ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 2 2022

УДК 512.54

ГРУППЫ, НАСЫЩЕННЫЕ КОНЕЧНЫМИ ПРОСТЫМИ ГРУППАМИ $L_3(2^n)$, $L_4(2^l)$[1]

А. А. Шлепкин

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое множество групп. Для группы G через $\mathfrak{M}(G)$ обозначим множество всех подгрупп G, изоморфных элементам из $\mathfrak{M}$. Говорят, что G насыщена группами из $\mathfrak{M}$, если любая конечная подгруппа группы G содержится в некотором элементе из $\mathfrak{M}(G)$. В работе доказывается, что если G-периодическая группа или группа Шункова и G насыщена группами из множества $\{L_3(2^n), L_4(2^l) \mid n = 1, 2, \dots; l = 1, \dots, l_0\}$, где l_0 фиксировано, то множество элементов конечного порядка из G образует группу, изоморфную одной из групп множества $\{L_3(R), L_4(2^l) \mid l = 1, \dots, l_0\}$, где R — подходящее локально конечное поле характеристики 2.

Ключевые слова: периодическая группа, группа Шункова, насыщенность группы множеством групп.

A. A. Shlepkin. Groups saturated with finite simple groups $L_3(2^n)$ and $L_4(2^l)$.

Let $\mathfrak{M}$ be a certain set of groups. For a group G, we denote by $\mathfrak{M}(G)$ the set of all subgroups of G that are isomorphic to elements of $\mathfrak{M}$. A group G is said to be saturated with groups from $\mathfrak{M}$ if any finite subgroup of G is contained in some element of $\mathfrak{M}(G)$. We prove that if G is a periodic group or a Shunkov group and G is saturated with groups from the set $\{L_3(2^n), L_4(2^l) \mid n = 1, 2, \dots; l = 1, \dots, l_0\}$, where l_0 is fixed, then the set of elements of finite order from G forms a group isomorphic to one of the groups from the set $\{L_3(R), L_4(2^l) \mid l = 1, \dots, l\}$, where R is an appropriate locally finite field of characteristic 2.

Keywords: periodic group, Shunkov group, saturation of a group with a set of groups.

MSC: 20E25

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-249-257

Работа посвящается светлой памяти
Вячеслава Александровича Белоногова

Введение

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое множество групп. По определению группа G *насыщена* группами из множества групп $\mathfrak{M}$, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{M}$ (множество $\mathfrak{M}$ называется *насыщающим множеством* для группы G, см. [17, с. 129]).

В Коуровской тетради [5] поставлен вопрос 14.101: *верно ли, что периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, сама является простой группой лиева типа*?

Группа G называется группой Шункова, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу [9]. Группы Шункова с условием насыщенности изучались различными авторами [10; 11; 15]. Класс групп Шункова очень обширен и включает в себя, в частности, все группы без кручения и некоторые смешанные группы. Согласно определению, если множество всех элементов конечного порядка группы G образует подгруппу, то она называется *периодической частью* группы G и обозначается $T(G)$ [3, с. 95]. Для каждой заданной группы Шункова G актуален следующий вопрос: обладает ли группа G периодической частью $T(G)$?

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 19-71-10017).

Нетривиальность ответа на этот вопрос подчеркивается примерами разрешимых групп Шункова, не обладающих периодической частью (см., например, [13]). Однако группы Шункова, насыщенные некоторыми конечными простыми группами лиева типа, обладают периодической частью, изоморфной соответствующей группе лиева типа над подходящим локально конечным полем (см. [15]). В связи с чем был поставлен следующий вопрос (А. И. Созутов [7, проблема 16]): *верно ли, что группа Шункова, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, обладает периодической частью, изоморфной простой группе лиева типа?*

В данной работе получены частичные ответы на вопрос 14.101 из Коуровской тетради [5] и на вопрос А. И. Созутова [7, проблема 16] для групп, насыщенных конечными простыми группами лиева типа $L_3(2^n)$ и $L_4(2^l)$. Зафиксируем натуральное число l_0. Положим

$$\mathfrak{C} = \{L_3(2^n) \mid n = 1, 2, \ldots\},$$

$$\mathfrak{A} = \{L_4(2^l) \mid l = 1, \ldots, l_0\},$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{C}.$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$. Тогда группа G изоморфна одной из групп множества*

$$\{L_3(R), L_4(2^l) \mid l = 1, \ldots, l_0\},$$

где R — подходящее локально конечное поле характеристики 2.

Теорема 2. *Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна одной из групп множества*

$$\{L_3(R), L_4(2^l) \mid l = 1, \ldots, l_0\},$$

где R — подходящее локально конечное поле характеристики 2.

1. Доказательство теоремы 1

Пусть G — группа, K — подгруппа G, $\mathfrak{X}$ — множество групп. Через $\mathfrak{X}_G(K)$ будем обозначать множество всех подгрупп группы G, содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. В частности, если 1 — единичная подгруппа группы G, то $\mathfrak{X}_G(1)$ обозначает множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если из контекста ясно, о какой группе идет речь, то вместо $\mathfrak{X}_G(K)$ будем писать $\mathfrak{X}(K)$.

Предположим противное, пусть G — контрпример к утверждению теоремы 1. Тогда $\mathfrak{M}(1) \neq \varnothing$.

Лемма 1. *G — бесконечная группа.*

Доказательство. Предположим обратное. В этом случае группа G конечна и согласно условию теоремы 1 изоморфна некоторой группе из $\mathfrak{M}$. Следовательно, G изоморфна одной из групп множества

$$\{L_3(2^n), L_4(2^l) \mid n = 1, 2, \ldots; l = 1, \ldots, l_0\};$$

противоречие с тем, что G — контрпример к утверждению теоремы 1.

Лемма доказана.

Лемма 2. $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим обратное. Тогда $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{C}(1) \neq \varnothing$. Покажем, что в этом случае группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{C}$. Пусть K — конечная подгруппа из G. По условию теоремы 1 в G существует конечная подгруппа H такая, что $K \leq H \in \mathfrak{M}(1) = \mathfrak{C}(1) \neq \varnothing$, и, следовательно, $H \simeq L_3(2^k)$ для некоторого натурального k. В силу произвольности выбора K в качестве конечной подгруппы группы G группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{C}$. В этом случае, как доказано в работе [6, теорема], группа G изоморфна $L_3(R)$ для подходящего локально конечного поля R характеристики 2; противоречие с тем, что G — контрпример к утверждению теоремы 1.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любого 2-элемента $g \in G$ выполняется свойство $g^4 = 1$, где 1 — единица группы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию теоремы 1 в G существует конечная подгруппа H такая, что $g \in H$, и либо $H \simeq L_3(2^k)$, либо $H \simeq L_4(2^k)$ для некоторого натурального k. Поскольку $L_3(2^k)$ изоморфно вкладывается в $L_4(2^k)$, то достаточно рассмотреть случай $H \simeq L_4(2^k)$. Обозначим через S_H силовскую 2-подгруппу группы H, содержащую элемент g из условия леммы. Пусть F — поле порядка $q = 2^m, m \geqslant 1$. Тогда S_H изоморфна группе

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \gamma & \delta \\ 0 & 1 & \beta & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu \in F \right\}$$

— группе верхних унитреугольных матриц из $GL_4(2^m)$. Пусть ψ — изоморфизм T на S_H,

$$t = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ 0 & 1 & \beta_1 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 1 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in T \quad \text{и} \quad g = \psi(t),$$

где элемент g — из условия леммы. Тогда

$$t^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\lambda_1 + \mu_1\gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_1\lambda_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t^4 = t^2 t^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как ψ — изоморфизм, то

$$g^4 = \psi(t)^4 = \psi(t^4) = \psi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 1,$$

где 1 — единица группы G.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Силовские 2-подгруппы группы G конечны, сопряжены и имеют ступень нильпотентности 3.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1 следует, что G — бесконечная группа. Если в G найдется конечная силовская 2-подгруппа, то по [14, предложение 9] все силовские 2-подгруппы группы G конечны и сопряжены в силу того, что G — группа Шункова, и лемма доказана.

Предположим, что в G нет конечных силовских 2-подгрупп. Тогда все силовские 2-подгруппы группы G бесконечны. Из леммы 2 следует, что $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$. Возьмем $H \in \mathfrak{A}(1)$. Пусть S_H — некоторая силовская 2-подгруппа группы H. Тогда $S_H < S$, где S — бесконечная силовская 2-подгруппа группы G. По лемме 3 S — бесконечная 2-группа периода 4, и, следовательно, S — бесконечная локально конечная группа по известной теореме Санова [8]. Значит, в S существует конечная подгруппа K такая, что $S_H < K < S$ и $|K| > |L_4(2^{l_0})|$. По условию насыщенности в группе G существует конечная подгруппа H_1 такая, что $K < H_1$ и $H_1 \in \mathfrak{M}(1)$. Здесь имеются две возможности: либо $H_1 \simeq L_3(2^n)$ для некоторого натурального n, либо $H_1 \simeq L_4(2^l)$ для некоторого натурального $l \in \{1, \dots, l_0\}$.

Покажем, что случай $H_1 \simeq L_3(2^n)$ невозможен. Предположим обратное. Силовские 2-подгруппы в $L_m(2^n)$ сопряжены подгруппе унитреугольных матриц из $L_3(2^n)$, а ступень нильпотентности подгруппы унитреугольных матриц из $L_m(2^n)$ равна $m-1$ [12, с. 128, 274]. Пусть S_{H_1} — силовская 2-подгруппа группы H_1. Следовательно, ступень нильпотентности S_{H_1} равна 2. Но это невозможно, поскольку S_{H_1} содержит собственную подгруппу S_H, ступень нильпотентности которой равна 3.

Покажем, что случай $H_1 \simeq L_4(2^l)$ также невозможен. Предположим обратное. Действительно, в силу выбора подгрупп K и H_1 имеем цепочку неравенств $|H_1| > |K| > |L_4(2^{l_0})|$. Но поскольку $l \leqslant l_0$, то из формул для вычисления порядка группы $L_4(2^n)$, приведенных в [1, с. 168], получаем противоречие с тем, что $|H_1| = |L_4(2^l)| > |L_4(2^{l_0})| = |L_4(2^{l_0})|$.

Таким образом, все силовские 2-подгруппы группы G конечны и сопряжены. Из леммы 2 следует, что $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$. Возьмем $H \in \mathfrak{A}(1)$. Тогда $H_1 \simeq L_4(2^l)$ для некоторого натурального $l \in \{1, \dots, l_0\}$. Пусть S_H — некоторая силовская 2-подгруппа группы H. Тогда $S_H < S$, где S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G, которая, как отмечалось выше, конечна. Как упоминалось выше, ступень нильпотентности S_H равна 3. По условию теоремы 1 имеем $S_H < S < K \in \mathfrak{A}(1)$. Тогда $K \simeq L_4(2^l)$ для некоторого натурального $l \in \{1, \dots l_0\}$. Так как S — силовская 2-подгруппа в K, то ступень нильпотентности S также равна 3.

Лемма доказана.

Зафиксируем некоторую силовскую 2-подгруппу S группы G.

Лемма 5. *Централизатор подгруппы S в группе G содержит неединичный элемент нечетного порядка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 4 следует, что S — конечная 2-группа, и следовательно, нильпотентна. Возьмем $1 \neq z \in Z(S)$. Пусть $C = C_G(z)$.

Если C — конечная группа, то согласно лемме 1 и известному результату Шункова о локальной конечности периодической группы, содержащей инволюцию с конечным централизатором [18, теорема], G — бесконечная локально конечная группа. Значит, в G существует конечная подгруппа K такая, что $|K| > |L_4(2^{l_0})|$. Пусть теперь X — произвольная конечная подгруппа группы G. По условию теоремы 1 в группе G существует конечная подгруппа K_1 такая, что $\langle X, K\rangle < K_1$ и $K_1 \in \mathfrak{M}(1)$. Ясно, что $|K_1| > |L_4(2^{l_0})|$, и как следствие $K_1 \simeq L_3(2^n)$ для некоторого натурального n. В силу произвольности выбора X как конечной подгруппы группы G получаем, что группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{C}$. Как уже отмечалось (доказательство леммы 2), из основного результата работы [6, теорема] вытекает, что $G \simeq L_3(R)$ для некоторого локально конечного поля характеристики 2; противоречие с тем, что G — контрпример к утверждению теоремы 1.

Итак, C — бесконечная периодическая группа, содержащая S, а также неединичные элементы нечетного порядка. Рассмотрим фактор-группу $\overline{C} = C/\langle z\rangle$. Так как в конечной 2-группе нормализатор любой собственной подгруппы отличен от самой подгруппы, то возьмем в $\overline{C}$ инволюцию $\overline{t}_1 \in Z(\overline{S}) = Z(S/\langle z\rangle)$. Имеем, $\overline{C}$ — бесконечная группа. Если $C_{\overline{C}}(\overline{t}_1)$ — конечная группа, то согласно упоминавшемуся выше результату Шункова о локальной конечности периодической группы, содержащей инволюцию с конечным централизатором, $\overline{C}$ — бесконечная локально конечная группа. Ввиду теоремы Шмидта о том, что расширение локально конечной группы при помощи локально конечной группы есть локально конечная группа [3, теорема 23.1.1], C — бесконечная локально конечная группа. Из леммы 2 следует, что в G найдется конечная подгруппа X, изоморфная $L_4(2^l)$ для некоторого натурального $l \in \{1, \dots l_0\}$. Возьмем в X некоторую силовскую 2-подгруппу S_X. Ввиду утверждения леммы 4 можно считать, что $X \leq S < C$. Так как C — бесконечная локально конечная группа, то в C существует конечная подгруппа K такая, что $|K| > |L_4(2^{l_0})|$. По условию теоремы 1 в группе G существует конечная подгруппа K_1 такая, что $\langle S_X, K\rangle < K_1$ и $K_1 \in \mathfrak{M}(1)$. Ясно, что $|K_1| > |L_4(2^{l_0})|$, и как следствие $K_1 \simeq L_3(2^n)$ для некоторого натурального n. Пусть S_{K_1} — силовская 2-подгруппа группы K_1, содержащая S_X. Тогда ступень нильпотентности S_{K_1} равна 2, что невозможно, поскольку S_{K_1} содержит собственную подгруппу S_X, ступень нильпотентности которой равна 3. Итак, $C_{\overline{C}}(\overline{t}_1)$ — бесконечная группа, содержащая $\overline{S}$. Значит, $C_1 = N_C(\langle z, t_1\rangle)$ — бесконечная группа (где t_1 — некоторый прообраз $\overline{t_1}$ в C), содержащая S. Положим $C = C_0$ и будем считать, что построена цепочка подгрупп

$$\langle z\rangle < \ldots < \langle z, t_1, \ldots, t_k\rangle < S,$$

где $k \geqslant 1$, таких, что $C_k = N_{C_{k-1}}(\langle z, t_1, \ldots, t_k\rangle)$ — бесконечная группа, и $S < C_k$. Рассмотрим фактор-группу

$$\overline{C_k} = N_C(\langle z, t_1, \ldots, t_k\rangle)/\langle z, t_1, \ldots, t_k\rangle$$

и возьмем в ней инволюцию

$$\overline{t_{k+1}} \in Z(\overline{S}) = Z(S/\langle z, t_1, \ldots, t_k\rangle).$$

Имеем, $\overline{C_k}$ — бесконечная группа. Если $C_{\overline{C_k}}(\overline{t_{k+1}})$ — конечная группа, то согласно упоминавшейся выше теореме Шункова о периодической группе с почти регулярной инволюции $\overline{C}_k$ — бесконечная локально конечная группа, а C_k — бесконечная локально конечная группа, содержащая S, что невозможно (доказывается точно так же, как случай выше с бесконечной локально конечной группой C, содержащей группу S). Итак, $C_{\overline{C_k}}(\overline{t_{k+1}})$ — бесконечная группа, содержащая $\overline{S}$. Следовательно, $C_{k+1} = N_{C_k}(\langle z, t_1, \ldots, t_k, t_{k+1}\rangle)$ — бесконечная группа (t_{k+1} — некоторый прообраз $\overline{t_{k+1}}$ в C_{k+1}), содержащая S. Таким образом, построена цепочка конечных групп

$$\langle z\rangle < \ldots < \langle z, t_1, \ldots, t_k\rangle < \langle z, t_1, \ldots, t_k, t_{k+1}\rangle < S,$$

где $k \geqslant 1$, C_{k+1} — бесконечная группа и $S < C_{k+1}$.

Из леммы 4 следует, что S — конечная группа. Следовательно, для некоторого натурально числа $m < |S|$

$$\langle z\rangle < \ldots < \langle z, t_1, \ldots, t_k\rangle < \langle z, t_1, \ldots, t_k\rangle < \ldots < \langle z, t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_m\rangle = S,$$

$$C_m = N_{C_{m-1}}(\langle z, t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_m\rangle) = N_{C_{m-1}}(S),$$

при этом $N_G(S)$ — бесконечная группа. Имеем, $C_{C_{m-1}}(S)$ — бесконечная группа и в силу леммы 4 содержит неединичные элементы нечетного порядка.

Лемма доказана.

Завершим д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G. Из леммы 5 следует, что группа $C_G(S)$ содержит неединичный элемент a нечетного порядка. По условию теоремы 1 конечная группа $\langle S, a\rangle \leq H$ и $H \simeq L_3(2^k)$ либо $H \simeq L_4(2^k)$ для некоторого натурального k. Из описания централизаторов силовских 2-подгрупп в конечных простых неабелевых группах [4, теорема 7] вытекает, что как в $L_3(2^k)$, так и в $L_4(2^k)$ централизатор силовской 2-подгруппы является 2-группой; противоречие с выбором элемента a.

Теорема 1 доказана.

2. Доказательство теоремы 2

Предположим обратное, пусть G — контрпример к утверждению теоремы 2. Тогда из теоремы 1 следует, что G — непериодическая группа и $\mathfrak{M}(1) \neq \varnothing$.

Лемма 6. *G содержит бесконечно много элементов конечного порядка.*

Доказательство. Предположим обратное. В этом случае все элементы конечного порядка из G образуют конечную характеристическую подгруппу (теорема Дицмана [2]). Следовательно, группа G обладает конечной периодической частью $T(G)$, которая в силу условия теоремы 2 изоморфна одной из групп множества $\mathfrak{M}$; противоречие с тем, что G — контрпример к утверждению теоремы 2.

Лемма доказана.

Лемма 7. *G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Доказательство. По лемме 6 группа G содержит бесконечно много элементов конечного порядка. В работе [16] доказано, что группа Шункова, содержащая бесконечное множество элементов конечного порядка, обязательно содержит бесконечную локально конечную подгруппу. Следовательно, группа G как группа Шункова обладает бесконечной локально конечной подгруппой.

Лемма доказана.

Лемма 8. $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$.

Доказательство. Предположим обратное. Тогда $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{C}(1) \neq \varnothing$. Покажем, что в этом случае группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{C}$. Пусть K — конечная подгруппа из G. По условию теоремы 2 в G существует конечная подгруппа H такая, что $K \leq H \in \mathfrak{M}(1) = \mathfrak{C}(1) \neq \varnothing$, и, следовательно, $H \simeq L_3(2^k)$ для некоторого натурального k. В силу произвольности выбора K как конечной подгруппы группы G группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{C}$. Но в этом случае согласно [15, теорема 2] группа Шункова G обладает периодической частью $T(G)$, которая ввиду условия теоремы 2 изоморфна $L_3(R)$ для подходящего локально конечного поля R характеристики 2. Противоречие с тем, что G — контрпример к утверждению теоремы 2.

Лемма доказана.

Лемма 9. *Для любого 2-элемента $g \in G$ выполняется свойство $g^4 = 1$.*

Доказательство. Данная лемма доказывается точно так же, как и лемма 3.

Лемма доказана.

Лемма 10. *Силовские 2-подгруппы группы G являются бесконечными локально конечными группами.*

Доказательство. Предположим обратное, пусть S — конечная силовская 2-подгруппа группы G, и $|S| = 2^m$ — ее порядок. Как доказано в [14, предложение 9], если группа Шункова содержит конечную силовскую 2-подгруппу, то в этом случае все силовские 2-подгруппы группы конечны и сопряжены. Следовательно, все силовские 2-подгруппы группы G конечны и сопряжены, поскольку последняя является группой Шункова.

Из леммы 7 следует, что в группе G найдется конечная подгруппа K, порядок которой может быть больше любого наперед заданного натурального числа. Ввиду условия теоремы 2 можно считать, что $K \in \mathfrak{M}(1)$. Зафиксируем в K некоторую силовскую 2-подгруппу S_K. Согласно формуле для вычисления порядка группы $L_n(q)$, приведенной в [1, с. 168],

$$|K| = (q^{n(n-1)/2}(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \ldots (q - 1))/((q - 1)(n, (q - 1)),$$

$$|S_K| = q^{n(n-1)/2},\ \text{где } n \in \{3,4\},\ q = 2^r,\ r \text{ — натуральное число.}$$

Так как $|K|$ может быть больше любого наперед заданного натурального числа, то и r можно взять больше любого наперед заданного натурального числа. Поскольку $|S| = 2^m$ фиксировано, то возьмем $r = r_0,\ q = q_0 = 2^{r_0}$ такие, что

$$|S_K| = q_0^{n(n-1)/2} > 2^m,\ \text{где } n \in \{3,4\}.$$

Так как все силовские 2-подгруппы группы G сопряжены, то $S_K \leq S^g$ для некоторого $g \in G$. Следовательно, $|S_K| \leqslant |S^g| = |S|$. Приходим к противоречивому неравенству

$$2^m = |S| = |S^g| \geqslant |S_K| = q_0^{n(n-1)/2} > 2^m,\ \text{где } n \in \{3,4\}.$$

Таким образом, в группе G нет конечных силовских 2-подгрупп. Второе утверждение леммы вытекает из известного упоминавшегося выше результата Санова о локальной конечности группы периода 4 и леммы 9.

Лемма доказана.

Завершим д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. По лемме 8 имеем $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$. Возьмем $H \in \mathfrak{A}(1)$. Тогда $H \simeq L_4(2^{l_1})$ для некоторого натурального $l_1 \in \{1,\ldots,l_0\}$. Будем считать число l_1 максимально возможным, для которого $H \in \mathfrak{A}(1)$. Зафиксируем некоторую силовскую 2-подгруппу S_H группы H. Как отмечалось выше, ступень нильпотентности S_H равна 3. Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G, содержащая S_H. Так как по лемме 10 S — бесконечная локально конечная группа, то в S существует конечная подгруппа K такая, что $|K| > |S_H|$. Тогда $\langle S_H, K\rangle$ — конечная 2-группа. По условию теоремы 2 в группе G существует конечная подгруппа K_1 такая, что $\langle S_H, K\rangle < K_1$ и $K_1 \in \mathfrak{M}(1)$. Пусть S_{K_1} — силовская 2 подгруппа группы K_1, содержащая $\langle S_H, K\rangle$. Тогда

$$|S_{K_1}| > |\langle S_H, K\rangle| > |S_H|.$$

Если $K_1 \simeq L_4(2^{l_2})$, где $l_2 \leqslant l_0$, то $K_1 \in \mathfrak{A}(1)$ и

$$|S_{K_1}| = 2^{6l_2} > |S_H| = 2^{6l_1} \text{ и } l_2 > l_1.$$

Противоречие с тем, что l_1 — максимально возможное натуральное число, для которого $H \in \mathfrak{A}(1)$. Следовательно, $K_1 \simeq L_3(2^n)$ для некоторого натурального n. В этом случае ступень нильпотентности группы S_{K_1} равна 2. С другой стороны, группа S_{K_1} содержит подгруппу S_H, ступень нильпотентности которой равна 3. Следовательно, ступень нильпотентности S_{K_1} не менее 3; противоречие.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоногов В.А.** Задачник по теории групп. М.: Наука, 2000. 464 с.
2. **Дицман А.П.** О p– группах // Докл. АН СССР. № 15. 1937. С. 71–76.
3. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп СПб.: Лань, 2009. 287 с.
4. **Кондратьев А.С., Мазуров В.Д.** 2-сигнализаторы конечных простых групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 5. С. 594–623.
5. The Kourovka notebook: Unsolved problems in group theory / eds. V. D. Mazurov and E. I. Khukhro. No. 19. Novosibirsk: Inst. Math. SO RAN Publ., 2018. 250 p. URL: https://kourovka-notebook.org/ .
6. **Лыткина Д.В., Мазуров В.Д.** Периодические группы, насыщенные группами $L_3(2^m)$ // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 606—626.
7. **Маслова Н.В., Белоусов И.Н., Минигулов Н.А.** Открытые проблемы, сформулированные на XII школе-конференции по теории групп, посвященной 85-летию В.А. Белоногова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Vol. 26, no. 3. P. 275–285. doi 10.21538/0134-4889-2020-26-3-275-285 .

8. **Санов И.Н.** Решение проблемы Бернсайда для периода 4 // Учен. записки ЛГУ. Сер. Математическая. 1940. № 55. С. 166–170.
9. **Сенашов В.И., Шунков В.П.** Группы с условиями конечности. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. 326 с.
10. **Senashov V.I.** On periodic groups of Shunkov with the Chernikov centralizers of involutions // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2020. Т. 32. P. 101–117. doi: 10.26516/1997-7670.2020.32.101.
11. **Senashov V.I.** On periodic Shunkovs groups with almost layer-finite normalizers of finite subgroups // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2021. Vol. 37. p. 118–132. doi: 10.26516/1997-7670.2021.37.118.
12. **Супруненко Д.А.** Группы матриц. М.: Наука, 1972. 352 с.
13. **Череп А.А.** О элементах конечного порядка в бипримитивно конечных группах // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 4. С. 518–521.
14. **Шлепкин А.А.** Группы Шункова, насыщенные линейными и унитарными группами степени 3 над полями нечетных порядков // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 341–351. doi: 10.17377/semi.2016.13.029.
15. **Шлепкин А.А., Сабодах И.В.** О двух свойствах группы Шункова // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2021. Т. 35. P. 103–119. doi: 10.26516/1997-7670.2021.35.103.
16. **Шлепкин А.К.** О сопряженно бипримитивно конечных группах с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 2. С. 232–231.
17. **Шлепкин А.К.** О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми группами // Мат. тр. 1998. Т. 1, № 1. С. 129–138.
18. **Шунков В.П.** О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–494.

Поступила 8.01.2022
После доработки 20.03.2022
Принята к публикации 28.03.2022

Шлепкин Алексей Анатольевич
канд. физ.-мат. наук
доцент
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: shlyopkin@mail.ru

REFERENCES

1. Belonogov V.A. *Zadachnik po teorii grupp* [Exercise book on group theory]. Moscow: Nauka Publ., 2000, 464 p.
2. Dietzmann A.P. On p-groups. *Dokl. Acad. Nauk SSSR*, 1937, vol. 15, pp. 71–76 (in Russian).
3. Kargapolov M.I., Merzljakov Yu.I. *Fundamentals of the theory of groups.* NY; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1979, 203 p. ISBN: 978-1-4612-9966-0. Original Russian text published in Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. *Osnovy teorii grupp*, St. Petersburg: Lan' Publ., 2009, 287 p.
4. Kondrat'ev A.S., Mazurov V.D. 2-signalizers of finite simple groups. *Algebra and Logic*, 2003, vol. 42, no. 5, pp. 333–348. doi: 10.1023/A:1025923522954.
5. *The Kourovka notebook: Unsolved problems in group theory.* No. 19, ed. by V. D. Mazurov and E. I. Khukhro, Novosibirsk: Inst. Math. SO RAN Publ., 2018, 250 p. Available on: https://kourovka-notebook.org/.
6. Lytkina D.V., Mazurov V.D. Periodic groups saturated with $L_3(2^m)$. *Algebra and Logic*, 2007, vol. 46, no. 5, pp. 330–340. doi: 10.1007/s10469-007-0033-z.
7. Maslova N.V., Belousov I.N., Minigulov N.A. Open questions formulated at the 13th school-conference on group theory dedicated to V.A. Belonogov's 85th birthday. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 275–285 (in Russian).
8. Sanov I.N. Solution of the Burnside problem for exponent 4. *Uchen. Zap. Leningr. Univ. Ser. Mat.*, 1940, no. 10, pp. 166–170 (in Russian).

9. Senashov V.I., Shunkov V.P. *Gruppy s usloviyami konechnosti* [Groups with finiteness conditions]. Novosibirsk: SO RAN Publ., 2001, 326 p. ISBN: 5-7692-0439-7 .
10. Senashov V.I. On periodic groups of Shunkov with the Chernikov centralizers of involutions. *The Bulletin of Irkutsk State University. Ser. Mathematics*, 2020, vol. 32, pp. 101–117. doi: 10.26516/1997-7670.2020.32.101 .
11. Senashov V.I. On periodic Shunkov's groups with almost layer-finite normalizers of finite subgroups. *The Bulletin of Irkutsk State University. Ser. Mathematics*, 2021, no. 37, pp. 118–132. doi: 10.26516/1997-7670.2021.37.118 .
12. Suprunenko D.A. *Matrix groups.* Providence: AMS, 1976, 252 p. ISBN: 0821813412 . Original Russian text published in Suprunenko D.A. *Gruppy matrits*, Moscow: Nauka Publ., 1972, 352 p.
13. Cherep A.A. Set of elements of finite order in a biprimitively finite group. *Algebra and Logic*, 1987, vol. 26, no. 4, pp. 311–313. doi: 10.1007/BF01980245 .
14. Shlepkin A.A. On Shunkov groups, saturated with linear and unitary groups of dimension 3 over fields of odd orders. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 341–351 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2016.13.029 .
15. Shlepkin A.A., Sabodakh I.V. On two properties of Shunkov group. *The bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2021, no. 35, pp. 103–119. doi: 10.26516/1997-7670.2021.35.103 .
16. Shlepkin A.K. Conjugately biprimitively finite groups with the primary minimal condition. *Algebra Logic*, 1983, vol. 22, no. 2, pp. 165–169. doi: 10.1007/BF01978669 .
17. Shlepkin A. On certain torsion groups saturated with finite simple groups. *Sib. Adv. Math.*, 1999, vol. 9, no. 2, pp. 100–108.
18. Shunkov V.P. On periodic groups with an almost regular involution. *Algebra and Logic*, 1972, vol. 11, no. 4, pp. 260–272. doi: 10.1007/BF02219098 .

Received January 8, 2022
Revised March 20, 2022
Accepted March 28, 2022

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-71-10017).

Aleksei Anatolievich Shlepkin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: shlyopkin@mail.ru .

Cite this article as: A. A. Shlepkin. Groups saturated with finite simple groups $L_3(2^n)$ and $L_4(2^l)$. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 249–257.