трехмерные пространства, в которых любое чебышёвское множество монотонно линейно связно. В частности, они показали, что чебышёвское множество в трехмерном пространстве с цилиндрической нормой монотонно линейно связно. Автор настоящей работы получил аналогичный результат для замкнутых множеств с непрерывной (полунепрерывной снизу) метрической проекцией. Р. Ауманн установил, что если сечение любой гиперплоскостью компактного подмножества M конечномерного пространства ациклично, то M выпукло. Одно из возможных обобщений выпуклых множеств приводит к понятию солнца — хорошо известно, что любая точка, не лежащая в солнце, отделяется от солнца открытым опорным конусом. В настоящей работе мы рассматриваем задачу томографического описания солнц через аппроксимативно-геометрические свойства их сечений касательными плоскостями. Мы рассматриваем случай трехмерных пространств с цилиндрической нормой. В таких пространствах мы вводим понятие касательной плоскости, обобщающее понятие касательного направления к сфере, введенное А. Р. Алимовым и Е. В. Щепиным. Полученные результаты частично обобщают и развивают указанные выше исследования. Мы даем необходимые и достаточные условия монотонной связности аппроксимативно определяемых множеств в трехмерных цилиндрических пространствах в терминах свойств их сечений касательными плоскостями.

Ключевые слова: наилучшее приближение, чебышёвское множество, солнце, монотонно линейно связное множество.

A. R. Alimov. Tomographic characterizations of suns in three-dimensional spaces.

Recently A. R. Alimov and B. B. Bednov characterized the three-dimensional spaces in which any Chebyshev set is monotone path-connected. In particular, they showed that any Chebyshev set in a three-dimensional space with cylindrical norm is monotone path-connected. The author of the present paper obtained a similar result for closed sets with continuous (lower semicontinuous) metric projection. R. Aumann established that if the section of a compact subset M of a finite-dimensional space by any hyperplane is acyclic, then M is convex. A sun is considered as a possible generalization of a convex set — it is well known that any point not lying in a sun can be separated from it by an open support cone. In the present paper, we consider the problem of tomographic classification of suns in terms of approximative and geometric properties of their sections by tangent planes. We consider the case of three-dimensional spaces with cylindrical norm. In these spaces, we introduce the notion of a tangent plane, which generalizes the notion of a tangent direction to a sphere introduced by A. R. Alimov and E. V. Shchepin. The results obtained in the paper partially generalize and extend the mentioned studies. We give necessary and sufficient conditions for the monotone path-connectedness of approximatively defined sets in three-dimensional cylindrical spaces in terms of approximative and geometric properties of their sections by tangent planes.

Keywords: best approximation, Chebyshev set, sun, monotone path-connected set.

MSC: 41A65

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-45-55

Согласно одному классическому результату Р. Ауманна [9] из геометрической топологии, если сечение любой гиперплоскостью компактного подмножества M конечномерного пространства ациклично, то M выпукло. Л. Монтехано и Е. В. Щепин [17] обобщили этот результат на случай локально выпуклых пространств, снабженных слабой топологией. В настоящей работе рассматривается аналогичная задача томографической характеризации чебышёвских множеств и солнц в трехмерных пространствах с цилиндрической нормой. Солнца представляют собой одно из возможных обобщений выпуклых множеств — хорошо известно, что любая точка, не лежащая в солнце, отделяется от солнца опорным конусом (см., например, [1, § 3.1]) — эта теорема является естественным обобщением геометрической формы теоремы Хана — Банаха,

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-11-00129).

согласно которой точка, не лежащая в замкнутом выпуклом множестве, отделяется от него замкнутой гиперплоскостью. В этой связи, следуя Р. Ауманну, Л. Монтехано и Е. В. Щепину, задачи определения условий, гарантирующих заданные аппроксимативные свойства (например, солнечность) рассматриваемого множества в терминах аппроксимативных или геометрических свойств его сечений подпространствами, мы будем называть задачами томографического описания (или восстановления) множеств.

Аппроксимативные свойства сечений чебышёвских множеств и солнц изучались (в основном в пространствах $C(Q)$ и, в частности, в ℓ^∞_n) в работах автора настоящей статьи, начиная с 2005 г. (см. [1]). Из недавних работ, в которых аппроксимативные свойства сечений играют важную роль, отметим [8].

Хорошо известно (см. [1]), что, в отличие от ситуации, рассмотренной Р. Ауманном, Е. В. Щепиным и Л. Монтехано, в задачах сохранения солнечных свойств множеств (и соответственно в задачах их томографического восстановления) имеет смысл рассматривать только экстремальные гиперплоскости (или пересечения таких гиперплоскостей).

В данной работе изучаются солнечные (аппроксимативно-геометрические) свойства множеств в трехмерных пространствах $X = (X, \|\cdot\|)$ с цилиндрической нормой, т. е. в пространствах $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$, где $\dim Y = 2$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_Y \oplus_\infty |\cdot|_{\mathbb{R}}$. Хорошо известно, что полиэдральное цилиндрическое трехмерное пространство лежит в классе (BM)[2], и, следовательно, любое солнце в нем монотонно линейно связно (как солнце в конечномерном (BM)-пространстве; см. [1; 15]). В этом (достаточно прозрачном случае) солнца и чебышёвские множества были охарактеризованы в работе [3]. Важность пространств с цилиндрической нормой в теории приближений показана недавно автором и Б. Б. Бедновым (см., например, [2]). Они, в частности, установили, что чебышёвское множество в трехмерном пространстве с цилиндрической нормой монотонно линейно связно, а также охарактеризовали трехмерные банаховы пространства, в которых всякое чебышёвское множество монотонно линейно. Такое пространство или является цилиндрическим, или в нем любая достижимая точка сферы является точной гладкости (условие В. И. Бердышева — А. Брондстеда — А. Л. Брауна). Автор настоящих исследований получил аналогичный результат для замкнутых множеств с непрерывной (полунепрерывной снизу) метрической проекцией и строгих солнц (см. [2; 5]).

В геометрической теории приближений остается нерешенной давно стоящая задача о B-связности солнц в конечномерных пространствах (и, в частности, в трехмерном нормированном случае). Иными словами, в общем случае неизвестно, будет ли солнце иметь связные пересечения с замкнутыми (или открытыми) шарами. Важный отрицательный результат в этой задаче был недавно получен И. Г. Царьковым [21; 24], который построил: 1) пример четырехмерного полиэдрального пространства, содержащего не B-связное солнце и 2) пример трехмерного несимметрично нормированного пространства, содержащего не B-связное солнце. Из недавних работ отметим также [11; 16; 18]. В настоящей работе рассматривается случай трехмерных пространств с цилиндрической нормой. В теореме 1, в которой рассматривается задача томографического описания солнц через аппроксимативно-геометрические свойства их сечений касательными плоскостями, дается частичный ответ на вопрос о необходимых и достаточных условиях монотонной линейной связности солнц для общих трехмерных цилиндрических пространств. В теореме 2 даются достаточные условия монотонной связности аппроксимативно определяемых множеств в трехмерных цилиндрических пространствах.

1. Определения и основные результаты

Мы в основном следуем определениям обзора [1]. Ниже X — действительное линейное нормированное пространство; $B(x, r)$ — замкнутый шар с центром x и радиусом r; $\mathring{B}(x, r)$ — открытый шар с центром x и радиусом r. Величиной наилучшего приближения (или расстоя-

[2]По поводу определения класса (BM) см. определение 4 ниже, а также [4; 1; 6, лемма B].

нием) от заданного элемента x линейного нормированного пространства X до заданного непустого множества $M \subset X$ называется величина $\rho(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|$. Множество всех *ближайших точек* (элементов наилучшего приближения) из множества M для заданного $x \in X$ обозначается $P_M x$. Таким образом, $P_M x := \big\{y \in M \mid \rho(x, M) = \|x - y\|\big\}$. Множество M называется *чебышёвским множеством*[3], если оно есть множество существования и множество единственности, т. е. если для каждого $x \in X$ множество $P_M x$ одноточечно. Для подмножества $\varnothing \neq M \subset X$ точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x \neq \varnothing$ (называемая *точкой светимости*) такая, что $y \in P_M\big((1 - \lambda)y + \lambda x\big)$ для всех $\lambda \geqslant 0$ (иными словами, из точки y исходит "солнечный луч", который проходит через x и для каждой точки которого точка y является ближайшей во множестве M). Множество $M \subset X$ называется *солнцем* (соответственно *строгим солнцем*), если каждая точка $x \in X \setminus M$ есть точка солнечности (соответственно точка строгой солнечности) для M. "Солнца" являются наиболее естественными объектами, для которых выполнен обобщенный критерий Колмогорова элемента наилучшего приближения. Для солнц имеют место те или иные свойства отделимости: шар можно отделить от такого множества посредством большего шара или опорного конуса (см., например, [1]). Солнечность имеет важные приложения в задачах геометрической оптики даже в конечномерном случае (см. [1; 20, § 1]).

Хорошо известно, что в конечномерном линейном нормированном пространстве 1) любое чебышёвское множество является солнцем и 2) солнце линейно связно и локально линейно связно (В. А. Кощеев, А. Л. Браун, см., например, [1, теорема 8.2]).

Непрерывная кривая $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, в линейном нормированном пространстве X называется *монотонной* [1], если вещественная функция $f(k(\tau))$ монотонна по τ для любого экстремального функционала f единичной сферы S^* сопряженного пространства. Замкнутое множество называется *монотонно линейно связным* (см. [1]), если любые две его точки можно соединить непрерывной монотонной кривой, лежащей в этом множестве.

Монотонная линейная связность является более слабым свойством, чем выпуклость, и более сильным, чем линейная связность. Классическим примером монотонно линейно связного множества является множество (обобщенных) дробно-рациональных функций в пространстве $C(Q)$ (см. [23]). Монотонно линейно связные множества и их обобщения активно изучаются в настоящее время (см., например, [2; 10; 19; 21–23]).

З а м е ч а н и е 1. На плоскости любое солнце монотонно линейно связно; обратная импликация верна в произвольном конечномерном нормированном пространстве (см. [1]).

О п р е д е л е н и е 1. Под трехмерным пространством с цилиндрической нормой мы будем понимать пространство вида $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$ (единичный шар такого пространства — цилиндр).

Под *плоскостью* в трехмерном пространстве X с цилиндрической нормой мы будем понимать двумерное аффинное подпространство в X. На любом аффинном подпространстве H рассматривается норма $\|\cdot\|_H$, индуцированная нормой пространства X на H (в качестве начала координат в подпространстве H можно брать любую точку θ из H; единичный шар B_H пространства H определяется пересечением $B(\theta, 1) \cap H$).

Конечномерное пространство называется *полиэдральным*, если единичный шар пространства является выпуклой комбинацией конечного числа точек.

О п р е д е л е н и е 2 (см. [7]). Для точки $y \in S$ через Λ_y обозначим множество предельных точек выражения $(y - z)/\|y - z\|$ при $z \to y$, $z \in S$ (т. е. Λ_y — *множество полукасательных направлений* к сфере S в точке y). Направление d называется (глобально) *касательным направлением* для сферы S, если для любой точки $y \in S$ условие опорности направления d в точке y влечет, что $d \in \Lambda_y$, т. е. направление d является касательным в точке y.

[3]Термин "чебышёвское множество" был введен в 1950-е годы Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным. Они также ввели понятие "солнце" (см. также [12; 25]).

Для трехмерного пространства с цилиндрической нормой направление будет касательным, если оно параллельно касательному направлению к шару B_Y в плоскости Y или параллельно образующей цилиндра $0 \oplus_\infty c$, $-1 \leqslant c \leqslant 1$.

Следующее определение, основанное на определении касательного направления к сфере, данное автором настоящей статьи и Е. В. Щепиным в [7], является новым. Его важность в задачах томографического описания солнц демонстрируется ниже в теореме 1.

Определение 3. Если X — трехмерное цилиндрическое пространство, то под *касательной плоскостью* H в X мы будем понимать или 1) любое аффинное двумерное подпространство, порожденное основанием цилиндра (т. е. H — сдвиг плоскости Y) или 2) любой сдвиг аффинной оболочки произвольного касательного направления к шару B_Y в плоскости Y и образующей $0 \oplus_\infty c$, $-1 \leqslant c \leqslant 1$, цилиндра B.

В пространстве $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$, $\dim Y = 2$, плоскость, параллельную плоскости Y (или, что то же самое, основанию единичного шара (цилиндра) B), будем называть *главной координатной плоскостью* (см. [5; 6]).

Нам потребуется следующий результат из [7] (томографическая характеризация солнц на нормированной плоскости).

Теорема A. 1) *В линейном нормированном пространстве солнце выпукло по любому касательному направлению единичной сферы.*

2) *Подмножество двумерного банахова пространства является солнцем, если и только если оно замкнуто, связно и выпукло по любому касательному направлению сферы.*

Замечание 2. В [3] установлен следующий результат:

для непустого подмножества $M \neq \varnothing$ трехмерного пространства X с цилиндрической полиэдральной нормой следующие условия эквивалентны: a) M — солнце; b) M замкнуто, связно, и пересечение M с любой координатной аффинной гиперплоскостью H в X является солнцем в H или пусто. (1)

Напомним, что множество $\mathring{B}$*-связно*, если его пересечение с любым открытым шаром связно; множество B*-связно*, если его пересечение с любым замкнутым шаром связно; множество называется B*-солнцем* (см., например, [4]), если его непустое пересечение с любым замкнутым шаром является солнцем. Автор статьи показал, что B-солнце с компактнозначным оператором метрической проекции является солнцем и что для любого $n \geqslant 3$ существует линейное нормированное пространство размерности n, содержащее чебышёвское множество, не являющееся B-солнцем.

2. Томографическая характеризация солнц

В следующей теореме дается томографическая характеризация широкого класса солнц и монотонно линейно связных множеств (солнц) в трехмерных пространствах с цилиндрической нормой. Этот результат частично обобщает утверждение (1) на случай произвольных цилиндрических пространств. Новым в теореме 1 является отказ от полиэдральности пространства.

Теорема 1. *Пусть M — непустое замкнутое подмножество трехмерного пространства $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$ с цилиндрической нормой. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *M связно, и пересечение M с любой касательной плоскостью H в X является солнцем в H или пусто;*

2) *M связно, и пересечение M с любой касательной плоскостью H в X монотонно линейно связно;*

3) *M связно, и пересечение M с любой касательной плоскостью H в X выпукло по любому касательному направлению единичной сферы пространства Y;*

4) *M — монотонно линейно связное множество (солнце);*

5) *M — ($\mathring{B}$-связное) B-связное солнце;*

6) *M — B-солнце.*

Если дополнительно X — полиэдральное пространство, то любое из перечисленных выше условий эквивалентно солнечности множества M.

Теорема 1 также частично обобщает следующую томографическую характеризацию солнц в пространстве ℓ^∞_n (см. [1]): *непустое множество $M \subset \ell^\infty_n$ является солнцем в ℓ^∞_n, если и только если M замкнуто, связно и пересечение M с любой координатной (касательной) аффинной гиперплоскостью H в ℓ^∞_n является солнцем в H или пусто.* По поводу аналогичных характеризаций чебышёвских множеств, строгих солнц и множеств с непрерывной метрической проекцией (см. работы [4] и [1].)

В настоящее время не известно, удовлетворяет ли солнце (в неполиэдральном случае) любому из условий теоремы 1. По поводу строгих солнц см., например, [5] и [2], а также теорему 2 ниже.

З а м е ч а н и е 3. Если в теореме 1 в п. 1) условие “H — касательная плоскость” заменить на условие “H — координатная плоскость”, то (в неполиэдральном случае) импликация 1) $\Rightarrow$ 4) перестает быть верной. Соответствующий пример легко строится в любом трехмерном цилиндрическом неполиэдральном пространстве, при этом построенное множество будет выпуклым по любому касательному направлению сферы. Пример координатного креста на плоскости с max-нормой показывает, что множество, удовлетворяющее любому из условий в теореме 1, может не быть строгим солнцем.

О п р е д е л е н и е 4. Напомним, что *оболочка Банаха — Мазура* (или *шаровая оболочка*) $\mathrm{m}(M)$ множества M определяется как пересечение всех замкнутых шаров, содержащих множество M (см. [15]); в частности, $\mathrm{m}(x,y)$ — пересечение всех замкнутых шаров, содержащих точки x, y. Множество M называется m-*связным*, если $(\mathrm{m}(x,y) \setminus \{x,y\}) \cap M \neq \varnothing$ для любых $x, y \in M$. Мы говорим, что X — (BM)-*пространство*, если $B(0,\|x\|) \cap \big(\mathrm{m}(x,y) \setminus \{x\}\big) \neq \varnothing$ при условии, что $[x, x-y] \cap \mathring{B}(0,\|x\|) = \varnothing$, $x \neq 0$ (см. [15]).

Нам потребуются вспомогательные результаты. В следующем результате m-связность установлена А. Л. Брауном [15], монотонная линейная связность — автором статьи (см., например, [6, лемма C]).

Лемма A. *Произвольное солнце (и, следовательно, произвольное чебышёвское множество) на нормированной плоскости и в произвольном конечномерном* (BM)-*пространстве монотонно линейно связно.*

З а м е ч а н и е 4. Трехмерное пространство $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$ с цилиндрической нормой необязательно лежит в классе (BM): достаточно в качестве Y взять пространство со строго выпуклым негладким шаром (см., например, [2]).

Лемма B (см. [15; 6, лемма E]). *Непустое подмножество N конечномерного* (BM)-*пространства является (монотонно линейно связным) солнцем, если и только если оно* m-*связно, т. е.*

$$(\mathrm{m}(x,y) \setminus \{x,y\}) \cap N \neq \varnothing \quad \forall\, x, y \in N, \quad x \neq y. \tag{2}$$

Доказательство теоремы 1. Импликация $2) \Rightarrow 1)$ очевидна, поскольку

в конечномерном пространстве монотонно линейно связное множество является солнцем (3)

(см. [1;15] и замечание 1 выше). В полиэдральном случае эквивалентность $1) \Leftrightarrow 4)$ установлена в [3, теорема 4]. Импликация $1) \Rightarrow 2)$ следует из хорошо известного факта, что на плоскости любое солнце монотонно линейно связно (лемма A).

$1) \Rightarrow 4)$. Пусть множество M удовлетворяет условиям п. 1). Сначала докажем, что множество M m-связно. Рассуждая от противного, предположим, что найдутся точки $x, y \in M$, для которых $(\mathrm{m}(x,y) \setminus \{x,y\}) \cap M = \varnothing$. Так как по условию для любой касательной плоскости H непустое пересечение $M \cap H$ является солнцем в H, то по лемме A пересечение $M \cap H$ монотонно линейно связно. Отсюда вытекает, что точки x, y не лежат ни в какой координатной плоскости, и, значит, оболочка $\mathrm{m}(x,y)$ является полиэдральным цилиндром с непустой внутренностью. Здесь мы использовали известный факт (см. [13, теорема 9.6]), что на (аффинной) плоскости Y множество $\mathrm{m}(u,v)$ представляет собой или отрезок $[u,v]$, или параллелограмм $(u + \mathbb{R}_+ \cdot \Sigma) \cap (v - \mathbb{R}_+ \cdot \Sigma)$, где Σ — собственная грань шара $B_{|\cdot|}(0,1)$ относительно ассоциированной нормы $|\cdot|$ (см. [1, п. 9.1]), определяемая точкой $(v-u)/|v-u|$. При этом (см. [7])

направление является касательным для единичной сферы S_Y пространства Y тогда и только тогда, когда оно параллельно некоторому невырожденному отрезку из границы $\mathrm{m}(u,v)$ при некоторых u, $v \in Y$. (4)

Далее мы воспользуемся одной идеей из работы [5]. Пусть $F_1, \dots, F_\nu$ — все двумерные грани тела $\mathrm{m}(x,y)$, содержащие точку x, а $E_1, \dots, E_\mu$ — все двумерные грани цилиндра $\mathrm{m}(x,y)$, содержащие точку y ($\nu, \mu \leqslant 3$). Из (4) следует, что любая из плоскостей $\operatorname{aff} F_i$, $\operatorname{aff} E_j$, $i = 1, \dots, \nu$, $j = 1, \dots, \mu$, является касательной для B (здесь и ниже $\operatorname{aff} N$ обозначает аффинную оболочку множества N). Рассматривая все касательные плоскости H, проходящие через точки x и y (любая такая плоскость имеет вид $\operatorname{aff} F_i$ или $\operatorname{aff} E_j$), и принимая во внимание, что по условию непустое пересечение $M \cap H$ является солнцем в H, из (2), примененного к плоскостям $\operatorname{aff} F_i$ и $\operatorname{aff} E_j$, имеем $F_i \cap M = \{x\}$, $E_j \cap M = \{y\}$, $i = 1, \dots, \nu$, $j = 1, \dots, \mu$.

Для непустого множества $F \subset \mathbb{R}^3$ и его граничной точки z определим

$$\operatorname{cone}(F, z) := \{\alpha f + (1-\alpha) z \mid f \in F, \quad \alpha \geqslant 0\}.$$

По условию п. 1) пересечение множеств M с касательной плоскостью $\operatorname{aff} F_i$ является солнцем в $\operatorname{aff} F_i$ для любого i, и, следовательно, по лемме A пересечение $M \cap \operatorname{aff} F_i$ монотонно линейно связно в пространстве $\operatorname{aff} F_i$. Как следствие имеем

$$\operatorname{cone}(F_i, x) \cap M = \{x\}, \quad \operatorname{cone}(E_j, y) \cap M = \{y\}, \quad i = 1, \dots, \nu, \quad j = 1, \dots, \mu. \tag{5}$$

По упомянутой выше теореме В. А. Кощеева — А. Л. Брауна любое солнце в конечномерном пространстве линейно связно, поэтому множество M линейно связно. С другой стороны, точки x, y лежат в M, но их нельзя соединить кривой, лежащей в M, поскольку множество

$$U := \biggl(\mathrm{m}(x,y) \cup \Bigl(\bigcup_{i=1}^{\nu} \operatorname{cone}(F_i, x)\Bigr) \cup \Bigl(\bigcup_{j=1}^{\mu} \operatorname{cone}(E_j, y)\Bigr)\biggr) \setminus \{x, y\}$$

разделяет пространство X, при этом $U \cap M = \varnothing$ в силу (5), точки x и y содержатся в разных компонентах связности множества $X \setminus U$ и $U \cap M = \varnothing$. Полученное противоречие показывает, что M m-связно в X и, следовательно, является солнцем по лемме B. Снова привлекая лемму B (см. также [1, теорема 9.1]), получаем, что M монотонно линейно связно. Импликация $1) \Rightarrow 4)$ доказана.

Установим 4) $\Rightarrow$ 2). Хорошо известно (см. [1]), что

монотонно линейно связное множество M экстремально монотонно линейно связно, (6)

т. е. по определению пересечение множества M с любым промежутком и, в частности, с любым замкнутым шаром и с любой экстремальной гиперплоскостью $f^{-1}(c)$, где f — экстремальный функционал единичной сопряженной сферы S^*, монотонно линейно связно. Отсюда вытекает импликация 4) $\Rightarrow$ 2), поскольку любая касательная плоскость является экстремальной, а также импликация 4) $\Rightarrow$ 5), которая хорошо известна для случая произвольного конечномерного нормированного пространства (см. [1, § 9.4]).

Импликация 5) $\Rightarrow$ 4) установлена в [5, замечание 5]. Импликация 4) $\Rightarrow$ 6) следует из (6) с учетом (3). Окончательно импликация 6) $\Rightarrow$ 5) следует из хорошо известного факта, что в конечномерном пространстве любое солнце связно (см. [1]). Импликация 1) $\Leftrightarrow$ 3) выполнена по теореме A с учетом известного факта, что солнце в конечномерном пространстве линейно связно (теорема В. А. Кощеева — А. Л. Брауна).

Теорема 1 доказана.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть $M \subset X$. Метрическая проекция P_M называется ORL-*непрерывной* (outer radially lower continuous) в точке x, если из условий

$$y \in P_M x, \quad \forall (x_n) \subset \{y + \lambda(x-y) \mid \lambda \geqslant 1\}, \quad x_n \to x$$

следует, что $\rho(y, P_M x_n) \to 0$ (см. [14], а также [1]). Полунепрерывная снизу метрическая проекция является ORL-непрерывной. Однако обратная импликация может нарушаться.

О п р е д е л е н и е 6. Множество M называется *локальным B-солнцем*, если для любой точки $x \in M$ найдется число $\delta_0 = \delta_0(x)$ такое, что пересечение $M \cap B(x,\delta)$ является солнцем для любого $0 < \delta \leqslant \delta_0$.

О п р е д е л е н и е 7. Замкнутое множество $M \neq \varnothing$ называется *унимодальным* (или LG-*множеством*; см., например, [1, § 3.3]), если для любого $x \notin M$ каждый локальный минимум функции $\Phi_x(y) = \|y - x|$, $y \in M$, является глобальным. Иными словами, замкнутое множество M унимодально, если условие $y \in P_{M\cap V}x$, где $V := B(y,\varepsilon)$, влечет, что $y \in P_M x$.

3. Достаточные условия монотонной линейной связности солнц

В следующей теореме в дополнение к необходимым и достаточным условиям монотонной линейной связности из теоремы 1 даются достаточные условия монотонной связности аппроксимативно определяемых множеств в трехмерных цилиндрических пространствах.

Теорема 2. *Пусть M — непустое замкнутое подмножество трехмерного пространства с цилиндрической нормой. Предположим, что выполнено по крайней мере одно из следующих условий*:

1) *M — солнце, и пространство полиэдрально*;
2) *M — строгое солнце (в частности, это условие выполнено, если M — чебышёвское множество или, более общо, M — множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией)*;
3) *M — локальное B-солнце с* ORL-*непрерывной метрической проекцией*;
4) *M — локальное B-солнце, являющееся унимодальным множеством.*

Тогда множество M монотонно линейно связно.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Утверждение теоремы при условии 1) имеет место, поскольку (см. [1]) полиэдральное цилиндрическое пространство лежит в классе (BM), а согласно теореме А. Л. Брауна в (BM)-пространствах любое солнце монотонно линейно связно (см. замечание 1). Утверждение теоремы при условии 2) доказано в работе [5].

Для доказательства требуемого результата в случае 3) и 4) сначала проверим, что в произвольном линейном нормированном пространстве

локально B-солнечное унимодальное множество является строгим солнцем. (7)

Действительно, пусть M — B-солнечное унимодальное множество. Без ограничения общности считаем, что $0 \notin M$, $y \in P_M 0$. (Если $P_M x = \varnothing$, то доказывать нечего.) Нам требуется показать, что y — точка светимости из M для 0. Для $k \in \mathbb{N}$ положим $M_k := M \cap B(y, 1/k)$. По предположению M_k — солнце. Пусть y_k — точка светимости из M_k для 0. Определим $z := -y$, $z_k := -y_k$. Ясно, что y_k — точка светимости из M_k для z_k. Зафиксируем $n_0 \geqslant 2$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Если предположить, рассуждая от противного, что y не является точкой светимости из M_{n_0} для 0, то y не будет ближайшей точкой из M_{n_0} для z, поскольку в противном случае мы можем поместить начало координат в точку z, что приводит к рассмотренной выше ситуации.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ пусть y_k — точка светимости из M_k для 0. Тогда y_k — точка светимости из M_k для z_k. Так как $y_k \in B(y, 1/k)$, то $\|y_k - y\| \leqslant 1/k$, что дает $\|z - z_k\| \leqslant 1/k$. Пусть w — точка светимости из M_{n_0} для z. Имеем

$$\|y - z\| = \|y_k - z_k\| \leqslant \|w - z_k\| \leqslant \|w - z\| + \|z - z_k\| \leqslant \|w - z\| + \frac{1}{k},$$

что в пределе при $k \to \infty$ дает $\|y - z\| = \|w - z\|$, т. е. y — ближайшая точка из M_{n_0} для z. Окончательно, так как по условию M унимодально, то y — ближайшая точка из M для z, что доказывает (7).

Теперь утверждение теоремы при условии 4) вытекает из 2). Утверждение 3) следует из 4), поскольку хорошо известно, что в нормированном пространстве замкнутое множество с ORL-непрерывной метрической проекцией является унимодальным (см., например, [1, теорема 4.5]).

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 5. В отличие от теоремы 1, условия 1)–4) теоремы 2 не являются критериальными условиями монотонной линейной связности.

З а м е ч а н и е 6. В работе [5] показано, что

если M — чебышёвское множество в трехмерном пространстве X с цилиндрической нормой и H — главная координатная плоскость в X, то M — чебышёвское множество в H (при условии, что $M \cap H \neq \varnothing$). (8)

В этом результате условие “H — главная координатная плоскость” нельзя заменить на более общее условие “H — касательная плоскость”. Соответствующий контрпример легко строится в любом цилиндрическом пространстве $X \notin$ (BM), в качестве соответствующего множества M достаточно взять опорную плоскость L к единичному шару B в достижимой точке $y \in S_Y \oplus_\infty \{1\}$, в которой прямая $\ell := L \cap (Y \oplus_\infty \{1\})$ является касательной прямой к шару $B_Y \oplus_\infty \{1\}$ (согласно известной характеризации А. Брауна трехмерных (BM)-пространств (см., например, [6, лемма B]) такая плоскость L существует). Несложно проверяется, что сечение множества M любой неглавной касательной плоскостью $H \supset \ell$ не является чебышёвским множеством в H.

З а м е ч а н и е 7. В частном случае пространства ℓ^∞_n (для любого n и координатного подпространства H любой размерности) утверждение (8) доказано в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алимов А.Р., Царьков И.Г.** Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71, № 1. С. 3–84. doi: 10.4213/rm9698 .
2. **Алимов А.Р.** Выпуклость и монотонная линейная связность множеств с непрерывной метрической проекцией в трехмерных пространствах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2 С. 29–46. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-28-46 .
3. **Алимов А.Р.** Геометрическое строение чебышёвских множеств и солнц в трехмерных пространствах с цилиндрической нормой // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2020. № 5. С. 26–32. doi: 10.3103/S0027132220050022 .
4. **Алимов А.Р.**, Характеризация множеств с непрерывной метрической проекцией в пространстве ℓ_n^∞ // Мат. заметки. 2020. Т. 108, № 3. С. 323–333. doi: /10.4213/mzm12725:
5. **Alimov A.R.**, Monotone path-connectedness of strict suns // Lobachevskii J. Math. 2022. Vol. 43, no. 3. P. 1267–1276. doi: 10.1134/S1995080222060038 .
6. **Алимов А.Р., Беднов Б.Б.** Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в трехмерных пространствах // Мат. сб. 2021. Т. 212, № 5. С. 37–57. doi: 10.4213/sm9325 .
7. **Alimov A.R., Shchepin E.V.** Convexity of suns in tangent directions // J. Convex Analysis. 2019. Vol. 26, no. 4. P. 1071–1076.
8. **Alimov A.R., Tsar'kov I. G.** Smoothness of subspace sections of the unit balls of $C(Q)$ and L^1 // J. Approx. Theory. 2021. Vol. 265. Art. no. 105552. doi: 10.1016/j.jat.2021.105552 .
9. **Aumann G.**, On a topological characterization of compact convex point sets // Ann. of Math. 1936. Vol. 37. P. 443–447. doi: 10.2307/1968456 .
10. **Беднов Б.Б.** Конечномерные пространства, в которых класс чебышевских множеств совпадает с классом замкнутых и монотонно линейно связных множеств // Мат. заметки. 2022. Т. 111, № 4. С. 483–493. doi: 10.4213/mzm13314 .
11. **Bendit T.** Chebyshev subsets of a Hilbert space sphere // J. Austral. Math. Soc. 2019. Vol. 107, no. 3. P. 289–301. doi: 10.1017/S1446788719000508 .
12. **Bingham N.H.** The life, work, and legacy of P. L. Chebyshev // Theory Probab. Appl. 2022. Vol. 66, no. 4. P. 506–521. doi: /10.4213/tvp5515 .
13. **Boltyanski V., Martini H., Soltan P.S.** Excursions into combinatorial geometry. Berlin: Springer, 1997. 427 p.
14. **Brosowski B., Deutsch F.** On some geometric properties of suns // J. Approx. Theory. 1974. Vol. 10, no. 3. P. 245–267. doi: /10.1016/0021-9045(74)90122-1 .
15. **Brown A.L.** Suns in normed linear spaces which are finite dimensional // Math. Ann. 1987. Vol. 279, no. 1. P. 87–101. doi: 10.1007/BF01456192 .
16. **Лебедев П.Д., Успенский А.А.** Об аналитическом построении решений в одном классе задач управления по быстродействию с невыпуклым целевым множеством // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Vol. 27, no. 3. P. 128–140. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-128-140 .
17. **Montejano L., Shchepin E.** Topological tomography in convexity // Bull. London Math. Soc. 2002. Vol. 34, no. 3. P. 353–358. doi: 10.1112/S0024609301008700 .
18. **Nath T.** Differentiability of distance function and the proximinal condition implying convexity // J. Analysis 2021. Vol. 29, no. 1. P. 247–261. doi: 10.1007/s41478-020-00259-5 .
19. **Царьков И.Г.** Слабо монотонные множества и непрерывная выборка в несимметричных пространствах // Мат. сб. 2019. Vol. 210, № 9. P. 129–155. doi:: 10.4213/sm9107:
20. **Царьков И.Г.** Геометрия особого множества гиперповерхностей и уравнение эйконала // Мат. заметки. 2020. Vol. 108, № 3. P. 441–451. doi: 10.4213/mzm12659 .
21. **Царьков И.Г.** Свойства монотонно линейно связных множеств // Изв. РАН. Сер. математическая. 2021. V. 85, №. 2. С. 142–171. doi: doi.org/10.4213/im8995 .
22. **Царьков И.Г.** Свойства монотонно связных множеств // Мат. заметки. 2021. Vol. 109, № 5. С. 781–792. doi: 10.4213/mzm12890 .
23. **Tsar'kov I.G.** Properties of suns in the spaces L^1 and $C(Q)$ // Russian J. Math. Physics. 2021. Vol. 28. no. 3. P. 398–405. doi: 10.1134/S1061920821030122 .
24. **Царьков И.Г.** Солнечность и связность множеств в пространстве $C[a, b]$ и конечномерных полиэдральных пространствах // Мат. сб. 2022. Vol. 213, № 2. С. 149–166. doi: 10.4213/sm9554 .

25. **Ширяев А. Н.** К 200-летию со дня рождения великого русского математика П. Л. Чебышёва // Теория вероятности и ее применение. 2021. Vol. 66, № 4. С. 625–635. doi: 10.4213/tvp5523 .

Поступила 25.04.2022
После доработки 18.05.2022
Принята к публикации 20.05.2022

Алимов Алексей Ростиславович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук;
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики
г. Москва
e-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru

REFERENCES

1. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. Connectedness and solarity in problems of best and near-best approximation. *Russ. Math. Surv.*, 2016, vol. 71, no. 1, pp. 1–77. doi: 10.1070/RM9698 .
2. Alimov A.R. Convexity and monotone linear connectivity of sets with a continuous metric projection in three-dimensional spaces. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 28–46 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-28-46 .
3. Alimov A.R. Geometric structure of Chebyshev sets and suns in three-dimensional spaces with a cylindrical norm. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2020, vol. 75, no. 5, pp. 209–215. doi: 10.3103/S0027132220050022 .
4. Alimov A.R. Characterization of sets with continuous metric projection in the space ℓ^∞_n. *Math. Notes*, 2020, vol. 108, no. 3, pp. 309–317. doi: 10.1134/S0001434620090011 .
5. Alimov A.R. Monotone path-connectedness of strict suns. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 3, pp. 1267–1276. doi: 10.1134/S1995080222060038 .
6. Alimov A.R., Bednov B.B. Monotone path-connectedness of Chebyshev sets in three-dimensional spaces. *Sb. Math.*, 2021, vol. 212, no. 5, pp. 636–654. doi: 10.1070/SM9325 .
7. Alimov A.R., Shchepin E.V. Convexity of suns in tangent directions. *J. Convex Analysis*, 2019, vol. 26, no. 4, pp. 1071–1076.
8. Alimov A., Tsar'kov I. Smoothness of subspace sections of the unit balls of $C(Q)$ and L^1. *J. Approx. Theory*, 2021, vol. 265, art. no. 105552. doi: 10.1016/j.jat.2021.105552 .
9. Aumann G. On a topological characterization of compact convex point sets. *Ann. Math.*, 1936, vol. 37, no. 2, pp. 443–447. doi: 10.2307/1968456 .
10. Bednov B.B. Finite-dimensional spaces where the class of Chebyshev sets coincides with the class of closed and monotone path-connected sets. *Math. Notes*, 2022, vol. 111, no. 3-4, pp. 505–514. doi: 10.1134/S000143462203018X .
11. Bendit T. Chebyshev subsets of a Hilbert space sphere. *J. Austral. Math. Soc.*, 2019, vol. 107, no. 3, pp. 289–301. doi: 10.1017/S1446788719000508 .
12. Bingham N.H. The life, work, and legacy of P. L. Chebyshev. *Theory Probab. Appl.*, 2022, vol. 66, no. 4, pp. 506–521. doi: 10.1137/S0040585X97T990587 .
13. Boltyanski V., Martini H., Soltan P.S. *Excursions into combinatorial geometry.* Berlin; Heidelberg: Springer, 1997, 427 p. doi: 10.1007/978-3-642-59237-9 .
14. Brosowski B., Deutsch F. On some geometric properties of suns. *J. Approx. Theory*, 1974, vol. 10, no. 3, pp. 245–267. doi: 10.1016/0021-9045(74)90122-1 .
15. Brown A.L. Suns in normed linear spaces which are finite dimensional. *Math. Ann.*, 1987, vol. 279, no. 1, pp. 87–101. doi: 10.1007/BF01456192 .
16. Lebedev P.D., Uspenskii A.A. On the analytical construction of solutions for one class of time-optimal control problems with nonconvex target set. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 128–140 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-128-140 .
17. Montejano L., Shchepin E. Topological tomography in convexity. *Bull. London Math. Soc.*, 2002, vol. 34, no. 3, pp. 353–358. doi: 10.1112/S0024609301008700 .

18. Nath T. Differentiability of distance function and the proximinal condition implying convexity. *J. Analysis*, 2021, vol. 29, no. 1, pp. 247–261. doi: 10.1007/s41478-020-00259-5 .
19. Tsar'kov I.G. Weakly monotone sets and continuous selection in asymmetric spaces. *Sb. Math.*, 2019, vol. 210, no. 9, pp. 1326–1347. doi: 10.1070/SM9107 .
20. Tsar'kov I.G. The geometry of a singular set of hypersurfaces and the eikonal equation. *Math. Notes*, 2020, vol. 108, no. 3, pp. 426–433. doi: 10.1134/S0001434620090114 .
21. Tsar'kov I.G. Properties of monotone path-connected sets. *Izv. Math.*, 2021, vol. 85, no. 2, pp. 306–331. doi: 10.1070/IM8995 .
22. Tsar'kov I.G. Properties of monotone connected sets. *Math. Notes*, 2021, vol. 109, no. 5, pp. 819–827. doi: 10.1134/S0001434621050138 .
23. Tsar'kov I.G. Properties of suns in the spaces L^1 and $C(Q)$. *Russ. J. Math. Phys.*, 2021, vol. 28, no. 3, pp. 398–405. doi: 10.1134/S1061920821030122 .
24. Tsar'kov I.G. Solarity and connectedness of sets in the space $C[a, b]$ and in finite-dimensional polyhedral spaces. *Sb. Math.*, 2022, vol. 213, no. 2, pp. 268–282. doi: 10.1070/SM9554 .
25. Shiryaev A.N. On the bicentenary of the birth of P. L. Chebyshev, a great Russian mathematician. *Theory Probab. Appl.*, 2022, vol. 66, no. 4, pp. 497–505. doi: 10.1137/S0040585X97T990575 .

Received April 25, 2022
Revised May 18, 2022
Accepted May 20, 2022

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project 22-11-00129).

Alexey R. Alimov, Dr. Phys.-Math. Sci., Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 119899 Russia, Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, e-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru .

Cite this article as: A. R. Alimov. Tomographic characterizations of suns in three-dimensional spaces. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 45–55.