ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 2 2022

УДК 517.977

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ДВУХЭТАПНАЯ ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦИИ И ПРОЦЕДУРЫ НА ОСНОВЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

А. Г. Ченцов, П. А. Ченцов

Исследуется задача маршрутизации, в которой множество заданий представлено в виде суммы двух дизъюнктных подмножеств. Задания из первого подмножества должны быть выполнены прежде, чем начнется выполнение заданий из второго. Каждое задание связано с посещением мегаполиса (непустого конечного множества) с целью выполнения некоторых работ. Выбор очередности выполнения заданий может быть стеснен условиями предшествования, которые локализуются для двух вышеупомянутых подмножеств полного множества заданий. Функции стоимости, участвующие в формировании аддитивного критерия, допускают зависимость от списка заданий. Для построения решения предлагается двухэтапная процедура на основе динамического программирования. Построен оптимальный алгоритм, реализованный на ПЭВМ; приведено решение модельной задачи, связанной с фигурной листовой резкой на машинах с ЧПУ.

Ключевые слова: динамическое программирование, маршрут, условия предшествования.

A. G. Chentsov, P. A. Chentsov. An extremal two-stage routing problem and procedures based on dynamic programming.

We study a routing problem in which the set of tasks is represented as the union of two disjoint subsets. The tasks from the first subset must be completed before the execution of the tasks from the second subset. Each task is associated with a visit to a megalopolis (a nonempty finite set) in order to perform some work. The choice of the order in which the tasks are performed is subject to precedence conditions, which are localized for the mentioned two subsets of the total set of tasks. The cost functions used in the formation of the additive criterion may involve a dependence on the list of tasks. To construct a solution, a two-stage procedure based on dynamic programming is proposed. An optimal algorithm is constructed and implemented as a computer program. A model problem about shaped sheet cutting on CNC machines is solved.

Keywords: dynamic programming, route, precedence conditions.

MSC: 90C27

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-215-248

Введение

Элементы маршрутизации возникают в различных инженерных задачах и включают нередко дополнительные ограничения и усложнения постановки, отсутствующие в известной задаче коммивояжера (TSP) (см. [1–3]), которая является прототипом более сложных постановок, связанных с прикладными задачами. Так, в задаче управления инструментом при листовой резке деталей на машинах с ЧПУ (см., например, [4; 5]) возникают нетрадиционные варианты условий, вызванные технологическими требованиями. Одно из таких возможных требований — резка последовательно в наперед заданных зонах листа. В простейшем случае можно говорить о двух зонах. При этом к обслуживанию второй можно приступать только по завершении заданий, связанных с резкой в первой зоне. В настоящей работе предпринимается попытка исследовать теоретические вопросы, связанные с оптимизацией такого двухэтапного процесса средствами динамического программирования (ДП). Речь идет о согласовании процессов обслуживания двух наборов данных в условиях ограничений, связанных с условиями предшествования, и функций стоимости, допускающих зависимость от полного списка заданий, не выполненных на текущий момент.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20-08-00873.

Заметим, что предлагаемый подход применим и в случае, когда деление на зоны отсутствует, но исходная задача маршрутизации имеет ощутимую размерность. В этом случае мы прибегаем к декомпозиции “большой” задачи и занимаемся вопросом о наилучшем в некотором смысле согласовании подзадач, привлекая реализации ДП для задач умеренной размерности. Конечно, в исходной “большой” задаче мы получаем оптимизирующую процедуру, но, вообще говоря, не оптимальное решение.

В связи с решением TSP отметим сейчас только метод ветвей и границ (см. [6]), ДП (см. [7; 8], а также монографии [1–3] и обстоятельный обзор [9]). В основе излагаемой ниже конструкции находится нестандартный вариант ДП, восходящий идейно к [7]. Важной особенностью излагаемой (попятной) процедуры является то, что она в некотором смысле универсальна относительно точки старта и по этой причине достаточно экономна в смысле реализации экстремума как функции упомянутой точки. В этой связи см. в [10–12] общую процедуру на основе ДП и, в частности [12], для задачи с оптимизацией точки старта.

Мы излагаем здесь конструкции на основе ДП в алгоритмическом варианте, опираясь на ранее опубликованные общие процедуры, восходящие к [10, ч. 2, 3] (см. в этой связи [11–13] и [5, ч. II]). Данные конструкции реализуются в двухэтапном режиме. А именно, сначала мы определяем систему слоев функции Беллмана завершающей (финальной) задачи и, в частности, находим ее “последний” слой, доставляющий функцию экстремума на множестве финальных точек предваряющей задачи, которое одновременно используется в завершающей задаче как множество точек старта. Найденный слой, т. е. функцию экстремума, используем в качестве терминальной компоненты аддитивного критерия предваряющей задачи, после чего осуществляется ее решение с использованием ДП, включая оптимальный выбор точки старта, маршрута и траектории в данной задаче. Терминальная точка на траектории используется затем для конкретизации точки старта завершающей задачи, для которой определяются оптимальные маршрут и траектория. Склеивание получаемых решений, включая склеивание маршрутов и склеивание траекторий, доставляет экстремум полной задачи в условиях декомпозиции в совокупность предваряющей и завершающей задач.

Настоящий выпуск журнала посвящен Владимиру Васильевичу Васину, много сделавшему для развития вычислительной математики и математического образования на Урале.

1. Общие сведения, обозначения общего характера

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки и др.); через $\varnothing$ обозначаем пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению, def заменяет фразу “по определению”. *Семейством* называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Любым двум объектам x и y сопоставляется их неупорядоченная пара $\{x;y\}$ в виде множества, содержащего x, y и не содержащего никаких других элементов. Каждому объекту z сопоставляется его синглетон $\{z\} \triangleq \{z;z\}$. Каждое множество есть объект. Поэтому, следуя [14, с. 67], двум любым объектам x и y сопоставляем упорядоченную пару (УП) $(x,y) \triangleq \{\{x\};\{x;y\}\}$ с первым элементом x и вторым элементом y. Для произвольной УП h через $pr_1(h)$ и $pr_2(h)$ обозначаем первый и второй элементы h, однозначно определенные равенством $h = (pr_1(h), pr_2(h))$. Если x, y и z — объекты, то $(x,y,z) \triangleq ((x,y),z)$ есть триплет (см. [15, с. 17]) с первым элементом x, вторым элементом y и третьим элементом z.

Каждому множеству H сопоставляем семейство $\mathcal{P}(H)$ всех подмножеств (п/м) H; в виде $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$ имеем семейство всех непустых п/м H, а в виде $\mathrm{Fin}(H)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м H. В случае конечного множества S имеем $\mathrm{Fin}(S) = \mathcal{P}'(S)$. Используем стандартное определение декартова произведения двух множеств; для любых трех множеств A, B и C полагаем (см. [15, с. 17]), что $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$. Если S и T — непустые множества, то через T^S обозначаем множество всех отображений из S в T; выражения $f \in T^S$ и $f\colon S \to T$ отождествимы. При $g \in T^S$, где S и T — непустые множества, и $s \in S$, через $g(s)$ обозначаем значение отображения g в точке s; $g(s) \in T$. Для непустых множеств A, B и $C \in \mathcal{P}'(A)$, а также отображения $h \in B^A$ в виде $h^1(C) \triangleq \{h(x)\colon x \in C\}$ имеем образ множества C при действии h; $h^1(C) \in \mathcal{P}'(B)$. Как обычно, для непустых множеств S, T и R, а также отображения $u \in R^{S\times T}$ при $s \in S$ и $t \in T$ полагаем $u(s,t) \triangleq u((s,t))$; $u(s,t) \in R$. Если же S, T, P и R — непустые множества, $\psi \in R^{S\times T\times P}$, то при $s \in S$, $t \in T$ и $p \in P$ полагаем $\psi(s,t,p) \triangleq \psi((s,t,p))$; если $h \in S \times T$ и $l \in P$, то $(h,l) \in S \times T \times P$ и определено $\psi(h,l) \triangleq \psi(pr_1(h), pr_2(h), l) \in R$. Отображения такого типа понадобятся, в частности, при $R = \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, и при $R = \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \xi\}$ — неотрицательная полуось $\mathbb{R}$. Для всякого непустого множества H полагаем $\mathcal{R}_+[H] \triangleq (\mathbb{R}_+)^H$, получая множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на H.

Пусть $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}$ (натуральный ряд) и $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0;1;2;\ldots\}$. Если $K \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$ и $m \in \mathbb{N}$, то полагаем, что $K \oplus m \triangleq \{k+m\colon k \in K\}$, получая непустое п/м $\mathbb{N}$: $K \oplus m \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$. Если $p \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{N}_0$, то $\overline{p,q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid (p \leqslant k)\,\&\,(k \leqslant q)\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ (случай $\overline{p,q} = \varnothing$ допускается). Ясно, что $\overline{1,m} = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant m\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})\ \forall m \in \mathbb{N}$.

Если K — непустое конечное множество, то через $|K|$ обозначаем мощность K; полагаем также, что $|\varnothing| \triangleq 0$. Для непустых множеств S и T через $(\mathrm{Bi})[S;T]$ обозначаем множество всех биекций S на T; $(\mathrm{Bi})[S;T] \subset T^S$. Если K — непустое конечное множество, то $(\mathrm{bi})[K] \triangleq (\mathrm{Bi})[\overline{1,|K|};K]$. В частности, при $m \in \mathbb{N}$ имеем, что $(\mathrm{bi})[\overline{1,m}] = (\mathrm{Bi})[\overline{1,m};\overline{1,m}]$ есть множество всех перестановок $\overline{1,m}$ (см. [16, с. 87]); при $\alpha \in (\mathrm{bi})[\overline{1,m}]$ в виде $\alpha^{-1} \in (\mathrm{bi})[\overline{1,m}]$ имеем перестановку, обратную к α: при $k \in \overline{1,m}$ $\alpha(\alpha^{-1}(k)) = \alpha^{-1}(\alpha(k)) = k$. Используемые ниже кортежи рассматриваются как функции, определенные на конечном п/м $\mathbb{N}_0$. При этом часто используется индексная форма записи (семейство с индексом; см. [17, с. 11]). Итак, если A и B — непустые множества и определено $b_\alpha \in B$ при $\alpha \in A$, то $(b_a)_{a\in A}$ понимается как такая функция $\mathbf{b} \in B^A$, что $\mathbf{b}(\alpha) \triangleq b_\alpha\ \forall \alpha \in A$. Если при этом $A = \overline{1,m}$ или $A = \overline{0,m}$, где $m \in \mathbb{N}$, то данную функцию $b = (b_a)_{a\in A}$ именуем *кортежем.* Как и принято в теории множеств (см. [14]), *отношением* (точнее, *бинарным отношением*) называем п/м декартова произведения двух множеств. Символы $\square$ и $\diamondsuit$ используются при склеивании кортежей и, в частности, перестановок индексов.

2. Специальные обозначения и постановка задачи

В дальнейшем фиксируем непустое множество X произвольной природы, его (непустое конечное) п/м $X^0 \in \mathrm{Fin}(X)$, натуральное число $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{n} \geq 4$, множества

$$M_1 \in \mathrm{Fin}(X), \ldots, M_{\mathbf{n}} \in \mathrm{Fin}(X), \tag{2.1}$$

именуемые *мегаполисами*, а также (непустые) отношения

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \ldots, \mathbb{M}_{\mathbf{n}} \in \mathcal{P}'(M_{\mathbf{n}} \times M_{\mathbf{n}}).$$

Итак, $\mathbb{M}_1 \subset M_1 \times M_1, \ldots, \mathbb{M}_{\mathbf{n}} \subset M_{\mathbf{n}} \times M_{\mathbf{n}}$. Относительно мегаполисов (2.1) предполагается, что

$$(M_j \cap X^0 = \varnothing\ \forall j \in \overline{1,\mathbf{n}})\,\&\,(M_p \cap M_q = \varnothing\ \forall p \in \overline{1,\mathbf{n}}\ \forall q \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{p\}).$$

Итак, имеем непустое семейство $\mathcal{M} \triangleq \{M_i\colon i \in \overline{1,\mathbf{n}}\}$ мегаполисов, являющихся объектами посещения из множества X^0 возможных точек старта. Для нас интересен случай достаточно больших значений $\mathbf{n}$. В этой связи полагаем заданным число $N \in \overline{2, \mathbf{n} - 2}$, в терминах которого формируются два непустых семейства

$$\mathcal{M}_1 \stackrel{\triangle}{=} \{M_i \colon i \in \overline{1, N}\}, \quad \mathcal{M}_2 \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1 = \{M_i \colon i \in \overline{N+1, \mathbf{n}}\}$$

(каждое из этих семейств содержит не менее двух мегаполисов). Отметим, что

$$M^{(j)} \stackrel{\triangle}{=} M_{N+j} \in \mathrm{Fin}(X) \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n} - N};$$

получаем, что $\mathcal{M}_2 = \{M^{(j)} \colon j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}\}$. Кроме того, полагаем, что $\mathcal{M} \stackrel{\triangle}{=} \{M_i \colon i \in \overline{1, \mathbf{n}}\}$. Будем считать, что семейство $\mathcal{M}_1$ формирует первую зону, а семейство $\mathcal{M}_2$ — вторую зону. С этими зонами связываем две задачи маршрутизации: $\mathcal{M}_1$-задачу и $\mathcal{M}_2$-задачу. Нашей целью является исследование процессов, для которых сначала решается $\mathcal{M}_1$-задача (обслуживание всех мегаполисов из $\mathcal{M}_1$), а потом $\mathcal{M}_2$-задача (обслуживание всех мегаполисов из $\mathcal{M}_2$). Полагаем, что для обоих этих задач могут будь заданы условия предшествования, которые определяются наборами адресных пар: заданы

$$\mathbf{K}_1 \in \mathcal{P}(\overline{1, N} \times \overline{1, N}), \quad \mathbf{K}_2 \in \mathcal{P}(\overline{1, \mathbf{n} - N} \times \overline{1, \mathbf{n} - N}) \tag{2.2}$$

(случай $\mathbf{K}_1 = \varnothing$ отвечает отсутствию условий предшествования в $\mathcal{M}_1$-задаче; при $\mathbf{K}_2 = \varnothing$ отсутствуют условия предшествования в $\mathcal{M}_2$-задаче). Будем полагать далее, что множества (2.2) удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered}(\forall\, \mathbf{K}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_1) \;\; \exists z^0 \in \mathbf{K}^0 \colon pr_1(z^0) \neq pr_2(z) \;\; \forall z \in \mathbf{K}^0) \\ \&\, (\forall\, \widetilde{\mathbf{K}}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_2) \;\; \exists z^0 \in \widetilde{\mathbf{K}}^0 \colon pr_1(z^0) \neq pr_2(z) \;\; \forall z \in \widetilde{\mathbf{K}}^0).\end{gathered} \tag{2.3}$$

Условия (2.3) исключают зацикливание маршрутов, определяемых в виде перестановок и допустимых по предшествованию. Через $\mathbb{P}_1$ и $\mathbb{P}_2$ обозначаем множества всех перестановок индексов из $\overline{1, N}$ и $\overline{1, \mathbf{n} - N}$ соответственно: $\mathbb{P}_1 \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{bi})[\overline{1, N}]$, $\mathbb{P}_2 \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{bi})[\overline{1, \mathbf{n} - N}]$. Тогда (см. [5, (4.4.6)])

$$\mathcal{A}_1 \stackrel{\triangle}{=} \{\alpha \in \mathbb{P}_1 \mid \alpha^{-1}(pr_1(z)) < \alpha^{-1}(pr_2(z)) \;\; \forall z \in \mathbf{K}_1\} \neq \varnothing, \tag{2.4}$$

$$\mathcal{A}_2 \stackrel{\triangle}{=} \{\alpha \in \mathbb{P}_2 \mid \alpha^{-1}(pr_1(z)) < \alpha^{-1}(pr_2(z)) \;\; \forall z \in \mathbf{K}_2\} \neq \varnothing. \tag{2.5}$$

Кроме того, полагаем, что $\mathbb{P} \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{bi})[\overline{1, \mathbf{n}}]$. Перестановки из $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ и $\mathbb{P}$ называем *маршрутами*; при этом элементы $\mathbb{P}$ суть маршруты совокупной задачи, включающей как $\mathcal{M}_1$-задачу, так и $\mathcal{M}_2$-задачу. В связи с вопросом о выделении в составе $\mathbb{P}$ допустимых маршрутов введем операцию склеивания: при $\alpha \in \mathbb{P}_1$ и $\beta \in \mathbb{P}_2$ полагаем, что отображение $\alpha \diamondsuit \beta \colon \overline{1, \mathbf{n}} \to \overline{1, \mathbf{n}}$ определяется посредством правила

$$((\alpha \diamondsuit \beta)(k) \stackrel{\triangle}{=} \alpha(k) \;\; \forall k \in \overline{1, N}) \,\&\, ((\alpha \diamondsuit \beta)(l) \stackrel{\triangle}{=} \beta(l - N) + N \;\; \forall l \in \overline{N+1, \mathbf{n}}). \tag{2.6}$$

Итак, введено склеивание маршрутов; легко видеть, что

$$\alpha \diamondsuit \beta \in \mathbb{P} \quad \forall \alpha \in \mathbb{P}_1 \quad \forall \beta \in \mathbb{P}_2. \tag{2.7}$$

В частности, из (2.4), (2.5) вытекает, что

$$\mathbf{P} \stackrel{\triangle}{=} \{pr_1(z) \diamond pr_2(z) \colon z \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\} = \{\alpha \diamondsuit \beta \colon \alpha \in \mathcal{A}_1, \; \beta \in \mathcal{A}_2\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}). \tag{2.8}$$

Итак, в (2.8) мы имеем непустое множество всех маршрутов, допустимых по предшествованию в каждой из задач, связанных с $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Наряду с маршрутами нам потребуются траектории посещения мегаполисов, согласованные с упомянутыми маршрутами. Отметим, что предметом нашего исследования будут маршрутные процессы, включающие каждый в виде своих компонентов маршрут (перестановку индексов), траекторию (трассу) перемещений, согласованную с маршрутом, и точку старта, выбираемую из X^0. Реализация такого процесса поясняется схемой

$$(x \in X^0) \to M_{\alpha(1)} \to \ldots \to M_{\alpha(\mathbf{n})}, \tag{2.9}$$

где $\alpha \in \mathbf{P}$, и каждое посещение мегаполиса сводится к прибытию, выполнению работ и покиданию мегаполиса. В связи с этой детализацией удобно посещение мегаполиса M_j, где $j \in \overline{1,\mathbf{n}}$, трактовать как реализацию УП, элементами которой являются пункт прибытия и пункт отправления (в задаче, связанной с листовой резкой, — точка врезки и точка выключения инструмента). Мы полагаем, что данные УП реализуются только в пределах $\mathbb{M}_j$. Тогда траектория, отвечающая (2.9), допускает следующую детализацию:

$$(x \in X^0) \to (z_1 \in \mathbb{M}_{\alpha(1)}) \to \ldots \to (z_{\mathbf{n}} \in \mathbb{M}_{\alpha(\mathbf{n})}). \tag{2.10}$$

С учетом (2.10) естественно и выбор точки старта x заменить выбором УП (x,x); тогда можно говорить о системе перемещений в $X \times X$. С учетом этого введем в рассмотрение множество $\mathfrak{Z} \stackrel{\triangle}{=} (X \times X)^{\overline{0,\mathbf{n}}}$ всех отображений из $\overline{0,\mathbf{n}}$ в $X \times X$. Элементы $\mathfrak{Z}$ являются кортежами УП. Тогда при $\alpha \in \mathbf{P}$ и $x \in X^0$ получаем, что

$$\mathcal{Z}_\alpha[x] \stackrel{\triangle}{=} \{(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z} \mid (z_0 = (x,x))\,\&\,(z_\tau \in \mathbb{M}_{\alpha(\tau)}\ \ \forall \tau \in \overline{1,\mathbf{n}})\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{Z}) \tag{2.11}$$

есть множество всех траекторий, отвечающих схеме (2.10). Если $x \in X^0$, то в виде

$$\widetilde{\mathbf{D}}[x] \stackrel{\triangle}{=} \{(\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \mid (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z}) \tag{2.12}$$

получаем множество всех допустимых решений (ДР) в $\mathcal{M}$-задаче с точкой старта x ($\mathcal{M}$-задача получается соединением $\mathcal{M}_1$-задачи и $\mathcal{M}_2$-задачи). Наконец,

$$\mathbf{D} \stackrel{\triangle}{=} \{(\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}, x) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times X^0 \mid (\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in \widetilde{\mathbf{D}}[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times X^0). \tag{2.13}$$

В связи с (2.9), (2.10) и (2.11) введем в рассмотрение при $j \in \overline{1,\mathbf{n}}$

$$(\mathfrak{M}_j \stackrel{\triangle}{=} \{pr_1(z)\colon z \in \mathbb{M}_j\} \in \mathrm{Fin}(M_j))\,\&\,(\mathbf{M}_j \stackrel{\triangle}{=} \{pr_2(z)\colon z \in \mathbb{M}_j\} \in \mathrm{Fin}(M_j)). \tag{2.14}$$

С учетом (2.14) имеем также множества

$$\Big(\mathbb{X} \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathfrak{M}_i \in \mathrm{Fin}(X)\Big)\,\&\,\Big(\mathbf{X} \stackrel{\triangle}{=} \Big(\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{M}_i\Big) \cup X^0 \in \mathrm{Fin}(X)\Big), \tag{2.15}$$

подобные используемым в [12; 13]. Тогда (см. (2.14)) имеем при $j \in \overline{1,\mathbf{n}}$, что $\mathbb{M}_j \subset \mathfrak{M}_j \times \mathbf{M}_j$, и как следствие (см. (2.15)) $\mathbb{M}_j \subset \mathbb{X} \times \mathbf{X}$. Кроме того, в силу (2.15) $X^0 \subset \mathbf{X}$. Полагая $\mathbb{Z} \stackrel{\triangle}{=} ((\mathbb{X} \cup X^0) \times \mathbf{X})^{\overline{0,\mathbf{n}}}$, имеем из (2.11), что при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathbf{P}$

$$\mathcal{Z}_\alpha[x] = \{(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathbb{Z} \mid (z_0 = (x,x))\,\&\,(z_\tau \in \mathbb{M}_{\alpha(\tau)}\ \ \forall \tau \in \overline{1,\mathbf{n}})\}. \tag{2.16}$$

Представление (2.16) связывает определение (2.11) с аналогами из [12; 13].

Ниже рассматривается задача маршрутизации с аддитивным критерием. В этой связи, учитывая (2.16), введем функции стоимости, оценивающие внешние перемещения, внутренние работы (работы при посещении мегаполисов) и терминальное состояние. Пусть

$$(\mathfrak{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}'(\overline{1,N}))\,\&\,\Big(\bar{\mathbf{M}} \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{j=1}^{\mathbf{n}-N} \mathbf{M}_{N+j}\Big); \tag{2.17}$$

множества — элементы $\mathfrak{N}$ — называем *списками* (заданий), а элементы $\bar{\mathbf{M}}$ суть терминальные состояния (см. $pr_2(z_{\mathbf{n}})$ в (2.10)). Фиксируем

$$\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}], \quad c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_1 \times \mathfrak{N}], \ldots, c_{\mathbf{n}} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_{\mathbf{n}} \times \mathfrak{N}], \quad f \in \mathcal{R}_+[\bar{\mathbf{M}}]. \tag{2.18}$$

Тогда из (2.16)–(2.18) легко следует, что при $x \in X^0$, $\gamma \in \mathbf{P}$ и $(z_\tau)_{\tau \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]$ определены значения $\mathbf{c}(pr_2(z_{t-1}), pr_1(z_t), \gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}})) \in \mathbb{R}_+$ и $c_{\gamma(t)}(z_t, \gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}})) \in \mathbb{R}_+$, где $t \in \overline{1,\mathbf{n}}$, а также $f(pr_2(z_{\mathbf{n}})) \in \mathbb{R}_+$; здесь $\gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}})$ — образ промежутка $\overline{t,\mathbf{n}}$ при действии γ. С учетом этого полагаем, что при $x \in X^0$, $\gamma \in \mathbf{P}$ и $(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]$

$$\mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}] \stackrel{\triangle}{=} \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} [\mathbf{c}(pr_2(z_{t-1}), pr_1(z_t), \gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{\gamma(t)}(z_t, \gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}}))] + f(pr_2(z_{\mathbf{n}})); \tag{2.19}$$

$\mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}] \in \mathbb{R}_+$. Ясно, что (2.19) определено при $x \in X^0$ и $(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}) \in \widetilde{\mathbf{D}}[x]$. С учетом этого при $x \in X^0$ рассматриваем x-задачу

$$\mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}] \to \min, \quad (\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}) \in \widetilde{\mathbf{D}}[x], \tag{2.20}$$

которой сопоставляются экстремум $\widetilde{V}[x]$ и множество $(\mathrm{sol})[x]$ всех оптимальных решений

$$\widetilde{V}[x] \stackrel{\triangle}{=} \min_{(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}) \in \widetilde{\mathbf{D}}[x]} \mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}] \in \mathbb{R}_+, \tag{2.21}$$

$$(\mathrm{sol})[x] \stackrel{\triangle}{=} \{(\gamma^0, (z_t^0)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}) \in \widetilde{\mathbf{D}}[x] \mid \mathfrak{C}_{\gamma^0}[(z_t^0)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}] = \widetilde{V}[x]\} \in \mathrm{Fin}(\widetilde{\mathbf{D}}[x]).$$

Мы рассматриваем в качестве основной следующую (полную) задачу:

$$\mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}] \to \min, \quad (\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}, x) \in \mathbf{D}, \tag{2.22}$$

характеризуемую (глобальным) экстремумом $\mathbb{V}$ и множеством $\mathbf{SOL}$ всех ее оптимальных решений:

$$\mathbb{V} \stackrel{\triangle}{=} \min_{(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}, x) \in \mathbf{D}} \mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}] = \min_{x \in X^0} \min_{(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}) \in \widetilde{\mathbf{D}}[x]} \mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}] = \min_{x \in X^0} \widetilde{V}[x] \in \mathbb{R}_+, \tag{2.23}$$

$$\mathbf{SOL} \stackrel{\triangle}{=} \{(\gamma^0, (z_t^0)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}, x^0) \in \mathbf{D} \mid \mathfrak{C}_{\gamma^0}[(z_t^0)_{t \in \overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathbb{V}\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{D}). \tag{2.24}$$

В (2.23) мы учли (2.12), а в (2.24) — определение (2.13). Решение задачи (2.22) является нашей основной целью (нахождение $\mathbb{V}$ и какого-либо решения из $\mathbf{SOL}$ (2.24)). В связи с последним равенством в (2.23) оказывается полезной задача оптимизации точки старта

$$\widetilde{V}[x] \to \min, \quad x \in X^0, \tag{2.25}$$

характеризуемая экстремумом $\mathbb{V}$ и (непустым) экстремальным множеством

$$X^0_{\mathrm{opt}} \stackrel{\triangle}{=} \{x \in X^0 \mid \widetilde{V}[x] = \mathbb{V}\} \in \mathcal{P}'(X^0). \tag{2.26}$$

В дальнейшем роль (2.25), (2.26) весьма существенна. Наконец, напомним (2.9). Тогда

$$\widetilde{\mathbf{K}}_1 \stackrel{\triangle}{=} \{pr_1(h) \colon h \in \mathbf{K}_1\} \in \mathcal{P}(\overline{1,N}). \tag{2.27}$$

В связи с (2.27) отметим, что $\overline{1,N} \setminus \widetilde{\mathbf{K}}_1 \neq \varnothing$. Данное свойство легко извлекается из [10, предложение 4.9.3]; заметим, что при $\mathbf{K}_1 = \varnothing$ имеет место $\overline{1,N} \setminus \widetilde{\mathbf{K}}_1 = \overline{1,N}$. В общем случае $\mathbf{K}_1$ получаем, что

$$X^{00} \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{i \in \overline{1,N} \setminus \widetilde{\mathbf{K}}_1} \mathbf{M}_i \in \mathcal{P}'(\mathbf{X}). \tag{2.28}$$

В дальнейшем (2.28) играет для $\mathcal{M}_2$-задачи роль X^0, а именно: мы будем использовать элементы X^{00} (2.28) в качестве стартовых точек $\mathcal{M}_2$-задачи.

3. Некоторые вопросы, связанные с формализацией $\mathcal{M}_1$-задачи

Обсудим некоторые конструкции, подобные обсуждаемым в предыдущем разделе, но относящиеся к предваряющей задаче маршрутизации, т. е. к $\mathcal{M}_1$-задаче. Саму постановку данной задачи приведем позднее, когда будет сформирована терминальная компонента аддитивного критерия этой задачи. Используем (2.4) в части определения допустимых по предшествованию маршрутов $\mathcal{M}_1$-задачи и полагаем при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathcal{A}_1$, что

$$\mathcal{Z}^{\natural}_{\alpha}[x] \overset{\triangle}{=} \{(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}^{\natural} \mid (z_0 = (x,x))\,\&\,(z_\tau \in \mathbb{M}_{\alpha(\tau)}\ \ \forall \tau \in \overline{1,N})\}, \tag{3.1}$$

где $\mathfrak{Z}^{\natural}$ есть множество всех отображений из $\overline{0,N}$ в $X \times X$, т. е. $\mathfrak{Z}^{\natural} \overset{\triangle}{=} (X\times X)^{\overline{0,N}}$. В целях большего согласования с [12; 13; 18] введем в рассмотрение множества

$$\Big(\mathbb{X}^{\natural} \overset{\triangle}{=} \Big(\bigcup_{i=1}^{N} \mathfrak{M}_i\Big) \cup X^0\Big)\,\&\,\Big(\mathbf{X}^{\natural} \overset{\triangle}{=} \Big(\bigcup_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i\Big) \cup X^0\Big),$$

получая $\mathbb{X}^{\natural} \in \mathrm{Fin}(X)$ и $\mathbf{X}^{\natural} \in \mathrm{Fin}(X)$. Заметим, что согласно (2.14) при $j \in \overline{1,N}$ и $z \in \mathbb{M}_j$ имеют место свойства $pr_1(z) \in \mathbb{X}^{\natural}$ и $pr_2(z) \in \mathbf{X}^{\natural}$. Из (3.1) следует, что при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^{\natural}_{\alpha}[x]$ и $\tau \in \overline{0,N}$

$$(pr_1(z_\tau) \in \mathbb{X}^{\natural})\,\&\,(pr_2(z_\tau) \in \mathbf{X}^{\natural}). \tag{3.2}$$

С учетом этого введем $\mathbb{Z}^{\natural} \overset{\triangle}{=} (\mathbb{X}^{\natural} \times \mathbf{X}^{\natural})^{\overline{0,N}}$, получая, конечно, свойство $\mathbb{Z}^{\natural} \subset \mathfrak{Z}^{\natural}$. В итоге имеем в силу (3.1), что

$$\mathcal{Z}^{\natural}_{\alpha}[x] = \{(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathbb{Z}^{\natural} \mid (z_0 = (x,x))\,\&\,(z_\tau \in \mathbb{M}_{\alpha(\tau)}\ \ \forall \tau \in \overline{1,N})\}; \tag{3.3}$$

мы отмечаем представление (3.3) в связи с построениями [12; 13]. При этом

$$\mathbf{D}^{\natural}[x] \overset{\triangle}{=} \{(\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathcal{A}_1 \times \mathbb{Z}^{\natural} \mid (z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^{\natural}_{\alpha}[x]\}$$

$$= \{(\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathcal{A}_1 \times \mathfrak{Z}^{\natural} \mid (z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^{\natural}_{\alpha}[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A}_1 \times \mathfrak{Z}^{\natural}) \quad \forall x \in X^0. \tag{3.4}$$

В (3.4) введены множества ДР для вариантов $\mathcal{M}_1$-задачи, связанных с фиксацией точки старта. Наконец, имеем

$$\mathbb{D}^{\natural} \overset{\triangle}{=} \{(\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}, x) \in \mathcal{A}_1 \times \mathfrak{Z}^{\natural} \times X^0 \mid (\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in \mathbf{D}^{\natural}[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A}_1 \times \mathfrak{Z}^{\natural} \times X^0). \tag{3.5}$$

В (3.5) введено множество всех ДР в $\mathcal{M}_1$-задаче с нефиксированной точкой старта. Легко видеть, что

$$pr_2(z_N) \in X^{00} \quad \forall x \in X^0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}_1 \quad \forall (z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^{\natural}_{\alpha}[x]. \tag{3.6}$$

Предложение 1. *Если $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha\diamond\beta}[x]$, то $(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^{\natural}_{\alpha}[x]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из определений. □

Кроме того, вполне очевидно следующее положение (см. (2.12), (3.1)).

Предложение 2. *Если $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^{\natural}_{\alpha}[x]$, то $\forall \beta \in \mathcal{A}_2\ \exists (\tilde{z}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha\diamond\beta}[x]$: $z_\tau = \tilde{z}_\tau\ \ \forall \tau \in \overline{0,N}$.*

Свойства, отмеченные в (3.6), предложениях 1 и 2, связывают по сути дела траектории (предваряющей) $\mathcal{M}_1$-задачи и аналогичные траектории основной $\mathcal{M}$-задачи.

4. Финальная задача маршрутизации

В настоящем разделе рассматривается решение $\mathcal{M}_2$-задачи (по смыслу — финальной) при условии, что X^{00} используется в качестве множества возможных точек старта. Условимся о некоторых переобозначениях: если $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$, то полагаем, что

$$(M^{(j)} \triangleq M_{N+j}) \,\&\, (\mathbb{M}^{(j)} \triangleq \mathbb{M}_{N+j}) \,\&\, (\mathfrak{M}^{(j)} \triangleq \mathfrak{M}_{N+j}) \,\&\, (\mathbf{M}^{(j)} \triangleq \mathbf{M}_{N+j}). \tag{4.1}$$

При $x \in X^{00}$ и $\beta \in \mathcal{A}_2$ полагаем теперь, что

$$\mathcal{Z}^*_\beta[x] \triangleq \{(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^* \mid (z_0 = (x, x)) \,\&\, (z_\tau \in \mathbb{M}^{(\beta(\tau))} \ \ \forall \tau \in \overline{1, \mathbf{n} - N})\} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{Z}^*), \tag{4.2}$$

где $\mathfrak{Z}^* \triangleq (X \times X)^{\overline{0, \mathbf{n}-N}}$. В интересах согласования предлагаемой конструкции с [12; 13] введем некоторые вспомогательные определения, ориентируясь на (4.1). Пусть

$$\Bigl(\mathbb{X}^* \triangleq \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}-N} \mathfrak{M}_i\Bigr) \,\&\, \Bigl(\mathbf{X}^* \triangleq \Bigl(\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}-N} \mathbf{M}_i\Bigr) \cup X^{00}\Bigr). \tag{4.3}$$

Полезно иметь в виду, что $\mathbb{M}^{(j)} \subset \mathfrak{M}^{(j)} \times \mathbf{M}^{(j)}$ при $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ (см. (2.14), (4.3)), так как $(\mathfrak{M}^{(j)} = \{pr_1(z) \colon z \in \mathbb{M}^{(j)}\}) \,\&\, (\mathbf{M}^{(j)} = \{pr_2(z) \colon z \in \mathbb{M}^{(j)}\})$. Как следствие получаем, что (см. (4.2), (4.3)) при $x \in X^{00}$ и $\beta \in \mathcal{A}_2$

$$\mathcal{Z}^*_\beta[x] = \{(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathbb{Z}^* \mid (z_0 = (x, x)) \,\&\, (z_\tau \in \mathbb{M}^{(\beta(\tau))} \ \ \forall \tau \in \overline{1, \mathbf{n} - N})\}, \tag{4.4}$$

где $\mathbb{Z}^* \triangleq ((\mathbb{X}^* \cup X^{00}) \times \mathbf{X}^*)^{\overline{0, \mathbf{n}-N}}$. Итак, в (4.4) мы имеем эквивалентное представление множества (4.2). Отметим, что при $x \in X^{00}$ в силу (4.2) и (4.4)

$$\mathbf{D}^*[x] \triangleq \{(\beta, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in \mathcal{A}_2 \times \mathfrak{Z}^* \mid (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_\beta[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A}_2 \times \mathfrak{Z}^*); \tag{4.5}$$

разумеется $\mathbf{D}^*[x] \in \mathrm{Fin}(\mathcal{A}_2 \times \mathbb{Z}^*)$. Сейчас рассмотрим вопрос о функциях стоимости в $\mathcal{M}_2$-задаче. Полагаем, что $\mathfrak{N}^* \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, \mathbf{n} - N})$ (семейство всех непустых п/м дискретного интервала $\overline{1, \mathbf{n} - N}$). При этом, конечно, $\mathfrak{N}^* \subset \mathcal{P}'(\mathbb{N})$, а потому при $K \in \mathfrak{N}^*$ определено, в частности, множество $K \oplus N = \{k + N \colon k \in K\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$; однако, поскольку $K \subset \overline{1, \mathbf{n} - N}$, то $K \oplus N \subset \overline{N + 1, \mathbf{n}} \subset \overline{1, \mathbf{n}}$. Как следствие имеем, что $K \oplus N \in \mathfrak{N} \ \forall K \in \mathfrak{N}^*$. Мы полагаем поэтому, что (см. (2.18)) $\mathbf{c}^* \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}^* \times \mathbb{X}^* \times \mathfrak{N}^*]$ определяется правилом

$$\mathbf{c}^*(x, y, K) \triangleq \mathbf{c}(x, y, K \oplus N) \quad \forall x \in \mathbf{X}^* \quad \forall y \in \mathbb{X}^* \quad \forall K \in \mathfrak{N}^*. \tag{4.6}$$

Далее, с учетом (2.18) и (4.1) полагаем при $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$, что функция $c^*_j \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}^{(j)} \times \mathfrak{N}^*]$ такова, что

$$c^*_j(z, K) \triangleq c_{N+j}(z, K \oplus N) \quad \forall z \in \mathbb{M}^{(j)} \quad \forall K \in \mathfrak{N}^*. \tag{4.7}$$

Функцию f из (2.18) мы сохраняем, учитывая, что согласно (2.17) и (4.1)

$$\bar{\mathbf{M}} = \bigcup_{j=1}^{\mathbf{n}-N} \mathbf{M}^{(j)}. \tag{4.8}$$

Итак, $f \in \mathcal{R}_+[\bar{\mathbf{M}}]$, где $\bar{\mathbf{M}}$ удовлетворяет (4.8). Таким образом, мы ввели следующий набор функций стоимости:

$$\mathbf{c}^* \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}^* \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}^*], \ \mathbf{c}^*_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}^{(1)} \times \mathfrak{N}^*], \ldots, \mathbf{c}^*_{\mathbf{n}-N} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}^{(\mathbf{n}-N)} \times \mathfrak{N}^*], \ f \in \mathcal{R}_+[\bar{\mathbf{M}}]; \tag{4.9}$$

набор (4.9) соответствует [12;13] при очевидных переобразованиях. Некоторое несущественное отличие имеется в части определения f; данное отличие, однако, устраняется, если иметь в виду конструкцию [18] (см. в частности, [18, (2.9)]). В этой связи, следуя [18, (2.10)], полагаем при $x \in X^{00}$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_\beta[x]$, что

$$\mathfrak{C}^*_\beta[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] \stackrel{\triangle}{=} \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N}\left[\mathbf{c}^*(pr_2(z_{t-1}), pr_1(z_t), \beta^1(\overline{t,\mathbf{n}-N})) + c^*_{\beta(t)}(z_t, \beta^1(\overline{t,\mathbf{n}-N}))\right] + f(pr_2(z_{\mathbf{n}-N})). \tag{4.10}$$

Посредством (4.10) определяется аддитивный критерий в $\mathcal{M}_2$-задаче: при $x \in X^{00}$

$$\mathfrak{C}^*_\beta[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] \to \min, \quad (\beta, (z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[x]; \tag{4.11}$$

для задачи (4.11) определено значение (задачи) в виде экстремума

$$\widetilde{V}^*[x] \stackrel{\triangle}{=} \min_{(\beta,(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}})\in\mathbf{D}^*[x]} \mathfrak{C}^*_\beta[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] \in \mathbb{R}_+, \tag{4.12}$$

а также (непустое конечное) множество всех оптимальных решений

$$(\mathrm{sol})^*[x] \stackrel{\triangle}{=} \{(\beta,(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[x] \mid \mathfrak{C}^*_\beta[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] = \widetilde{V}^*[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{D}^*[x]). \tag{4.13}$$

В рамках $\mathcal{M}_2$-задачи мы ограничиваемся определением экстремума (4.12) как функции из $\mathcal{R}_+[X^{00}]$ и при $x \in X^{00}$ какого-либо элемента из множества (4.13). Теперь уже естественно рассматривать (4.11) как $(\mathcal{M}_2, x)$-задачу, а всю $\mathcal{M}_2$-задачу рассматривать в виде системы $(\mathcal{M}_2, x)$-задач (4.11) при переборе $x \in X^{00}$. Здесь наше построение соответствует [18, (2.12),(2.13)].

5. Динамическое программирование в $\mathcal{M}_2$-задаче

В настоящем разделе схема [12;13;18] детализируется для $\mathcal{M}_2$-задачи; так, наше построение здесь соответствует [18, разд. 4]. Мы ограничиваемся сейчас алгоритмическим вариантом ДП, имея целью получить алгоритм на функциональном уровне. Выделяем при этом основные этапы процедуры решения $(\mathcal{M}_2, x)$-задач (4.11).

Введем в рассмотрение оператор $\mathbf{I}^*$, действующий в $\mathfrak{N}^*$ по следующему правилу: при $K \in \mathfrak{N}^*$ множество $\mathbf{I}^*(K) \in \mathfrak{N}^*$ имеет вид

$$\mathbf{I}^*(K) \stackrel{\triangle}{=} K \setminus \{pr_2(z)\colon z \in \Xi^*[K]\}, \tag{5.1}$$

где $\Xi^*[K] \stackrel{\triangle}{=} \{z \in \mathbf{K}_2 \mid (pr_1(z) \in K)\,\&\,(pr_2(z) \in K)\}$; определение (5.1) соответствует [10, (2.2.27), (2.2.28)] (см. также [10, (2.2.1), предложение 2.2.3]). Отметим, что (см. [18, разд. 4]) $\mathbf{I}^*(\{t\}) = \{t\}\ \forall t \in \overline{1,\mathbf{n}-N}$. Данное свойство связано с (2.2).

Существенные списки заданий. Полагаем,что

$$\mathfrak{S}^* \stackrel{\triangle}{=} \{K \in \mathfrak{N}^* \mid \forall z \in \mathbf{K}_2\ \ (pr_1(z) \in K) \Rightarrow (pr_2(z) \in K)\}, \tag{5.2}$$

получая семейство множеств, именуемых ниже *существенными списками заданий* (множества из $\mathfrak{N}^*$ именуем *списками*). Существенные списки (см. (5.2)) ранжируем по мощности, полагая, что $\mathfrak{S}^*_s \stackrel{\triangle}{=} \{K \in \mathfrak{S}^* \mid s = |K|\}\ \forall s \in \overline{1,\mathbf{n}-N}$. Легко видеть, что $\mathfrak{S}^*_{\mathbf{n}-N} = \{\overline{1,\mathbf{n}-N}\}$ (одноэлементное семейство) и $\mathfrak{S}^*_1 = \{\{t\}\colon t \in \overline{1,\mathbf{n}-N} \setminus \widetilde{\mathbf{K}}_2\}$, где $\widetilde{\mathbf{K}}_2 \stackrel{\triangle}{=} \{pr_1(z)\colon z \in \mathbf{K}_2\}$. Заметим, что $\mathfrak{S}^*_1 \neq \varnothing$ (см. (2.12) и [10, предложение 4.9.2]). Кроме того, отметим, что (см. [12, (4.3)])

$$\mathfrak{S}^*_{s-1} = \{K \setminus \{t\}\colon K \in \mathfrak{S}^*_s,\ t \in \mathbf{I}^*(K)\} \quad \forall s \in \overline{2,\mathbf{n}-N}. \tag{5.3}$$

Получили реккурентную процедуру $\mathfrak{S}^*_{\mathbf{n}-N} \to \mathfrak{S}^*_{\mathbf{n}-N-1} \to \ldots \to \mathfrak{S}^*_1$, регулярный шаг которой соответствует (5.3).

Слои пространства позиций. *Позициями* называем здесь УП (x, K), $x \in X$, $K \in \mathcal{P}(\overline{1, \mathbf{n} - N})$. Введем слои $D^*_0, D^*_1, \ldots, D^*_{\mathbf{n}-N}$ в пространстве позиций. Проще всего определяются крайние слои D^*_0 и $D^*_{\mathbf{n}-N}$: при $\widetilde{\mathcal{M}}^* \stackrel{\triangle}{=} \bigcup\limits_{j \in \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \widetilde{\mathbf{K}}_2} \mathbf{M}^{(j)}$ полагаем, что D^*_0 определяется в виде

$$D^*_0 \stackrel{\triangle}{=} \{(x, \varnothing) \colon x \in \widetilde{\mathcal{M}}^*\}, \tag{5.4}$$

и, кроме того, полагаем (см. [12; 13; 18]), что

$$D^*_{\mathbf{n}-N} \stackrel{\triangle}{=} \{(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \colon x \in X^{00}\}. \tag{5.5}$$

Мы определили крайние слои пространства позиций. Сейчас напомним процедуру (см. [10; 12; 13; 18]) построения промежуточных слоев. Если $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N - 1}$ и $K \in \mathfrak{S}^*_s$, то последовательно определяем множества $\mathcal{J}^*_s(K)$, $\mathcal{M}^*_s[K]$ и $\mathbb{D}^*_s[K]$:

$$\mathcal{J}^*_s(K) \stackrel{\triangle}{=} \{j \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathfrak{S}^*_{s+1}\},$$

$$\mathcal{M}^*_s[K] \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{j \in \mathcal{J}^*_s(K)} \mathbf{M}^{(j)}, \quad \mathbb{D}^*_s[K] \stackrel{\triangle}{=} \{(x, K) \colon x \in \mathcal{M}^*_s[K]\}.$$

В этих терминах определяем при $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ слой $D^*_s \stackrel{\triangle}{=} \bigcup\limits_{K \in \mathfrak{S}^*_s} \mathbb{D}^*_s[K]$. Заметим, что (см. [10, предложение 4.9.3]) все слои $D^*_0, D^*_1, \ldots, D^*_{\mathbf{n}-N}$ являются непустыми множествами, элементами которых являются позиции. При этом (см. [12, (4.11)])

$$(pr_2(z), K \setminus \{j\}) \in D^*_{s-1} \quad \forall s \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \quad \forall (x, K) \in D^*_s \quad \forall j \in \mathbf{I}^*(K) \quad \forall z \in \mathbb{M}^{(j)}. \tag{5.6}$$

Слои функции Беллмана в $\boldsymbol{\mathcal{M}_2}$-задаче. Мы следуем здесь [12; 18] и конструируем функции

$$v^*_0 \in \mathcal{R}_+[D^*_0], v^*_1 \in \mathcal{R}_+[D^*_1], \ldots, v^*_{\mathbf{n}-N} \in \mathcal{R}_+[D^*_{\mathbf{n}-N}].$$

Проще всего определяется v^*_0: используя (5.4), полагаем, что $v^*_0(x, \varnothing) \stackrel{\triangle}{=} f(x)$ $\forall x \in \widetilde{\mathcal{M}}^*$. Если же $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ и функция $v^*_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D^*_{s-1}]$ уже построена, то с учетом (5.6) полагаем, что $v^*_s \in \mathcal{R}_+[D^*_s]$ определяется правилом: при $(x, K) \in D^*_s$

$$v^*_s(x, K) \stackrel{\triangle}{=} \min_{j \in \mathbf{I}^*(K)} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} [\mathbf{c}^*(x, pr_1(z), K) + c^*_j(z, K) + v^*_{s-1}(pr_2(z), K \setminus \{j\})]. \tag{5.7}$$

Итак, определено (см. (5.7)) преобразование $v^*_{s-1} \to v^*_s$. В частности (см. (5.5)), $v^*_{\mathbf{n}-N} \in \mathcal{R}_+[D^*_{\mathbf{n}-N}]$ получается преобразованием функции $v^*_{\mathbf{n}-N-1} \in \mathcal{R}_+[D^*_{\mathbf{n}-N-1}]$: при $x \in X^{00}$

$$v^*_{\mathbf{n}-N}(x, \overline{1, \mathbf{n} - N})$$

$$\stackrel{\triangle}{=} \min_{j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N})} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} \big[\mathbf{c}^*(x, pr_1(z), \overline{1, \mathbf{n} - N}) + c^*_j(z, \overline{1, \mathbf{n} - N}) + v^*_{\mathbf{n}-N-1}(pr_2(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{j\})\big] \tag{5.8}$$

(в (5.8) используется (5.6)). Итак, имеем реккурентную процедуру $v^*_0 \to v^*_1 \to \ldots \to v^*_{\mathbf{n}-N}$, которая может рассматриваться как реализация схемы ДП с использованием варианта, являющегося развитием [7]. Отметим, что (см. [18, предложение 1])

$$\widetilde{V}^*[x] = v^*_{\mathbf{n}-N}(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \quad \forall x \in X^{00}. \tag{5.9}$$

Теперь, учитывая (5.8) и (5.9), совсем кратко представим построение оптимального решения в задаче (4.11); фиксируем до конца раздела $x \in X^{00}$. Данную точку рассматриваем сейчас в качестве стартовой и, следовательно, рассматриваем $(\mathcal{M}_2, x)$-задачу.

Итак, полагаем сейчас, что $\mathbf{z}_0^* \stackrel{\triangle}{=} (x, x)$. С учетом (5.8) выбираем $\eta_1 \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n} - N})$ и $\mathbf{z}_1^* \in \mathbb{M}^{(\eta_1)}$ так, что при этом

$$v^*_{\mathbf{n}-N}(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) = \mathbf{c}^*(x, pr_1(\mathbf{z}_1^*), \overline{1, \mathbf{n} - N}) + c^*_{\eta_1}(\mathbf{z}_1^*, \overline{1, \mathbf{n} - N}) + v^*_{\mathbf{n}-N-1}(pr_2(\mathbf{z}_1^*), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}). \tag{5.10}$$

При этом согласно (5.6) получаем включение $(pr_2(\mathbf{z}_1^*), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) \in D^*_{\mathbf{n}-N-1}$ (учли включение $(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \in D^*_{\mathbf{n}-N}$, следующее из (5.5)). Тогда, в частности, $\mathbf{n} - N - 1 \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$, и согласно (5.7)

$$v^*_{\mathbf{n}-N-1}(pr_2(\mathbf{z}_1^*), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) = \min_{j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} \big[\mathbf{c}^*(pr_2(\mathbf{z}_1^*), pr_1(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + c^*_j(z, \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + v^*_{\mathbf{n}-N-2}(pr_2(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; j\})\big]. \tag{5.11}$$

С учетом (5.11) выбираем $\eta_2 \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\})$ и $\mathbf{z}_2^* \in \mathbb{M}^{(\eta_2)}$ так, что

$$v^*_{\mathbf{n}-N-1}(pr_2(\mathbf{z}_1^*), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) = \mathbf{c}^*(pr_2(\mathbf{z}_1^*), pr_1(\mathbf{z}_2^*), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + c^*_{\eta_2}(\mathbf{z}_2^*, \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + v^*_{\mathbf{n}-N-2}(pr_2(\mathbf{z}_2^*), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}); \tag{5.12}$$

при этом, конечно, реализуется включение $(pr_2(\mathbf{z}_2^*), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) = (pr_2(\mathbf{z}_2^*), (\overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) \setminus \{\eta_2\}) \in D^*_{\mathbf{n}-N-2}$. Заметим, что из (5.9), (5.10) и (5.12) вытекает равенство

$$\tilde{V}^*[x] = \mathbf{c}^*(x, pr_1(\mathbf{z}_1^*), \overline{1, \mathbf{n} - N}) + \mathbf{c}^*(pr_2(\mathbf{z}_1^*), pr_1(\mathbf{z}_2^*), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + c^*_{\eta_1}(\mathbf{z}_1^*, \overline{1, \mathbf{n} - N}) + c^*_{\eta_2}(\mathbf{z}_2^*, \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + v^*_{\mathbf{n}-N-2}(pr_2(\mathbf{z}_2^*), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \tag{5.13}$$

(легко видеть, что при $N = \mathbf{n} - 2$ (5.13) означает построение оптимального решения $(\mathcal{M}_2, x)$-задачи). В общем случае $N \in \overline{2, \mathbf{n} - 2}$ процедуры выбора, подобные (5.10) и (5.12), следует продолжать вплоть до исчерпывания индексного множества $\overline{1, \mathbf{n} - N}$, следуя [19, §7] и получая в итоге

$$((\eta_j)_{j \in \overline{1, \mathbf{n}-N}}, (\mathbf{z}_j^*)_{j \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in (\mathrm{sol})^*[x]. \tag{5.14}$$

Итак, при произвольном выборе $x \in X^{00}$, действуя в соответствии с [12; 13; 18; 19], определяем оптимальное решение $(\mathcal{M}_2, x)$-задачи. Однако в рамках нашей процедуры решения $\mathcal{M}$-задачи мы будем использовать только один вариант процедуры (5.10)–(5.14), отвечающей точке $x \in X^{00}$, которая будет найдена из решения (предваряющей) $\mathcal{M}_1$-задачи.

6. Постановка $\mathcal{M}_1$-задачи и процедуры склеивания

Мы полагаем сейчас, что посредством построения слоев функции Беллмана уже найдена функция

$$\widetilde{V}^*[\cdot] \stackrel{\triangle}{=} (\widetilde{V}^*[x])_{x \in X^{00}} = (v^*_{\mathbf{n}-N}(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}))_{x \in X^{00}} \in \mathcal{R}_+[X^{00}] \tag{6.1}$$

(см. (5.9)), которую будем использовать фактически как терминальную компоненту аддитивного критерия $\mathcal{M}_1$-задачи, доопределяя ее в целях согласования с постановкой [12;13;18] нулем до функции из $\mathcal{R}_+[\bigcup_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i]$: полагаем, что $\mathbf{f} \in \mathcal{R}_+[\bigcup_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i]$ такова, что

$$\big(\mathbf{f}(x) \stackrel{\triangle}{=} v^*_{\mathbf{n}-N}(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \ \ \forall x \in X^{00}\big) \ \& \ \Big(\mathbf{f}(x) \stackrel{\triangle}{=} 0 \ \ \forall x \in \Big(\bigcup_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i\Big) \setminus X^{00}\Big). \tag{6.2}$$

Из (6.1), (6.2) вытекает, что справедливо свойство

$$\mathbf{f}(x) = \widetilde{V}^*[x] \quad \forall x \in X^{00}. \tag{6.3}$$

Мы дополним $\mathbf{f}$, (6.1), (6.3) функциями стоимости, оценивающими внешние перемещения и внутренние работы. Всюду в дальнейшем $\mathfrak{N}^\natural \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1,N})$ (семейство всех непустых п/м $\overline{1,N}$). Через $\widetilde{\mathbb{X}}^\natural$ обозначим объединение всех множеств $\mathfrak{M}_i$, $i \in \overline{1,N}$. С учетом этого полагаем, что $\mathbf{c}^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}^\natural \times \widetilde{\mathbb{X}}^\natural \times \mathfrak{N}^\natural]$ определяется по правилу: при $z \in \mathbf{X}^\natural \times \widetilde{\mathbb{X}}^\natural$ и $K \in \mathfrak{N}^\natural$

$$\mathbf{c}^\natural(pr_1(z), pr_2(z), K) = \mathbf{c}^\natural(z, K) \triangleq \mathbf{c}(z, K \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}). \tag{6.4}$$

Далее, при $j \in \overline{1,N}$ определяем функцию $c_j^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_j \times \mathfrak{N}^\natural]$ посредством правила

$$c_j^\natural(z, K) \triangleq c_j(z, K \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \quad \forall z \in \mathbb{M}_j \quad \forall K \in \mathfrak{N}^\natural. \tag{6.5}$$

Итак, в виде $(\mathbf{c}^\natural, c_1^\natural, \ldots, c_N^\natural, \mathbf{f})$ мы имеем кортеж целевых функций $\mathcal{M}_1$-задачи. С учетом (3.2), (6.4) и (6.5) получаем, что при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha^\natural[x]$ определено значение

$$\mathfrak{C}_\alpha^\natural[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] \triangleq \sum_{t=1}^{N} \big[\mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t,N})) + c_{\alpha(t)}^\natural(z_t, \alpha^1(\overline{t,N}))\big] + \mathbf{f}(\mathrm{pr}_2(z_N)); \tag{6.6}$$

из (6.4), (6.5) и (6.6) вытекает, что справедливо равенство

$$\mathfrak{C}_\alpha^\natural[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] = \sum_{t=1}^{N} \big[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t,N}) \cup \overline{N+1,\mathbf{n}}) + c_{\alpha(t)}(z_t, \alpha^1(\overline{t,N}) \cup \overline{N+1,\mathbf{n}})\big]$$
$$+ \mathbf{f}(\mathrm{pr}_2(z_N)). \tag{6.7}$$

Теперь при $x \in X^0$ рассматриваем $(\mathcal{M}_1, x)$-задачу

$$\mathfrak{C}_\alpha^\natural[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] \longrightarrow \min, \quad (\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}^\natural[x], \tag{6.8}$$

для которой определяются значение в виде экстремума

$$V^\natural[x] \triangleq \min_{(\alpha,(z_t)_{t\in\overline{0,N}})\in\mathbf{D}^\natural[x]} \mathfrak{C}_\alpha^\natural[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] \in \mathbb{R}_+ \tag{6.9}$$

и также (непустое конечное) множество всех оптимальных решений:

$$(\mathrm{sol})^\natural[x] \triangleq \{(\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}^\natural[x] \mid \mathfrak{C}_\alpha^\natural[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] = V^\natural[x]\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{D}^\natural[x]). \tag{6.10}$$

Введем в рассмотрение “полную” $\mathcal{M}_1$-задачу, используя (3.5):

$$\mathfrak{C}_\alpha^\natural[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] \longrightarrow \min, \quad (\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,N}}, x) \in \mathbb{D}^\natural.$$

Ее значением является экстремум критерия (6.7)

$$\mathbb{V}^\natural \triangleq \min_{(\alpha,(z_t)_{t\in\overline{0,N}},x)\in\mathbb{D}^\natural} \mathfrak{C}_\alpha^\natural[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] = \min_{x\in X^0} \min_{(\alpha,(z_t)_{t\in\overline{0,N}})\in\mathbf{D}^\natural[x]} \mathfrak{C}_\alpha^\natural[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}]$$
$$= \min_{x\in X^0} V^\natural[x] \in \mathbb{R}_+; \tag{6.11}$$

определено также (непустое конечное) множество оптимальных маршрутных процессов в $\mathcal{M}_1$-задаче, т. е. множество всех оптимальных ДР в $\mathcal{M}_1$-задаче с нефиксированной точкой старта:

$$\mathbf{SOL}^\natural \triangleq \{(\alpha, (z_t)_{t\in\overline{0,N}}, x) \in \mathbb{D}^\natural \mid \mathfrak{C}_\alpha^\natural[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] = \mathbb{V}^\natural\} \in \mathrm{Fin}(\mathbb{D}^\natural). \tag{6.12}$$

Наконец, выделяем задачу минимизации точки старта в $\mathcal{M}_1$-задаче

$$V^{\natural}[x] \longrightarrow \min, \quad x \in X^0. \tag{6.13}$$

Из (6.11), (6.13) имеем, что $\mathbb{V}^{\natural}$ — значение задачи (6.13), т. е. экстремум значений (6.9). В виде

$$X^{\natural}_{\mathrm{opt}} \stackrel{\triangle}{=} \{x^0 \in X^0 \mid V^{\natural}[x^0] = \mathbb{V}^{\natural}\} \in \mathrm{Fin}(X^0) \tag{6.14}$$

получаем множество всех оптимальных точек старта. Рассмотрим сейчас некоторые простые следствия положений разд. 3. Так, в силу (3.6) и (6.3) получаем при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^{\natural}_{\alpha}[x]$ $\mathbf{f}(pr_2(z_N)) = \widetilde{V}^*[pr_2(z_N)]$. С учетом (6.7) имеем, очевидно, следующее свойство:

$$\mathfrak{C}^{\natural}_{\alpha}[(z_t)_{t\in\overline{0,N}}] = \sum_{t=1}^{N}\bigl[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t,N}) \cup \overline{N+1,\mathbf{n}}) + c_{\alpha(t)}(z_t, \alpha^1(\overline{t,N}) \cup \overline{N+1,\mathbf{n}})\bigr]$$

$$+\widetilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(z_N)] \quad \forall x \in X^0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}_1 \quad \forall (z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^{\natural}_{\alpha}[x]. \tag{6.15}$$

Предложение 3. *Если* $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ *и* $t \in \overline{1,N}$, *то*

$$(\alpha\Diamond\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}) = \alpha^1(\overline{t,N}) \cup \overline{N+1,\mathbf{n}}. \tag{6.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем α, β и t в соответствии с условиями, получая при этом склеенный маршрут $\alpha \diamond \beta \in \mathbf{P}$:

$$\bigl((\alpha \diamond \beta)(k) = \alpha(k) \ \ \forall k \in \overline{1,N}\bigr) \,\&\, \bigl((\alpha \diamond \beta)(k) = \beta(k-N) + N \ \ \forall k \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\bigr). \tag{6.17}$$

Отметим, что по свойствам операции взятия образа

$$(\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}) = (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t,N} \cup \overline{N+1,\mathbf{n}}) = (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t,N}) \cup (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{N+1,\mathbf{n}}). \tag{6.18}$$

С учетом (6.17) и (6.18) получаем, однако, цепочку равенств

$$(\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}) = \alpha^1(\overline{t,N}) \cup \{\beta(l-N) + N \colon l \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\}$$

$$= \alpha^1(\overline{t,N}) \cup \{\beta(s) + N \colon s \in \overline{1,\mathbf{n}-N}\} = \alpha^1(\overline{t,N}) \cup \{k + N \colon k \in \beta^1(\overline{1,\mathbf{n}-N})\}$$

$$= \alpha^1(\overline{t,N}) \cup (\beta^1(\overline{1,\mathbf{n}-N}) \oplus N) = \alpha^1(\overline{t,N}) \cup (\overline{1,\mathbf{n}-N}) \oplus N), \tag{6.19}$$

где учитывается сюръективность $\beta\colon \beta^1(\overline{1,\mathbf{n}-N}) = \overline{1,\mathbf{n}-N}$. Кроме того, $\overline{1,\mathbf{n}-N} \oplus N = \{k+N \colon k \in \overline{1,\mathbf{n}-N}\} = \overline{N+1,\mathbf{n}}$. С учетом (6.19) получаем теперь требуемое равенство (6.16).

Предложение доказано.

Рассмотрим теперь некоторые вопросы, связанные со склеиванием траекторий. Для этого заметим сначала, что при $(z'_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}^{\natural}$ и $\tau \in \overline{0,N}$ имеем $z'_\tau \in X \times X$. Аналогичным образом при $(z''_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^*$ и $\tau \in \overline{0,\mathbf{n}-N}$ реализуется $z''_\tau \in X \times X$. С учетом этого полагаем при $\mathbf{z}' \in \mathfrak{Z}^{\natural}$ и $\mathbf{z}'' \in \mathfrak{Z}^*$, что

$$\mathbf{z}' \,\square\, \mathbf{z}'' \in \mathfrak{Z} \tag{6.20}$$

определяется посредством правила

$$\bigl((\mathbf{z}' \,\square\, \mathbf{z}'')(\tau) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{z}'(\tau) \ \ \forall \tau \in \overline{0,N}\bigr) \,\&\, \bigl((\mathbf{z}' \,\square\, \mathbf{z}'')(\tau) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{z}''(\tau - N) \ \ \forall \tau \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\bigr). \tag{6.21}$$

В частности, (6.20), (6.21) реализуются при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$, $\mathbf{z}' \in \mathcal{Z}^{\natural}_{\alpha}[x]$ и $\mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}^*_{\beta}[pr_2(\mathbf{z}'(N))]$.

Предложение 4. *Если* $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$, $\mathbf{z}' \in \mathcal{Z}^{\natural}_{\alpha}[x]$ *и* $\mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}^*_{\beta}[pr_2(\mathbf{z}'(N))]$, *то*

$$\mathbf{z}' \,\square\, \mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}_{\alpha\lozenge\beta}[x]. \tag{6.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем x, α, β, $\mathbf{z}'$ и $\mathbf{z}''$ в соответствии с условиями; полагаем для большей наглядности

$$\big(z'_t \triangleq \mathbf{z}'(t) \ \ \forall t \in \overline{0,N}\big) \,\&\, \big(z''_t \triangleq \mathbf{z}''(t) \ \ \forall t \in \overline{0,\mathbf{n}-N}\big). \tag{6.23}$$

Тогда $(z'_0 = (x,x)) \,\&\, (z'_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \ \ \forall t \in \overline{1,N})$. В частности, согласно (3.6) $pr_2(z'_N) \in X^{00}$. Кроме того, по выбору $\mathbf{z}''$ имеем, что $z''_0 = (pr_2(z'_N), pr_2(z'_N)) \in X^{00}\times X^{00}$ (действительно, $(z''_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_{\beta}[pr_2(\mathbf{z}'_N)]$). Напомним, что $\mathbf{z}' \in \mathfrak{Z}^{\natural}$ и $\mathbf{z}'' \in \mathfrak{Z}^*$; согласно (6.23) для кортежа (6.20) имеем

$$\big((\mathbf{z}' \,\square\, \mathbf{z}'')(\tau) = z'_\tau \ \ \forall \tau \in \overline{0,N}\big) \,\&\, \big((\mathbf{z}' \,\square\, \mathbf{z}'')(\tau) = z''_{\tau-N} \ \ \forall \tau \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\big). \tag{6.24}$$

При этом по выбору $\mathbf{z}'$ имеем, что (см. (6.23))

$$z'_0 = \mathbf{z}'(0) = (x,x) \in X^0 \times X^0. \tag{6.25}$$

Далее, из (3.1) и (6.24) получаем теперь свойство

$$(\mathbf{z}' \,\square\, \mathbf{z}'')(t) \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \quad \forall t \in \overline{1,N}. \tag{6.26}$$

Наконец, из (4.2) и (6.24) вытекает, что справедливо

$$(\mathbf{z}' \,\square\, \mathbf{z}'')(t) \in \mathbb{M}_{N+\beta(t-N)} \quad \forall t \in \overline{N+1,\mathbf{n}}. \tag{6.27}$$

С учетом (2.16), (6.26) и (6.27) имеем

$$\big((\mathbf{z}' \,\square\, \mathbf{z}'')(t) \in \mathbb{M}_{(\alpha\diamond\beta)(t)} \ \ \forall t \in \overline{1,N}\big) \,\&\, \big((\mathbf{z}'\square\mathbf{z}'')(t) \in \mathbb{M}_{(\alpha\diamond\beta)(t)} \ \ \forall t \in \overline{N+1,\mathbf{n}}\big).$$

Иными словами, мы получаем свойство

$$(\mathbf{z}' \,\square\, \mathbf{z}'')(t) \in \mathbb{M}_{(\alpha\diamond\beta)(t)} \quad \forall t \in \overline{1,\mathbf{n}}. \tag{6.28}$$

Поскольку $\mathbf{z}' \,\square\, \mathbf{z}'' \in \mathfrak{Z}$, имеем из (2.8), (2.12), (6.21), (6.24), (6.25) и (6.28), что справедливо (6.22).

Предложение доказано.

Напомним свойство (3.6). В этой связи отметим простое предложение.

Предложение 5. *Если* $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ *и* $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha\lozenge\beta}[x]$, *то* $pr_2(z_N) \in X^{00}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из непосредственной комбинации (3.6) и предложения 1. $\square$

Заметим теперь, что в силу (4.2) и предложения 5 при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha\lozenge\beta}[x]$ определено множество $\mathcal{Z}^*_{\beta}[pr_2(z_N)] \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{Z}^*)$.

Предложение 6. *Пусть* $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ *и* $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha\lozenge\beta}[x]$. *Кроме того, пусть* $(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^*$ *обладает представлением:*

$$\big(z^*_0 \triangleq (pr_2(z_N), pr_2(z_N))\big) \,\&\, \big(z^*_t \triangleq z_{t+N} \ \ \forall t \in \overline{1,\mathbf{n}-N}\big). \tag{6.29}$$

Тогда $(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_{\beta}[pr_2(z_N)]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем x, α, β и $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}$ в соответствии с условиями и рассматриваем кортеж $(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}$, определяемый посредством (6.29). В силу (2.8) получаем, что $\alpha\diamond\beta\in\mathbf{P}$ определяется посредством (2.6). Далее, из (2.11) вытекает, что $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}\in\mathfrak{Z}$, а потому $z_t\in X\times X\ \ \forall t\in\overline{0,\mathbf{n}}$. Тогда по выбору N и в силу (6.29) $z^*_0\in X\times X$ и $z^*_t\in X\times X$ при $t\in\overline{1,\mathbf{n}-N}$. Напомним здесь же, что $(z_t)_{t\in\overline{0,N}}\in\mathcal{Z}^\natural_\alpha[x]$ в силу предложения 1, а потому согласно (3.6) $pr_2(z_N)\in X^{00}$, а тогда (см. (6.29)) $z^*_0\in X^{00}\times X^{00}$. Далее, из (2.11) имеем по выбору $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}$, что $z_0=(x,x)$ и при этом

$$z_t\in\mathbb{M}_{(\alpha\diamond\beta)(t)}\quad\forall t\in\overline{1,\mathbf{n}}.\tag{6.30}$$

Тогда при $\tau\in\overline{1,\mathbf{n}-N}$ имеем $N+\tau\in\overline{N+1,\mathbf{n}}$ и согласно (6.30)

$$z^*_\tau=z_{\tau+N}\in\mathbb{M}_{(\alpha\diamond\beta)(\tau+N)},$$

а потому $z^*_\tau\in\mathbb{M}_{\beta(\tau)+N}$ согласно (2.6); это означает, что (см. (4.1)) $z^*_\tau\in\mathbb{M}^{(\beta(\tau))}$. Итак (см. (6.29)),

$$\big(z^*_0=(pr_2(z_N),pr_2(z_N))\big)\;\&\;\big(z^*_t\in\mathbb{M}^{(\beta(t))}\ \ \forall t\in\overline{1,\mathbf{n}-N}\big).\tag{6.31}$$

С учетом (4.2) и (6.31) имеем требуемое свойство $(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}\in\mathcal{Z}^*_\beta[pr_2(z_N)]$.

Предложение доказано.

7. Решение $\mathcal{M}_1$-задачи: схема динамического программирования

Вернемся к (6.8). Напомним, что в данной задаче мы работаем с функциями $\mathbf{c}^\natural,c^\natural_1,\ldots,c^\natural_N,\mathbf{f}$. Применяемая ниже схема решения на основе ДП соответствует [12; 18; 19]. Сейчас мы совсем кратко напомним данную схему.

Существенные списки заданий. Мы используем семейство $\mathfrak{N}^\natural$ всех непустых п/м $\overline{1,N}$ и определяем оператор $\mathbb{I}^\natural$, действующий в $\mathfrak{N}^\natural$ по следующему правилу: при $K\in\mathfrak{N}^\natural$

$$\mathbf{I}^\natural(K)\stackrel{\triangle}{=}K\setminus\{\,\mathrm{pr}_2(z)\colon z\in\Xi^\natural[K]\},$$

где $\Xi^\natural[K]\stackrel{\triangle}{=}\{z\in\mathbf{K}_1\mid(\mathrm{pr}_1(z)\in K)\,\&\,(\mathrm{pr}_2(z)\in K)\}$. При этом $\mathbf{I}^\natural(\{t\})=\{t\}\ \ \forall t\in\overline{1,N}$. В виде

$$\mathfrak{S}^\natural\stackrel{\triangle}{=}\{K\in\mathfrak{N}^\natural\mid\forall z\in\mathbf{K}_1\ \ (\mathrm{pr}_1(z)\in K)\Longrightarrow(\mathrm{pr}_2(z)\in K)\}$$

имеем семейство всех существенных списков (заданий) в $\mathcal{M}_1$-задаче. Это естественная аналогия с построениями для $\mathcal{M}_2$-задачи в разд. 5. При этом

$$\mathfrak{S}^\natural_s\stackrel{\triangle}{=}\{K\in\mathfrak{S}^\natural\mid s=|K|\}\quad\forall s\in\overline{1,N}$$

(ранжирование по мощности). Легко видеть (см. (2.27)), что при $\tilde{\mathbf{K}}_1=\{\mathrm{pr}_1(z)\colon z\in\mathbf{K}_1\}$ реализуется равенство $\mathfrak{S}^\natural_1=\{\,\{t\}\colon t\in\overline{1,N}\setminus\tilde{\mathbf{K}}_1\}$ и $\mathfrak{S}^\natural_N=\{\overline{1,N}\}$ (одноэлементное семейство, синглетон). Кроме того (см. [19, (6.2)]),

$$\mathfrak{S}^\natural_{s-1}=\{K\setminus\{j\}\colon K\in\mathfrak{S}^\natural_s,\ \ j\in\mathbf{I}^\natural(K)\}\quad\forall s\in\overline{2,N}.\tag{7.1}$$

Итак (см. (7.1)), реализуется рекуррентная процедура $\mathfrak{S}^\natural_N\longrightarrow\mathfrak{S}^\natural_{N-1}\longrightarrow\ldots\longrightarrow\mathfrak{S}^\natural_1$.

Слои пространства позиций. Конструируем множества $D^\natural_0,D^\natural_1,\ldots,D^\natural_N$, элементами которых являются УП (x,K), где $x\in X$ и $K\in\mathcal{P}(\overline{1,N})$. Сначала введем множества $D^\natural_0$ и $D^\natural_N$, полагая (см. (2.28))

$$\big(D^\natural_0\stackrel{\triangle}{=}\{(x,\varnothing)\colon x\in X^{00}\}\big)\,\&\,\big(D^\natural_N\stackrel{\triangle}{=}\{(x,\overline{1,N})\colon x\in X^0\}\big),\tag{7.2}$$

получая крайние слои. Если $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathfrak{S}_s^\natural$, то вводим последовательно

$$\mathcal{J}_s^\natural(K) \triangleq \{j \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathfrak{S}_{s+1}^\natural\}, \quad \mathcal{M}_s^\natural(K) \triangleq \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s^\natural(K)} \mathbf{M}_j,$$
$$\mathbb{D}_s^\natural[K] \triangleq \{(x, K)\colon x \in \mathcal{M}_s^\natural(K)\}. \tag{7.3}$$

В терминах множеств (7.3) определяется при $s \in \overline{1, N-1}$ слой $D_s^\natural$ пространства позиций:

$$D_s^\natural \triangleq \bigcup_{K \in \mathfrak{S}_s^\natural} \mathbb{D}_s^\natural[K]. \tag{7.4}$$

Итак, промежуточные слои определяются посредством (7.3), (7.4). В итоге мы располагаем множествами-слоями $D_0^\natural, D_1^\natural, \ldots, D_N^\natural$. Все эти слои — непустые множества; справедливо (см. [10, предложение 4.9.4]) свойство: если $s \in \overline{1, N}$, $(x, K) \in D_s^\natural$, $j \in \mathbf{I}^\natural(K)$ и $z \in \mathbb{M}_j$, то

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}^\natural. \tag{7.5}$$

Слои функции Беллмана. Располагая множествами-слоями, определяем функции $v_0^\natural \in \mathcal{R}_+[D_0^\natural]$, $v_1^\natural \in \mathcal{R}_+[D_1^\natural], \ldots, v_N^\natural \in \mathcal{R}_+[D_N^\natural]$, являющиеся сужениями единой функции Беллмана в $\mathcal{M}_1$-задаче. Так, учитывая (7.2), полагаем, что $v_0^\natural(x, \varnothing) \triangleq \mathbf{f}(x)\ \forall x \in X^{00}$. С учетом (6.3) имеем, что

$$v_0^\natural(x, \varnothing) = \widetilde{V}^*[x] = v_{\mathbf{n}-N}^*(x, \overline{1, \mathbf{n}-N}) \quad \forall x \in X^{00}. \tag{7.6}$$

Дальнейшее построение осуществляется по рекуррентной схеме: если $s \in \overline{1, N}$ и функция $v_{s-1}^\natural \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}^\natural]$ уже построена, то (см. (7.5)) $v_s^\natural \in \mathcal{R}_+[D_s^\natural]$ определяется правилом

$$v_s^\natural(x, K) \triangleq \min_{j \in \mathbf{I}^\natural(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \bigl[\mathbf{c}^\natural(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j^\natural(z, K) + v_{s-1}^\natural(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\bigr] \quad \forall (x, K) \in D_s. \tag{7.7}$$

Итак, реализуется рекуррентная процедура

$$v_0^\natural \longrightarrow v_1^\natural \longrightarrow \ldots \longrightarrow v_N^\natural, \tag{7.8}$$

финалом которой является функция значения (экстремума) вариантов $\mathcal{M}_1$-задачи с фиксацией точки старта

$$v_N^\natural(x, \overline{1, N}) = V^\natural[x] \quad \forall x \in X^0. \tag{7.9}$$

Свойство (7.9) позволяет свести (6.13) к виду $v_N^\natural(x, \overline{1, N}) \longrightarrow \min,\ x \in X^0$. Мы определяем $\mathbb{V}^\natural$ (6.11), получая

$$\mathbb{V}^\natural = \min_{x \in X^0} v_N^\natural(x, \overline{1, N}) \in \mathbb{R}_+. \tag{7.10}$$

Кроме того, в силу (6.14) и (7.9) имеем равенство $X_{\mathrm{opt}}^\natural = \{x \in X^0 \mid v_N^\natural(x, \overline{1, N}) = \mathbb{V}^\natural\}$. С учетом этого и (7.10) определяем $\mathbb{V}^\natural$ и некоторую точку $x^0 \in X_{\mathrm{opt}}^\natural$; ясно, что

$$v_N^\natural(x^0, \overline{1, N}) = V^\natural[x^0] = \mathbb{V}^\natural. \tag{7.11}$$

8. Оптимальные решения $\mathcal{M}_1$-задачи

Сейчас, располагая функциями-слоями (7.8), мы для $\mathcal{M}_1$-задачи с терминальной компонентой $\mathbf{f}$ (см. (6.2)) аддитивного критерия напомним процедуру построения оптимальных решений, используя аналогичные процедуры из [12; 13; 18; 19]. Итак, предполагаем, что на предыдущем этапе процедуры найдены экстремум $\mathbb{V}^\natural \in \mathbb{R}_+$ (см. (7.10)) и оптимальная точка старта $x^0 \in X^\natural_{\rm opt}$ (см. (7.11)). Рассмотрим построение оптимальной УП маршрут-трасса со стартом в x^0.

Полагаем, что $y_0 \stackrel{\triangle}{=} (x^0, x^0)$, получая $y_0 \in X^0 \times X^0$. По выбору x^0 имеем (см. (7.2))

$$(pr_2(y_0), \overline{1,N}) = (x^0, \overline{1,N}) \in D^\natural_N. \tag{8.1}$$

Тогда согласно (7.5) и (8.1) при $j \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1,N})$ и $z \in \mathbb{M}_j$

$$(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\}) \in D^\natural_{N-1}. \tag{8.2}$$

Кроме того, из (7.7), (7.11) и (8.1) получаем

$$\mathbb{V}^\natural = V^\natural[x^0] = \min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z\in\mathbb{M}_j} \bigl[\mathbf{c}^\natural(x^0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c^\natural_j(z, \overline{1,N}) + v^\natural_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})\bigr]. \tag{8.3}$$

С учетом (8.3) выбираем $\xi_1 \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1,N})$ и $y_1 \in \mathbb{M}_{\xi_1}$, для которых

$$\mathbb{V}^\natural = \mathbf{c}^\natural(x^0, \mathrm{pr}_1(y_1), \overline{1,N}) + c^\natural_{\xi_1}(y_1, \overline{1,N}) + v^\natural_{N-1}(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}), \tag{8.4}$$

где ввиду (8.2) $(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}) \in D^\natural_{N-1}$. Согласно (7.7) получаем поэтому равенство

$$v^\natural_{N-1}(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}) = \min_{j\in\mathbf{I}^\natural(\overline{1,N}\setminus\{\xi_1\})} \min_{z\in\mathbb{M}_j} \bigl[\mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(y_1), \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}) + c^\natural_j(z, \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})$$
$$+ v^\natural_{N-2}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1; j\})\bigr]. \tag{8.5}$$

Вследствие (8.5) выбираем $\xi_2 \in \mathbf{I}^\natural(\overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})$ и $y_2 \in \mathbb{M}_{\xi_2}$, для которых

$$v^\natural_{N-1}(\mathrm{pr}_2(y_1), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}) = \mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(y_1), \mathrm{pr}_1(y_2), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}) + c^\natural_{\xi_2}(y_2, \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})$$
$$+ v^\natural_{N-2}(\mathrm{pr}_2(y_2), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\}), \tag{8.6}$$

где исходя из (7.5), реализуется включение

$$(\mathrm{pr}_2(y_2), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\}) \in D^\natural_{N-2}. \tag{8.7}$$

Заметим, что в силу (8.4) и (8.6) справедливо равенство

$$\mathbb{V}^\natural = \mathbf{c}^\natural(x^0, \mathrm{pr}_1(y_1), \overline{1,N}) + \mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(y_1), \mathrm{pr}_1(y_2), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\}) + c^\natural_{\xi_1}(y_1, \overline{1,N}) + c^\natural_{\xi_2}(y_2, \overline{1,N} \setminus \{\xi_1\})$$
$$+ v^\natural_{N-2}(\mathrm{pr}_2(y_2), \overline{1,N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\})$$
$$= \sum_{t=1}^{2} \bigl[\mathbf{c}^\natural(\mathrm{pr}_2(y_{t-1}), \mathrm{pr}_1(y_t), \overline{1,N} \setminus \{\xi_k \colon k \in \overline{1,t-1}\}) + c^\natural_{\xi_t}(y_t, \overline{1,N} \setminus \{\xi_k \colon k \in \overline{1,t-1}\})\bigr]$$
$$+ v^\natural_{N-2}(\mathrm{pr}_2(y_2), \overline{1,N} \setminus \{\xi_k \colon k \in \overline{1,2}\}).$$

При $N = 2$ из (6.3), (6.7), (6.9), (6.10), (7.11) и (8.7) вытекает, что оптимальное решение $(\mathcal{M}_1, x^0)$-задачи уже построено. В общем случае $N \in \overline{2, \mathbf{n}-2}$ процедуры выбора, подобные (8.4), (8.6) следует продолжать вплоть до исчерпывания индексного множества $\overline{1,N}$. Тогда будут построены кортежи $\xi \triangleq (\xi_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathcal{A}_1$, $(y_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_\xi[x^0]$, для которых $(\xi, (y_i)_{i\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}^\natural[x^0]$ и

$$\mathfrak{C}^\natural_\xi[(y_i)_{i\in\overline{0,N}}] = \mathbb{V}^\natural = V^\natural[x^0]. \tag{8.8}$$

При этом ввиду (3.4) и (8.8) имеем по выбору x^0:

$$(\xi, (y_i)_{i\in\overline{0,N}}, x^0) \in \mathbb{D}^\natural. \tag{8.9}$$

Из (6.12), (8.8) и (8.9) вытекает требуемое свойство оптимальности

$$(\xi, (y_i)_{i\in\overline{0,N}}, x^0) \in \mathbf{SOL}^\natural. \tag{8.10}$$

В связи с (8.10) отметим также (см. (6.10), (8.8)), что

$$(\xi, (y_i)_{i\in\overline{0,N}}) \in (\mathrm{sol})^\natural[x^0]. \tag{8.11}$$

Согласно (8.11) наше построение на основе ДП приводит к оптимальной паре маршрут-траектория для (оптимальной) точки старта x^0.

9. Глобальный экстремум и его представление в виде экстремума $\mathcal{M}_1$-задачи

В настоящем разделе мы обращаемся к совместному рассмотрению $\mathcal{M}_1$- и $\mathcal{M}_2$-задач, которые до сих пор рассматривались в значительной степени изолированно. Важным связующим звеном здесь является представление (6.2), в котором существенно используется множество (2.28). Мы и далее следуем (2.28), (6.2).

Теорема 1. *Справедливо равенство* $\mathbb{V} = \mathbb{V}^\natural$.

Доказательство. С учетом (2.24) (используется непустота множества $\mathbf{SOL}$) выберем и зафиксируем триплет $(\hat\gamma, (\hat z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}, \hat x) \in \mathbf{SOL}$. Тогда $(\hat\gamma, (\hat z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}, \hat x) \in \mathbf{D}$ реализует равенство

$$\mathfrak{C}_{\hat\gamma}[(\hat z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathbb{V}. \tag{9.1}$$

В силу (2.13) получаем, что $\hat x \in X^0$, $\hat\gamma \in \mathbf{P}$ и

$$(\hat z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\hat\gamma}[\hat x]. \tag{9.2}$$

Согласно (2.8) для некоторых

$$(\hat\alpha \in \mathcal{A}_1)\,\&\,(\hat\beta \in \mathcal{A}_2) \tag{9.3}$$

справедливо равенство

$$\hat\gamma = \hat\alpha \Diamond \hat\beta. \tag{9.4}$$

При этом ввиду (9.2) и (9.4) имеем включение

$$(\hat z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\hat\alpha\Diamond\hat\beta}[\hat x]. \tag{9.5}$$

Отметим, что, в частности, $\hat\gamma \in \mathbb{P}$, а потому $\hat\gamma(t) \in \overline{1,\mathbf{n}}$ при $t \in \overline{1,\mathbf{n}}$. С учетом (2.6) и (9.4) получаем для $\hat\alpha \in \mathbb{P}_1$ и $\hat\beta \in \mathbb{P}_2$ следующее представление $\hat\gamma$:

$$(\hat\gamma(k) = \hat\alpha(k)\ \ \forall k \in \overline{1,N})\,\&\,(\hat\gamma(l) = \hat\beta(l-N) + N\ \ \forall l \in \overline{N+1,\mathbf{n}}). \tag{9.6}$$

В отношении (9.2) заметим, что согласно (2.11) $(\hat{z}_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}$, что означает свойство $\hat{z}_\tau \in X \times X \ \ \forall \tau \in \overline{0,\mathbf{n}}$; при этом

$$(\hat{z}_0 = (\hat{x},\hat{x}))\,\&\,(\hat{z}_t \in \mathbb{M}_{\hat{\gamma}(t)} \ \ \forall t \in \overline{1,\mathbf{n}}). \tag{9.7}$$

С учетом предложения 1 (см. (9.3), (9.5)) справедливо

$$(\hat{z}_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_{\hat{\alpha}}[\hat{x}]. \tag{9.8}$$

Тогда согласно (3.1), (9.3) имеем $(\hat{z}_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}^\natural$, причем (см. (9.7))

$$(\hat{z}_0 = (\hat{x},\hat{x}))\,\&\,(\hat{z}_t \in \mathbb{M}_{\hat{\alpha}(t)} \ \ \forall t \in \overline{1,N}).$$

В частности, $\hat{z}_N \in \mathbb{M}_{\hat{\alpha}(N)}$. Исходя из (3.6), (9.3) и (9.8), получаем

$$\mathrm{pr}_2(\hat{z}_N) \in X^{00}. \tag{9.9}$$

Из (6.15), (9.3) и (9.8) имеем равенство (см. предложение 3)

$$\mathfrak{C}^\natural_{\hat{\alpha}}[(\hat{z}_t)_{t\in\overline{0,N}}] = \sum_{t=1}^{N}\big[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat{z}_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\hat{z}_t),\hat{\alpha}^1(\overline{t,N})\cup\overline{N+1,\mathbf{n}}) + c_{\hat{\alpha}(t)}(\hat{z}_t,\hat{\alpha}^1(\overline{t,N})\cup\overline{N+1,\mathbf{n}})\big]$$

$$+\tilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(\hat{z}_N)] = \sum_{t=1}^{N}\big[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat{z}_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\hat{z}_t),(\hat{\alpha}\diamond\hat{\beta})^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{\hat{\alpha}(t)}(\hat{z}_t,(\hat{\alpha}\diamond\hat{\beta})^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big]$$

$$+\tilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(\hat{z}_N)]; \tag{9.10}$$

мы учли в (9.10) предложение 3. Отметим, что $\hat{x} \in X^0$, $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}_1$ и $(\hat{z}_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_{\hat{\alpha}}[\hat{x}]$ (см. (9.3), (9.8)). Тогда согласно (3.4)

$$(\hat{\alpha},(\hat{z}_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}^\natural[\hat{x}]. \tag{9.11}$$

Поэтому (см. (6.9), (9.11)) получаем очевидное неравенство для $V^\natural[\hat{x}] \in \mathbb{R}_+$:

$$V^\natural[\hat{x}] \leqslant \mathfrak{C}^\natural_{\hat{\alpha}}[(\hat{z}_t)_{t\in\overline{0,N}}]. \tag{9.12}$$

Из (9.4), (9.6), (9.10) и (9.12) вытекает, как следствие, что

$$V^\natural[\hat{x}] \leq \sum_{t=1}^{N}\big[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat{z}_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\hat{z}_t),\hat{\gamma}^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{\hat{\gamma}(t)}(\hat{z}_t,\hat{\gamma}^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big] + \widetilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(\hat{z}_N)]. \tag{9.13}$$

Вернемся теперь к (4.12). Тогда имеем равенство

$$\widetilde{V}^*[\mathrm{pr}_2(\hat{z}_N)] = \min_{(\beta,(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}})\in\mathbf{D}^*[pr_2(\hat{z}_N)]} \mathfrak{C}^*_\beta[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}].$$

Напомним (см. (9.3)–(9.5)), что $\hat{x} \in X^0$, $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}_1$, $\hat{\beta} \in \mathcal{A}_2$ и $(\hat{z}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\hat{\gamma}}[\hat{x}]$. Тогда, следуя предложению 6, введем в рассмотрение кортеж $(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^*$, для которого

$$(z^*_0 \triangleq (\mathrm{pr}_2(\hat{z}_N),\mathrm{pr}_2(\hat{z}_N)))\,\&\,(z^*_t \triangleq \hat{z}_{t+N} \ \ \forall t \in \overline{1,\mathbf{n}-N}). \tag{9.14}$$

При этом согласно предложению 6

$$(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_{\hat{\beta}}[\mathrm{pr}_2(\hat{z}_N)]; \tag{9.15}$$

в (9.15) учтены (9.5) и (9.2). Тогда (см. (4.5), (9.3), (9.15))

$$(\hat{\beta}, (z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[\mathrm{pr}_2(\hat{z}_N)]. \tag{9.16}$$

Заметим, что $z_t^* \in X \times X \ \ \forall t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}$. При этом согласно (4.2) и (9.15)

$$(z_0^* = (\mathrm{pr}_2(\hat{z}_N), \mathrm{pr}_2(\hat{z}_N))) \,\&\, (z_\tau^* \in \mathbb{M}^{(\hat{\beta}(\tau))} \ \ \forall \tau \in \overline{1, \mathbf{n}-N}). \tag{9.17}$$

Отметим здесь же, что согласно (4.1) и (9.17) $z_\tau^* \in \mathbb{M}_{N+\hat{\beta}(\tau)} \ \ \forall \tau \in \overline{1, \mathbf{n}-N}$. Ввиду (4.10), (9.3) и (9.15) имеем равенство

$$\mathfrak{C}^*_{\hat{\beta}}[(z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N} \big[\mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}^*), \mathrm{pr}_1(z_t^*), \hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n}-N})) + c^*_{\hat{\beta}(t)}(z_t^*, \hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}))\big]$$

$$+ f(\mathrm{pr}_2(z^*_{\mathbf{n}-N})). \tag{9.18}$$

В силу (4.11), (9.3), (9.9), (9.15) и (9.16) получаем

$$\widetilde{V}^*[pr_2(\hat{z}_N)] \leqslant \mathfrak{C}^*_{\hat{\beta}}[(z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}]. \tag{9.19}$$

Заметим, что (см. (9.18)) справедлива следующая цепочка равенств:

$$\mathfrak{C}^*_{\hat{\beta}}[(z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] = \mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(z_0^*), \mathrm{pr}_1(z_1^*), \hat{\beta}^1(\overline{1, \mathbf{n}-N})) + c^*_{\hat{\beta}(1)}(z_1^*, \hat{\beta}^1(\overline{1, \mathbf{n}-N}))$$

$$+ \sum_{t=2}^{\mathbf{n}-N} \big[\mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}^*), \mathrm{pr}_1(z_t^*), \hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n}-N})) + c^*_{\hat{\beta}(t)}(z_t^*, \hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}))\big] + f(\mathrm{pr}_2(z^*_{\mathbf{n}-N}))$$

$$= \mathbf{c}^*(pr_2(\hat{z}_N), pr_1(\hat{z}_{N+1}), \hat{\beta}^1(\overline{1, \mathbf{n}-N})) + c^*_{\hat{\beta}(1)}(\hat{z}_{N+1}, \hat{\beta}^1(\overline{1, \mathbf{n}-N}))$$

$$+ \sum_{t=2}^{\mathbf{n}-N} \big[\mathbf{c}^*(\mathrm{pr}_2(\hat{z}_{t+N-1}), \mathrm{pr}_1(\hat{z}_{t+N}), \hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n}-N})) + c^*_{\hat{\beta}(t)}(\hat{z}_{t+N}, \hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}))\big] + f(\mathrm{pr}_2(\hat{z}_{\mathbf{n}})) \tag{9.20}$$

(мы учли (9.14)). Напомним (4.6) и (4.7). Тогда из (9.20) вытекает, что

$$\mathfrak{C}^*_{\hat{\beta}}[(z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N} \big[\mathbf{c}^*(pr_2(\hat{z}_{t+N-1}), pr_1(\hat{z}_{t+N}), \hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n}-N})) + c^*_{\hat{\beta}(t)}(\hat{z}_{N+t}, \hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}))\big]$$

$$+ f(pr_2(\hat{z}_{\mathbf{n}})) = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N} \big[\mathbf{c}(pr_2(\hat{z}_{t+N-1}), pr_1(\hat{z}_{t+N}), \hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}) \oplus N) + c_{N+\hat{\beta}(t)}(\hat{z}_{t+N}, \hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}) \oplus N)\big]$$

$$+ f(pr_2(\hat{z}_{\mathbf{n}})). \tag{9.21}$$

Пусть $\theta \in \overline{1, \mathbf{n}-N}$. Тогда $N + \theta \in \overline{N+1, \mathbf{n}}$;

$$\hat{\beta}^1(\overline{\theta, \mathbf{n}-N}) \oplus N = \{k + N \colon k \in \hat{\beta}^1(\overline{\theta, \mathbf{n}-N})\} = \{\hat{\beta}(l) + N \colon l \in \overline{\theta, \mathbf{n}-N}\}. \tag{9.22}$$

При этом имеем для $l \in \overline{\theta, \mathbf{n}-N}$, что $N + l \in \overline{N+\theta, \mathbf{n}}$, и согласно (9.6) $\hat{\gamma}(N+l) = \hat{\beta}(l) + N$. Тогда в силу (9.22) имеем

$$\hat{\beta}^1(\overline{\theta, \mathbf{n}-N}) \oplus N = \{\hat{\gamma}(N+l) \colon l \in \overline{\theta, \mathbf{n}-N}\} = \{\hat{\gamma}(s) \colon s \in \overline{N+\theta, \mathbf{n}}\} = \hat{\gamma}^1(\overline{N+\theta, \mathbf{n}}).$$

Поскольку выбор θ был произвольным, установлено, что

$$\hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}) \oplus N = \hat{\gamma}^1(\overline{N+t, \mathbf{n}}) \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}-N}.$$

Из (9.21) имеем теперь (см. (9.6)), что справедливо равенство

$$\mathfrak{C}^*_{\hat\beta}[(z^*_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N}\big[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat z_{N+t-1}),\mathrm{pr}_1(\hat z_{N+t}),\hat\gamma^1(\overline{N+t,\mathbf{n}})) + c_{\hat\gamma(N+t)}(\hat z_{N+t},\hat\gamma^1(\overline{N+t,\mathbf{n}}))\big]$$

$$+ f(\mathrm{pr}_2(\hat z_{\mathbf{n}})) = \sum_{\tau=N+1}^{\mathbf{n}}\big[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat z_{\tau-1}),\mathrm{pr}_1(\hat z_\tau),\hat\gamma^1(\overline{\tau,\mathbf{n}})) + c_{\hat\gamma(\tau)}(\hat z_\tau,\hat\gamma^1(\overline{\tau,\mathbf{n}}))\big] + f(\mathrm{pr}_2(\hat z_{\mathbf{n}})). \quad (9.23)$$

Теперь из (9.19) и (9.23) получаем неравенство

$$\widetilde V^*[pr_2(\hat z_N)] \leqslant \sum_{\tau=N+1}^{\mathbf{n}}\big[\mathbf{c}(pr_2(\hat z_{\tau-1}),pr_1(\hat z_\tau),\hat\gamma^1(\overline{\tau,\mathbf{n}})) + c_{\hat\gamma(\tau)}(\hat z_\tau,\hat\gamma^1(\overline{\tau,\mathbf{n}}))\big] + f(pr_2(\hat z_{\mathbf{n}})).$$

Далее в силу (9.13) имеем с очевидностью, что

$$\mathbb{V}^\natural[\hat x] \le \sum_{t=1}^{N}\big[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat z_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\hat z_t),\hat\gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{\hat\gamma(t)}(\hat z_t,\hat\gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big]$$

$$+ \sum_{\tau=N+1}^{\mathbf{n}}\big[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat z_{\tau-1}),\mathrm{pr}_1(\hat z_\tau),\hat\gamma^1(\overline{\tau,\mathbf{n}})) + c_{\hat\gamma(\tau)}(\hat z_\tau,\hat\gamma^1(\overline{\tau,\mathbf{n}}))\big] + f(\mathrm{pr}_2(\hat z_{\mathbf{n}}))$$

$$= \sum_{t=1}^{\mathbf{n}}\big[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat z_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\hat z_t),\hat\gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{\hat\gamma(t)}(\hat z_t,\hat\gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big] + f(\mathrm{pr}_2(\hat z_{\mathbf{n}})). \quad (9.24)$$

С учетом (2.19) справедливо равенство

$$\mathfrak{C}_{\hat\gamma}[(\hat z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}}\big[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\hat z_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\hat z_t),\hat\gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{\hat\gamma(t)}(\hat z_t,\hat\gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big] + f(\mathrm{pr}_2(\hat z_{\mathbf{n}})),$$

тогда из (9.24) вытекает неравенство $V^\natural[\hat x] \leqslant \mathfrak{C}_{\hat\gamma}[(\hat z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}]$, а потому (см. (9.1)) $V^\natural[\hat x] \leqslant \mathbb{V}$. Вследствие (6.11) получаем теперь неравенство

$$\mathbb{V}^\natural \leqslant \mathbb{V}. \quad (9.25)$$

Исходя из (6.12), выберем и зафиксируем триплет

$$(\alpha^0,(z^0_t)_{t\in\overline{0,N}},x^0) \in \mathbf{SOL}^\natural.$$

Тогда согласно (6.12) $(\alpha^0,(z^0_t)_{t\in\overline{0,N}},x^0) \in \mathbb{D}^\natural$, и

$$\mathfrak{C}^\natural_{\alpha^0}[(z^0_t)_{t\in\overline{0,N}}] = \mathbb{V}^\natural. \quad (9.26)$$

Из (3.5) вытекает, что $(\alpha^0,(z^0_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}^\natural[x^0]$, где $x^0 \in X^0$. Тогда в силу (3.4)

$$\alpha^0 \in \mathcal{A}_1\colon (z^0_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_{\alpha^0}[x^0]; \quad (9.27)$$

при этом $(z^0_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}^\natural$, а потому (см. разд. 3) $z^0_\tau \in X\times X\ \ \forall \tau\in\overline{0,N}$. При этом ввиду (3.1) и (9.27)

$$(z^0_0 = (x^0,x^0))\,\&\,(z^0_t \in \mathbb{M}_{\alpha^0(t)}\ \ \forall t\in\overline{0,N}). \quad (9.28)$$

Из (6.9) и (9.27) вытекает справедливость неравенства $V^\natural[x^0] \leqslant \mathfrak{C}^\natural_{\alpha^0}[(z^0_t)_{t\in\overline{0,N}}]$, а потому (см. (9.26)) $V^\natural[x^0] \leqslant \mathbb{V}^\natural$, откуда с учетом (6.11) следует равенство

$$V^\natural[x^0] = \mathbb{V}^\natural. \quad (9.29)$$

Последнее означает согласно (6.14) справедливость включения $x^0 \in X^\natural_{\mathrm{opt}}$. Из (9.26) и (9.29) получаем теперь равенство

$$\mathfrak{C}^\natural_{\alpha^0}[(z^0_t)_{t\in\overline{0,N}}] = V^\natural[x^0]. \tag{9.30}$$

Тогда (см. (6.10), (9.27), (9.30)) имеем, конечно, включение $(\alpha^0, (z^0_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in (\mathrm{sol})^\natural[x^0]$. Из (9.28) следует, что $z^0_N \in \mathbb{M}_{\alpha^0(N)}$, а значит (см. (3.6), (9.27)),

$$pr_2(z^0_N) \in X^{00}. \tag{9.31}$$

Тогда (см. (6.1), (9.31)) определено значение $\widetilde{V}^*[pr_2(z^0_N)] = v^*_{\mathbf{n}-N}(pr_2(z^0_N), \overline{1, \mathbf{n}-N}) \in \mathbb{R}_+$, для которого согласно (6.3)

$$\mathbf{f}(pr_2(z^0_N)) = \widetilde{V}^*[pr_2(z^0_N)]. \tag{9.32}$$

Из (6.7), (9.26), (9.27) и (9.32) получаем

$$\mathbb{V}^\natural = V^\natural[x^0] = \sum_{t=1}^{N}\big[\mathbf{c}(pr_2(z^0_{t-1}), pr_1(z^0_t), (\alpha^0)^1(\overline{t,N}) \cup \overline{N+1,\mathbf{n}}) + c_{\alpha^0(t)}(z^0_t, (\alpha^0)^1(\overline{t,N}) \cup \overline{N+1,\mathbf{n}})\big]$$

$$+ \widetilde{V}^*[pr_2(z^0_N)]. \tag{9.33}$$

Учитывая непустоту множества $(\mathrm{sol})^*[pr_2(z^0_N)]$ (см. (4.13), (9.31)), выберем

$$(\bar\beta, (\bar z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in (\mathrm{sol})^*[pr_2(z^0_N)]. \tag{9.34}$$

Из (4.13) и (9.34) имеем, в частности,

$$(\bar\beta, (\bar z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[pr_2(z^0_N)], \tag{9.35}$$

а тогда получаем, что (см. (4.5), (9.35)) справедливо свойство

$$\bar\beta \in \mathcal{A}_2 \colon (\bar z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_{\bar\beta}[pr_2(z^0_N)]. \tag{9.36}$$

При этом, конечно, $(\bar z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^*$, а потому $\bar z_\tau \in X \times X$ при $\tau \in \overline{0, \mathbf{n}-N}$. Итак (см. (9.31), (9.36))

$$(pr_2(z^0_N) \in X^{00})\,\&\,(\bar\beta \in \mathcal{A}_2). \tag{9.37}$$

Из (4.1), (4.2), (9.36) и (9.37) вытекает, что

$$\big(\bar z_0 = (pr_2(z^0_N), (pr_2(z^0_N)))\big)\,\&\,\big(\bar z_t \in \mathbb{M}_{N+\bar\beta(t)}\ \ \forall t \in \overline{1,N}\big). \tag{9.38}$$

Отметим здесь же, что согласно (4.13), (9.34) и (9.37) справедливо равенство $\mathfrak{C}^*_{\bar\beta}[(\bar z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] = \widetilde{V}^*[pr_2(z^0_N)]$, что доставляет (см. (4.10)) цепочку равенств

$$\widetilde{V}^*[pr_2(z^0_N)] = \mathfrak{C}^*_{\bar\beta}[(\bar z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}]$$

$$= \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N}\big[\mathbf{c}^*(pr_2(\bar z_{t-1}), pr_1(\bar z_t), \bar\beta^1(\overline{t,\mathbf{n}-N})) + c^*_{\bar\beta(t)}(\bar z_t, \bar\beta^1(\overline{t,\mathbf{n}-N}))\big] + f(pr_2(\bar z_{\mathbf{n}-N})). \tag{9.39}$$

Напомним, что в соответсвии с (9.27) и (9.37) $(\alpha^0 \in \mathcal{A}_1)\,\&\,(\bar\beta \in \mathcal{A}_2)$. Поэтому согласно (2.8) определен склеенный маршрут

$$\alpha^0 \diamond \bar\beta \in \mathbf{P}, \tag{9.40}$$

для которого справедливо следующее представление (см. (2.6)):

$$\big((\alpha^0 \diamond \bar\beta)(k) = \alpha^0(k)\ \ \forall k \in \overline{1, N}\big)\,\&\,\big((\alpha^0 \diamond \bar\beta)(l) = \bar\beta(l - N) + N\ \ \forall l \in \overline{N+1, \mathbf{n}}\big). \tag{9.41}$$

Заметим, что в силу (3.3) и (9.27) $(z_t^0)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathbb{Z}^\natural$, т.е. $z_\tau^0 \in \mathbb{X}^\natural \times \mathbf{X}^\natural\ \ \forall \tau \in \overline{0,N}$. Кроме того, из (4.4), (9.31) и (9.36) следует, что $(\bar z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathbb{Z}^*$, т.е. $\bar z_\tau \in (\mathbb{X}^* \cup X^{00}) \times \mathbf{X}^*$ при $\tau \in \overline{0, \mathbf{n} - \mathbf{N}}$. Это означает, в частности (см. (2.15), определения разд. 3), что $z_\tau^0 \in X \times X$ при $\tau \in \overline{0,N}$. Аналогичным образом имеем (см. (2.15), (2.28), (4.1), (4.3)), что $\bar z_\tau \in X \times X$ при $\tau \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$. Таким образом, $((z_t^0)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}^\natural)\,\&\,((\bar z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^*)$. Тогда с учетом (6.20) получаем, что определен кортеж

$$(w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \stackrel{\triangle}{=} (z_t^0)_{t\in\overline{0,N}} \,\square\, (\bar z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z},$$

для которого (см. (6.21)) справедливы равенства

$$(w_t = z_t^0\ \ \forall t \in \overline{0,N})\,\&\,(w_\tau = \bar z_{\tau-N}\ \ \forall \tau \in \overline{N+1,\mathbf{n}}). \tag{9.42}$$

Напомним, что $x^0 \in X^0$, $\alpha^0 \in \mathcal{A}_1$, $\bar\beta \in \mathcal{A}_2$, $(z_t^0)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_{\alpha^0}[x^0]$ и $(\bar z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_{\bar\beta}[pr_2(z_N^0)]$. Поэтому согласно предложению 4 и (9.42) $(w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha^0\diamond\bar\beta}[x^0]$. В силу (9.40) и (9.43) получаем

$$\alpha^0 \diamond \bar\beta \in \mathbf{P}\colon (w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha^0\diamond\bar\beta}[x^0]. \tag{9.43}$$

При этом согласно (2.11) $w_t \in X \times X$ при $t \in \overline{0,\mathbf{n}}$. Из (2.11) и (9.43) вытекает, что $(w_0 = (x^0, x^0))\,\&\,(w_\tau \in \mathbb{M}_{(\alpha^0\diamond\bar\beta)(\tau)}\ \ \forall \tau \in \overline{1,\mathbf{n}})$. При этом (см. (2.19), (9.43)) имеем очевидное равенство

$$\mathfrak{C}_{\alpha^0\diamond\bar\beta}[(w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} \big[\mathbf{c}(pr_2(w_{t-1}), pr_1(w_t), (\alpha^0 \diamond \bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{(\alpha^0\diamond\bar\beta)(t)}(w_t, (\alpha^0 \diamond \bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big]$$
$$+ f(pr_2(w_{\mathbf{n}})) = \sum_{t=1}^{N} \big[\mathbf{c}(pr_2(w_{t-1}), pr_1(w_t), (\alpha^0 \diamond \bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{(\alpha^0\diamond\bar\beta)(t)}(w_t, (\alpha^0 \diamond \bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big]$$
$$+ \sum_{t=N+1}^{\mathbf{n}} \big[\mathbf{c}(pr_2(w_{t-1}), pr_1(w_t), (\alpha^0 \diamond \bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{(\alpha^0\diamond\bar\beta)(t)}(w_t, (\alpha^0 \diamond \bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big] + f(pr_2(w_{\mathbf{n}})).$$

Из (9.41), (9.42) получаем теперь, что

$$\mathfrak{C}_{\alpha^0\diamond\bar\beta}[(w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \sum_{t=1}^{N} \big[\mathbf{c}(pr_2(z_{t-1}^0), pr_1(z_t^0), (\alpha^0 \diamond \bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{(\alpha^0\diamond\bar\beta)(t)}(z_t^0, (\alpha^0 \diamond \bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big]$$
$$+ \big[\mathbf{c}(pr_2(w_N), pr_1(w_{N+1}), (\alpha^0 \diamond \bar\beta)^1(\overline{N+1,\mathbf{n}})) + c_{(\alpha^0\diamond\bar\beta)(N+1)}(\bar z_1, (\alpha^0 \diamond \bar\beta)^1(\overline{N+1,\mathbf{n}}))\big]$$
$$+ \sum_{t=N+2}^{\mathbf{n}} \big[\mathbf{c}(pr_2(\bar z_{t-1-N}), pr_1(\bar z_{t-N}), (\alpha^0 \diamond \bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{(\alpha^0\diamond\bar\beta)(t)}(\bar z_{t-N}, (\alpha^0 \diamond \bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big]$$
$$+ f(pr_2(\bar z_{\mathbf{n}-N})). \tag{9.44}$$

Заметим, что согласно (9.42) $w_N = z_N^0$, а потому $pr_2(w_N) = pr_2(z_N^0)$; кроме того, $pr_1(w_{N+1}) = pr_1(\bar z_1)$. Поэтому (см. (9.44))

$$\mathfrak{C}_{\alpha^0\diamond\bar\beta}[(w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \sum_{t=1}^{N} \big[\mathbf{c}(pr_2(z_{t-1}^0), pr_1(z_t^0), (\alpha^0 \diamond \bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{(\alpha^0\diamond\bar\beta)(t)}(z_t^0, (\alpha^0 \diamond \bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big]$$
$$+ \big[\mathbf{c}(pr_2(\bar z_0), pr_1(\bar z_1), (\alpha^0 \diamond \bar\beta)^1(\overline{N+1,\mathbf{n}})) + c_{(\alpha^0\diamond\bar\beta)(N+1)}(\bar z_1, (\alpha^0 \diamond \bar\beta)^1(\overline{N+1,\mathbf{n}}))\big]$$

$$+\sum_{t=N+2}^{\mathbf{n}}\big[\mathbf{c}(pr_2(\bar z_{t-N-1}),pr_1(\bar z_{t-N}),(\alpha^0\diamond\bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))+c_{(\alpha^0\diamond\bar\beta)(t)}(\bar z_{t-N},(\alpha^0\diamond\bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big]$$

$$+f(pr_2(\bar z_{\mathbf{n}-N}))=\sum_{t=1}^{N}\big[\mathbf{c}(pr_2(z^0_{t-1}),pr_1(z^0_t),(\alpha^0\diamond\bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))+c_{(\alpha^0\diamond\bar\beta)(t)}(z^0_t,(\alpha^0\diamond\bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big]$$

$$+\sum_{t=N+1}^{\mathbf{n}}\big[\mathbf{c}(pr_2(\bar z_{t-N-1}),pr_1(\bar z_{t-N}),(\alpha^0\diamond\bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))+c_{(\alpha^0\diamond\bar\beta)(t)}(\bar z_{t-N},(\alpha^0\diamond\bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big]$$

$$+f(pr_2(\bar z_{\mathbf{n}-N})). \qquad (9.45)$$

Отметим, что согласно предложению 3 имеем свойство $(\alpha^0\diamond\bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}})=(\alpha^0)^1(\overline{t,N})\cup\overline{N+1,\mathbf{n}}$ $\forall t\in\overline{1,N}$. Кроме того, имеем из (2.6), что $(\alpha^0\diamond\bar\beta)(t)=\bar\beta(t-N)+N$ при $t\in\overline{N+1,\mathbf{n}}$: если при этом $l\in\overline{t,\mathbf{n}}$, то $l\in\overline{N+1,\mathbf{n}}$, и снова с учетом (2.6) $(\alpha^0\diamond\bar\beta)(l)=\bar\beta(l-N)+N$. Как следствие получаем, что при $t\in\overline{N+1,\mathbf{n}}$

$$(\alpha^0\diamond\bar\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}})=\{(\alpha^0\diamond\bar\beta)(k)\colon k\in\overline{t,\mathbf{n}}\}=\{\bar\beta(k-N)+N\colon k\in\overline{t,\mathbf{n}}\}$$

$$=\{\bar\beta(l)+N\colon l\in\overline{t-N,\mathbf{n}-N}\}=\{s+N\colon s\in\bar\beta^1(\overline{t-N,\mathbf{n}-N})\}=\bar\beta^1(\overline{t-N,\mathbf{n}-N})\oplus N.$$

Теперь из (9.45) получим равенство

$$\mathfrak{C}_{\alpha^0\diamond\bar\beta}[(w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}]=\sum_{t=1}^{N}\big[\mathbf{c}(pr_2(z^0_{t-1}),pr_1(z^0_t),(\alpha^0)^1(\overline{t,N})\cup\overline{N+1,\mathbf{n}})+c_{\alpha^0(t)}(z^0_t,(\alpha^0)^1(\overline{t,N})\cup\overline{N+1,\mathbf{n}})\big]$$

$$+\sum_{t=N+1}^{\mathbf{n}}\big[\mathbf{c}(pr_2(\bar z_{t-N-1}),pr_1(\bar z_{t-N}),\bar\beta^1(\overline{t-N,\mathbf{n}-N})\oplus N)+c_{\bar\beta(t-N)+N}(\bar z_{t-N},\bar\beta^1(\overline{t-N,\mathbf{n}-N})\oplus N)\big]$$

$$+f(pr_2(\bar z_{\mathbf{n}-N})). \qquad (9.46)$$

С учетом (9.33) и (9.46) имеем теперь с очевидностью, что

$$\mathfrak{C}_{\alpha^0\diamond\bar\beta}[(w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}]=\mathbb{V}^\natural-\widetilde V^*[pr_2(z^0_N)]$$

$$+\sum_{t=N+1}^{\mathbf{n}}\big[\mathbf{c}(pr_2(\bar z_{t-N-1}),pr_1(\bar z_{t-N}),\bar\beta^1(\overline{t-N,\mathbf{n}-N})\oplus N)+c_{\bar\beta(t-N)+N}(\bar z_{t-N},\bar\beta^1(\overline{t-N,\mathbf{n}-N})\oplus N)\big]$$

$$+f(pr_2(\bar z_{\mathbf{n}-N}))=\mathbb{V}^\natural-\widetilde V^*[pr_2(z^0_N)]+\sum_{\tau=1}^{\mathbf{n}-N}\big[\mathbf{c}(pr_2(\bar z_{\tau-1}),pr_1(\bar z_\tau),\bar\beta^1(\overline{\tau,\mathbf{n}-N})\oplus N)$$

$$+c_{\bar\beta(\tau)+N}(\bar z_\tau,\bar\beta^1(\overline{\tau,\mathbf{n}-N})\oplus N)\big]+f(pr_2(\bar z_{\mathbf{n}-N})). \qquad (9.47)$$

Учтем (4.6) и (4.7). В самом деле, при $\tau\in\overline{1,\mathbf{n}-N}$ имеем, что $\bar\beta^1(\overline{\tau,\mathbf{n}-N})\in\mathfrak{N}^*$, а значит,

$$\big(\mathbf{c}^*(pr_2(\bar z_{\tau-1}),pr_1(\bar z_\tau),\bar\beta^1(\overline{\tau,\mathbf{n}-N}))=\mathbf{c}(pr_2(\bar z_{\tau-1}),pr_1(\bar z_\tau),\bar\beta^1(\overline{\tau,\mathbf{n}-N})\oplus N)\big)$$

$$\&\ \big(c^*_{\bar\beta(\tau)}(\bar z_\tau,\bar\beta^1(\overline{\tau,\mathbf{n}-N}))=c_{\bar\beta(\tau)+N}(\bar z_\tau,\bar\beta^1(\overline{\tau,\mathbf{n}-N})\oplus N)\big).$$

Тогда из (9.47) вытекает

$$\mathfrak{C}_{\alpha^0\diamond\bar\beta}[(w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}]=\mathbb{V}^\natural-\widetilde V^*[pr_2(z^0_N)]$$

$$+\sum_{\tau=1}^{\mathbf{n}-N}\big[\mathbf{c}^*(pr_2(\bar z_{\tau-1}),pr_1(\bar z_\tau),\bar\beta^1(\overline{\tau,\mathbf{n}-N}))+c^*_{\bar\beta(\tau)}(\bar z_\tau,\bar\beta^1(\overline{\tau,\mathbf{n}-N}))\big]+f(pr_2(\bar z_{\mathbf{n}-N})).$$

С учетом (9.39) получаем, следовательно, что

$$\mathfrak{C}_{\alpha^0\diamond\bar{\beta}}((w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) = \mathbb{V}^\natural. \tag{9.48}$$

Но из (9.43) имеем в силу (2.12), (2.13) и (2.23)

$$(\alpha^0\diamond\bar{\beta}, (w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in \widetilde{\mathbf{D}}[x^0], \quad (\alpha^0\diamond\bar{\beta}, (w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}, x^0) \in \mathbf{D},$$

а потому $\mathfrak{C}_{\alpha^0\diamond\bar{\beta}}[(w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] \geq \mathbb{V}$. С учетом (9.48) получаем, что $\mathbb{V} \leqslant \mathbb{V}^\natural$, а тогда с учетом (9.25) справедливо требуемое равенство $\mathbb{V} = \mathbb{V}^\natural$.

Теорема доказана.

10. Построение оптимального декомпозиционного решения

В настоящем разделе фиксируем

$$x^0 \in X^\natural_{\text{opt}}, \quad (\alpha, (z'_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in (\text{sol})^\natural[x^0], \quad (\beta, (z''_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in (\text{sol})^*[pr_2(z'_N)]. \tag{10.1}$$

Тогда, в частности, $x^0 \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $\beta \in \mathcal{A}_2$; определен (см. (2.8)) склеенный маршрут

$$\alpha\diamond\beta \in \mathbf{P}. \tag{10.2}$$

При этом $(\alpha, (z'_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{D}^\natural[x^0]$ в силу (6.10), а потому

$$(z'_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_\alpha[x^0]. \tag{10.3}$$

Тогда (см. (3.6), (10.3)) $pr_2(z'_N) \in X^{00}$. В связи с (10.3) заметим, что (см. (3.1)) $(z'_t)_{t\in\overline{0,N}}) \in \mathfrak{Z}^\natural$, т. е. $z'_t \in X\times X$ при $t\in\overline{0,N}$;˙ $(z'_0 = (x^0,x^0))\,\&\,(z'_\tau \in \mathbb{M}_{\alpha(\tau)}\ \ \forall\tau\in\overline{1,N})$. Наконец, из теоремы 1, (6.10) и (10.1) имеем равенство

$$\mathfrak{C}^\natural_\alpha[(z'_t)_{t\in\overline{0,N}}] = \mathbb{V}. \tag{10.4}$$

Напомним, что (см. (10.1)) имеет место

$$(pr_2(z'_N) \in X^{00})\,\&\,(\beta\in\mathcal{A}_2). \tag{10.5}$$

Поэтому определено (см. (4.12), (10.5)) значение $\widetilde{V}^*[pr_2(z'_N)] \in \mathbb{R}_+$; при этом согласно (4.13), (10.1) решение

$$(\beta, (z''_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[pr_2(z'_N)] \tag{10.6}$$

таково, что справедлива (см. (4.10)) цепочка равенств

$$\mathfrak{C}^*_\beta[(z''_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N}\big[\mathbf{c}^*(pr_2(z''_{t-1}), pr_1(z''_t), \beta^1(\overline{t,\mathbf{n}-N})) + c^*_{\beta(t)}(z''_t, \beta^1(\overline{t,\mathbf{n}-N}))\big]$$
$$+ f(pr_2(z''_{\mathbf{n}-N})) = \widetilde{V}^*[pr_2(z'_N)]. \tag{10.7}$$

Отметим, что согласно (6.7), (10.1) и (10.4) имеем также цепочку равенств

$$\mathbb{V} = \mathfrak{C}^\natural_\alpha[(z'_t)_{t\in\overline{0,N}}] = \sum_{t=1}^{N}\big[\mathbf{c}(pr_2(z'_{t-1}), pr_1(z'_t), \alpha^1(\overline{t,N})\cup\overline{N+1,\mathbf{n}}) + c_{\alpha(t)}(z'_t, \alpha^1(\overline{t,N})\cup\overline{N+1,\mathbf{n}})\big]$$
$$+ \widetilde{V}^*[pr_2(z'_N)]; \tag{10.8}$$

мы учли теорему 1, (6.3) и (10.5). Теперь напомним (10.3), а также то, что (см. (4.5), (10.5), (10.6))

$$(z''_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_\beta[pr_2(z'_N)]. \tag{10.9}$$

При этом имеем из (10.3) и (10.9), что (см. (3.1), (4.2))

$$((z'_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}^\natural) \,\&\, ((z''_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^*).$$

С учетом этого определен (см. (6.20)) кортеж

$$(w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \stackrel{\triangle}{=} (z'_t)_{t\in\overline{0,N}} \,\square\, (z''_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}, \tag{10.10}$$

для которого согласно (6.21) имеем

$$(w_t = z'_t \ \ \forall t \in \overline{0,N}) \,\&\, (w_t = z''_{t-N} \ \ \forall t \in \overline{N+1,\mathbf{n}}). \tag{10.11}$$

Поскольку $x^0 \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$, $(z'_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}^\natural_\alpha[x^0]$ и $(z''_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}^*_\beta[pr_2(z'_N)]$, то (см. (10.10), предложение 4)

$$(w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha\diamond\beta}[x^0]. \tag{10.12}$$

Из (2.12), (10.2) и (10.12) получаем как следствие, что

$$(\alpha\diamond\beta, (w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in \widetilde{\mathbf{D}}[x^0]. \tag{10.13}$$

Теорема 2. *При условиях* (10.1) *и* (10.10) *триплет* $(\alpha\diamond\beta, (w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}, x^0)$ *является оптимальным маршрутным процессом в исходной задаче* (2.22):

$$(\alpha\diamond\beta, (w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}, x^0) \in \mathbf{SOL}. \tag{10.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены условия (10.1), (10.10). По выбору x^0 имеем из (6.14), что

$$x^0 \in X^0 \colon V^\natural[x^0] = \mathbb{V}^\natural.$$

В силу теоремы 1 получаем равенство $V^\natural[x^0] = \mathbb{V}$. Напомним (10.3). Тогда, в частности, $(z'_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}^\natural$, т. е. $z'_\tau \in X\times X$ при $\tau \in \overline{0,N}$. При этом (см. (3.1))

$$(z'_0 = (x^0, x^0)) \,\&\, (z'_\tau \in \mathbb{M}_{\alpha(\tau)} \ \ \forall \tau \in \overline{1,N}). \tag{10.15}$$

Имеем (10.4), (10.8). Заметим, что в силу (10.15) $z'_N \in \mathbb{M}_{\alpha(N)}$. Напомним также, что (см. (10.5)) $pr_2(z'_N) \in X^{00}$ и $\widetilde{V}^*[pr_2(z'_N)] \in \mathbb{R}_+$. Учтем (10.6). При этом $\beta \in \mathbb{P}_2$ и, в частности, $\beta\colon \overline{1,\mathbf{n}-N} \to \overline{1,\mathbf{n}-N}$. Согласно (4.2) и (10.9) $z''_\tau \in X\times X$ при $\tau \in \overline{0,\mathbf{n}-N}$. Далее, из (4.1), (4.2) и (10.9) получаем, что

$$\big(z''_0 = (pr_2(z'_N), pr_2(z'_N))\big) \,\&\, \big(z''_t \in \mathbb{M}_{N+\beta(t)} \ \ \forall t \in \overline{1,\mathbf{n}-N}\big). \tag{10.16}$$

Напомним (10.7), учитывая (4.6) и (4.7). Тогда имеем цепочку равенств

$$\mathfrak{C}^*_\beta[(z''_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N} \big[\mathbf{c}(pr_2(z''_{t-1}), pr_1(z''_t), \beta^1(\overline{t,\mathbf{n}-N}) \oplus N) + c_{\beta(t)+N}(z''_t, \beta^1(\overline{t,\mathbf{n}-N}) \oplus N)\big]$$

$$+ f(pr_2(z''_{\mathbf{n}-N})) = \widetilde{V}^*[pr_2(z'_N)]. \tag{10.17}$$

Будем использовать (2.6). Тогда, возвращаясь к (10.8), имеем при $t \in \overline{1, N}$, что

$$(\alpha \diamond \beta)(\overline{t, \mathbf{n}}) = \alpha^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}$$

(см. предложение 3). Поэтому из (10.8) следует

$$\mathbb{V} = \sum_{t=1}^{N} \bigl[\mathbf{c}(pr_2(z'_{t-1}), pr_1(z'_t), (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + c_{(\alpha\diamond\beta)(t)}(z'_t, (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t, \mathbf{n}}))\bigr] + \widetilde{V}^*[pr_2(z'_N)]. \quad (10.18)$$

Напомним (10.11). Тогда в силу (10.11) и (10.18) получаем равенство

$$\mathbb{V} = \sum_{t=1}^{N} \bigl[\mathbf{c}(pr_2(w_{t-1}), pr_1(w_t), (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + c_{(\alpha\diamond\beta)(t)}(w_t, (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t, \mathbf{n}}))\bigr] + \widetilde{V}^*[pr_2(z'_N)]. \quad (10.19)$$

Заметим, что при $\tau \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ реализуется $\tau + N \in \overline{N+1, \mathbf{n}}$ и $\tau = (\tau + N) - N$, а потому из (10.11) вытекает, что $w_{\tau+N} = z''_\tau$. Итак,

$$w_{t+N} = z''_t \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n} - N}. \quad (10.20)$$

Кроме того, при $t \in \overline{N+1, \mathbf{n}}$ имеем цепочку равенств (см. (2.6))

$$(\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t, \mathbf{n}}) = \{(\alpha \diamond \beta)(k) \colon k \in \overline{t, \mathbf{n}}\} = \{\beta(l - N) + N \colon l \in \overline{t, \mathbf{n}}\} = \{\beta(s) + N \colon s \in \overline{t - N, \mathbf{n} - N}\}$$
$$= \{k + N \colon k \in \beta^1(\overline{t - N, \mathbf{n} - N})\} = \beta^1(\overline{t - N, \mathbf{n} - N}) \oplus N; \quad (10.21)$$

кроме того, $t - N \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$, а тогда $(\alpha \diamond \beta)(t) = \beta(t - N) + N$. Последнее означает, что при $\tau \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ справедливо равенство

$$(\alpha \diamond \beta)(\tau + N) = \beta(\tau) + N. \quad (10.22)$$

Из (10.21), (10.22) получаем, что при $\tau \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$

$$\beta^1(\overline{\tau, \mathbf{n} - N}) \oplus N = (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{\tau + N, \mathbf{n}}). \quad (10.23)$$

Теперь из (10.17), (10.20), (10.22) и (10.23) вытекает равенство

$$\widetilde{V}^*[pr_2(z'_N)] = \mathbf{c}\bigl(pr(z''_0), pr_1(z''_1), (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{N+1, \mathbf{n}})\bigr)$$
$$+ \sum_{t=2}^{\mathbf{n}-N} \mathbf{c}\bigl(pr_2(w_{t+N-1}), pr_1(w_{t+N}), (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t+N, \mathbf{n}})\bigr)$$
$$+ \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N} c_{(\alpha\diamond\beta)(t+N)}\bigl(w_{t+N}, (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t+N, \mathbf{n}})\bigr) + f(pr_2(w_{\mathbf{n}})), \quad (10.24)$$

где согласно (10.16) $pr_2(z''_0) = pr_2(z'_N)$. Ввиду (10.11) получаем, что $pr_2(z''_0) = pr_2(w_N)$ и $pr_1(z''_1) = pr_1(w_{N+1})$. Тогда из (10.24) вытекает, что

$$\widetilde{V}^*[pr_2(z'_N)] = \mathbf{c}\bigl(pr_2(w_N), pr_1(w_{N+1}), (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{N+1, \mathbf{n}})\bigr)$$
$$+ \sum_{t=2}^{\mathbf{n}-N} \mathbf{c}\bigl(pr_2(w_{t+N-1}), pr_1(w_{t+N}), (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t+N, \mathbf{n}})\bigr) + \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N} c_{(\alpha\diamond\beta)(t+N)}\bigl(w_{t+N}, (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t+N, \mathbf{n}})\bigr)$$
$$+ f(pr_2(w_{\mathbf{n}})) = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N} \bigl[\mathbf{c}(pr_2(w_{t+N-1}), pr_1(w_{t+N}), (\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t+N, \mathbf{n}}))$$

$$+ c_{(\alpha\diamond\beta)(t+N)}(w_{t+N}, (\alpha\diamond\beta)^1(\overline{t+N,\mathbf{n}}))\big] + f(pr_2(w_{\mathbf{n}}))$$

$$= \sum_{\tau=N+1}^{\mathbf{n}} \big[\mathbf{c}(pr_2(w_{\tau-1}), pr_1(w_\tau), (\alpha\diamond\beta)^1(\overline{\tau,\mathbf{n}})) + c_{(\alpha\diamond\beta)(\tau)}(w_\tau, (\alpha\diamond\beta)^1(\overline{\tau,\mathbf{n}}))\big] + f(pr_2(w_{\mathbf{n}})).$$

Поэтому с учетом (10.19) получаем цепочку равенств

$$\mathbb{V} = \sum_{t=1}^{N}\big[\mathbf{c}(pr_2(w_{t-1}), pr_1(w_t), (\alpha\diamond\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{(\alpha\diamond\beta)(t)}(w_t, (\alpha\diamond\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big]$$

$$+ \sum_{t=N+1}^{\mathbf{n}} \big[\mathbf{c}(pr_2(w_{t-1}), pr_1(w_t), (\alpha\diamond\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{(\alpha\diamond\beta)(t)}(w_t, (\alpha\diamond\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big] + f(pr_2(w_{\mathbf{n}}))$$

$$= \sum_{t=1}^{\mathbf{n}}\big[\mathbf{c}(pr_2(w_{t-1}), pr_1(w_t), (\alpha\diamond\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{(\alpha\diamond\beta)(t)}(w_t, (\alpha\diamond\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big] + f(pr_2(w_{\mathbf{n}})). \quad (10.25)$$

Однако в силу (10.2) и (10.12) имеем, что $\alpha\diamond\beta \in \mathbf{P}\colon (w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha\diamond\beta}[x^0]$. Поэтому согласно (2.19) имеем равенство

$$\mathfrak{C}_{\alpha\diamond\beta}[(w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}}\big[\mathbf{c}(pr_2(w_{t-1}), pr_1(w_t), (\alpha\diamond\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}})) + c_{(\alpha\diamond\beta)(t)}(w_t, (\alpha\diamond\beta)^1(\overline{t,\mathbf{n}}))\big] + f(pr_2(w_{\mathbf{n}})).$$

Тогда с учетом (10.25) имеем равенство

$$\mathfrak{C}_{\alpha\diamond\beta}[(w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathbb{V}. \quad (10.26)$$

Отметим, что (см. (10.2), (10.10) и (10.13)) справедливо свойство

$$(\alpha\diamond\beta, (w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}, x^0) \in \mathbf{P}\times\mathfrak{Z}\times X^0\colon (\alpha\diamond\beta, (w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}) \in \widetilde{\mathbf{D}}[x^0].$$

В силу (2.13) получаем, что $(\alpha\diamond\beta, (w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}, x^0) \in \mathbf{D}$. Тогда из (2.24) и (10.26) имеем требуемое свойство (10.14).

Теорема доказана. Легко видеть, что $x^0 \in X^0_{\mathrm{opt}}$.

11. Общая структура алгоритма

Построение глобального экстремума $\mathbb{V}$ и оптимального маршрутного процесса из множества **SOL** (см. (2.24)) предлагается реализовать в следующей очередности, учитывающей теоретические построения предыдущих разделов.

1) Определяем множество $\widetilde{\mathbf{K}}_1$ (см. (2.27)) и в его терминах (см. (2.28)) множество X^{00} для использования в $\mathcal{M}_2$-задаче (элементы X^{00} и только они могут использоваться в виде точек старта в $\mathcal{M}_2$-задаче).
2) Реализуем построение существенных списков заданий в $\mathcal{M}_2$-задаче (определение $\mathfrak{S}_1^*$ и на основе (5.3) построение $\mathfrak{S}_2^*, \ldots, \mathfrak{S}_{\mathbf{n}-N}^*$; последнее семейство есть синглетон $\{\overline{1,\mathbf{n}-N}\}$).
3) Для $\mathcal{M}_2$-задачи осуществляем построение слоев пространства позиций, т. е. множеств $D_0^*, D_1^*, \ldots, D_{\mathbf{n}-N}^*$ (см. разд. 5).
4) С учетом (5.6) осуществляем построение слоев $v_0^*, v_1^*, \ldots, v_{\mathbf{n}-N}^*$ функции Беллмана $\mathcal{M}_2$-задачи (см. правило (5.7)). На этой основе (см. (5.9)) находим функцию $\widetilde{V}^*[\cdot]$, определенную на X^{00}.
5) В терминах $\widetilde{V}^*[\cdot]$ формируем (см. (6.2), (6.3)) терминальную компоненту $\mathbf{f}$ критерия $\mathcal{M}_1$-задачи.

6) Реализуем построение существенных списков заданий $\mathcal{M}_1$-задачи на основе (7.1) (см. разд. 7).

7) Осуществляем построение слоев $D_0^\natural, D_1^\natural, \ldots, D_N^\natural$ пространства позиций $\mathcal{M}_1$-задачи (см. (7.2)–(7.4)), получая, в частности, свойство (7.5).

8) Реализуем (см. (7.6), (7.7)) построение слоев $v_0^\natural, v_1^\natural, \ldots, v_N^\natural$ функции Беллмана $\mathcal{M}_1$-задачи; определяем на основе $v_N^\natural$ экстремум $\mathbb{V}^\natural$ в $\mathcal{M}_1$-задаче с терминальной компонентой критерия в виде $\widetilde{V}^*[\cdot]$; в силу теоремы 1 получаем глобальный экстремум $\mathbb{V}$, а также оптимальную точку старта $x^0 \in X^\natural_{\mathrm{opt}}$ (см. разд. 7).

9) Фиксируя x^0, осуществляем (см. разд. 8) построение решения $(\xi, (y_i)_{i\in\overline{0,N}}) \in (\mathrm{sol})^\natural[x^0]$ (оптимального в $(\mathcal{M}_1, x^0)$-задаче).

10) Полагаем далее, что $(\alpha, (z'_t)_{t\in\overline{0,N}}) \overset{\triangle}{=} (\xi, (y_i)_{i\in\overline{0,N}}) \in (\mathrm{sol})^\natural[x^0]$, и фиксируем финишную точку $pr_2(z'_N) \in X^{00}$. После этого строим (оптимальную) пару маршрут-трасса

$$(\beta, (z''_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}) \in (\mathrm{sol})^*[pr_2(z'_N)].$$

Для этого используем процедуру разд. 5 (см. (5.10)–(5.14)) при $\mathbf{z}_0^* = (pr_2(z'_N), pr_2(z'_N))$. Тем самым конкретизируется схема решения $\mathcal{M}_2$-задачи для точки старта, определяемой решением $\mathcal{M}_1$-задачи.

11) Осуществляем склеивание решений $(\alpha, (z'_t)_{t\in\overline{0,N}})$ и $(\beta, (z''_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}})$, получая совокупное решение $(\alpha \diamond \beta, (w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}})$ (см. (10.13)), где $(w_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}$ определяется посредством (10.10), (10.11). В итоге реализуется (оптимальное) решение (10.14), доставляющее (см. теорему 1) глобальный экстремум $\mathbb{V}$.

12. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим пример решения задачи управления инструментом при листовой резке деталей на машинах с ЧПУ. Здесь в качестве X используем (невырожденный) прямоугольник на плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Мегаполисы получаются дискретизацией эквидистант контуров деталей с выделением точек врезки и точек выключения инструмента. Упорядоченные пары, составленные каждая из точки врезки и соответствующей ей точки выключения инструмента, образуют отношения $\mathbb{M}_1, \ldots, \mathbb{M}_{\mathbf{n}}$, связанные с соответствующими мегаполисами. Как и в общей части, мегаполисы $M_1, \ldots, M_N$ составляют семейство $\mathcal{M}_1$, а мегаполисы $M_{N+1}, \ldots, M_{\mathbf{n}}$ — семейство $\mathcal{M}_2$.

Формирование (адресных) УП из множеств $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ осуществляется, исходя из следующих содержательных соображений: резка внутренних контуров каждой детали должна предшествовать резке внешнего контура. Аналогичное требование относится и к случаю, когда имеются “внутренние” детали у соответствующей объемляющей детали.

Из динамических ограничений отметим следующее: возле точек врезки на момент врезки должно быть (см. [13]) “достаточно много” сплошного металла с тем, чтобы осуществлялся эффективный отвод тепла (имеется в виду сплошной металл с внешней по отношению к контуру стороны). Выполнимость данного условия связана (см. подробнее в [13]) со списком ранее выполненных заданий, что, однако, легко сводится к учету зависимости от списка еще не выполненных заданий. По отношению к разбиению $\mathcal{M}$ в сумму семейств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ упомянутые динамические ограничения являются “перекрестными”: работы, выполненные при решении $\mathcal{M}_1$-задачи, могут оказывать влияния на допустимость и недопустимость точек врезки $\mathcal{M}_2$-задачи. Путем перехода к дополнению до $\overline{0,\mathbf{n}}$ возникающая зависимость сводится к зависимости от списка заданий, не выполненных на текущий момент времени.

Многоэтапный вариант применения динамического программирования. Сейчас мы на содержательном уровне рассмотрим естественное обобщение постановки разд. 2. Мы сохраняем предположения разд. 2 в отношении X, X^0, $\mathbf{n}$, $M_1, \ldots, M_{\mathbf{n}}$, $\mathbb{M}_1, \ldots, \mathbb{M}_{\mathbf{n}}$; в частности, полагаем выполненным (2.1). Пусть $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$ и заданы числа $N_0 \in \overline{1,\mathbf{n}}$, $N_1 \in \overline{1,\mathbf{n}}, \ldots, N_r \in \overline{1,\mathbf{n}}$, для которых $N_0 = 0$, $N_r = \mathbf{n}$ и, кроме того, $N_s + 2 \leqslant N_{s+1}$ $\forall s \in \overline{0, r-1}$. Полагаем в дальнейшем, что

$$\mathcal{M}_j = \{M_i \colon i \in \overline{N_{j-1}+1, N_j}\} \quad \forall j \in \overline{1,r}.$$

Тогда $\{\mathcal{M}_j \colon j \in \overline{1,r}\}$ есть разбиение семейства $\mathcal{M} = \{M_i \colon i \in \overline{1,\mathbf{n}}\}$. Будем предполагать, что в каждой зоне $\mathcal{M}_j$, $j \in \overline{1,r}$, заданы свои условия предшествования. Итак, пусть при $j \in \overline{1,r}$ задано множество

$$\mathbf{K}_j \in \mathcal{P}(\overline{1, N_j - N_{j-1}} \times \overline{1, N_j - N_{j-1}}),$$

для которого $\forall\, \mathbf{K}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_j)$ $\exists z^0 \in \mathbf{K}^0$:

$$pr_1(z^0) \neq pr_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}^0. \tag{12.1}$$

Из (12.1) вытекает, что справедливо $\forall j \in \overline{1,r}$ $\forall z \in \mathbf{K}_j$ $pr_1(z) \neq pr_2(z)$. Введем в рассмотрение при $j \in \overline{1,r}$

$$\mathcal{A}_j \overset{\triangle}{=} \{\alpha \in \mathbb{P}_j \mid \alpha^{-1}(pr_1(z)) < \alpha^{-1}(pr_2(z)) \ \forall z \in \mathbf{K}_j\}, \tag{12.2}$$

где $\mathbb{P}_j \overset{\triangle}{=} (\mathrm{bi})[\overline{1, N_j - N_{j-1}}]$. В силу (12.1) имеем, что

$$\mathcal{A}_j \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_j) \quad \forall j \in \overline{1,r}. \tag{12.3}$$

Мы осуществляем склеивание маршрутов подобно (2.13). В частности, таким образом реализуется склеивание допустимых маршрутов (см. (12.2), (12.3)). Здесь и в дальнейшем ограничиваемся алгоритмическим вариантом изложения на содержательном уровне. Склеивание траекторий осуществляем по аналогии с (6.13); см. предложение 3. При этом для каждого $j \in \overline{1,r}$ определяем траекторию в $\mathcal{M}_j$-задаче по аналогии с (3.1) и (4.4). Таким образом, для каждой частной задачи может быть введено множество ДР.

Функции стоимости совокупной задачи определяем подобно (2.22) с очевидной коррекцией (2.21): $\bar{\mathbf{M}}$ следует определить здесь в виде объединения всех множеств $\mathbf{M}_{N_{r-1}+j}$, $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N_{r-1}}$ (мы следуем соглашению (2.14)). В виде, подобном (2.19), мы получаем аддитивный критерий исходной задачи (очевидную коррекцию обозначений сейчас опускаем). Соответственно, мы можем использовать аналоги задач (2.20), (2.1), (2.25); следует только скорректировать определения множеств ДР. Задачу, аналогичную (2.22), рассматриваем в качестве основной.

Ограничиваясь описанием логики алгоритма, мы сосредоточимся на решении примера листовой резки зонами (см. [5, §1.3.3]).

1) Для каждого $j \in \overline{1,r}$ определяем $\widetilde{\mathbf{K}}_j \overset{\triangle}{=} \{pr_1(z) \colon z \in \mathbf{K}_j\}$ и конструируем множество X_j^{00}, являющееся аналогом (2.28). Для этого предварительно вводим

$$\mathbf{M}_s^{(j)} \overset{\triangle}{=} \mathbf{M}_{N_{j-1}+s} \quad \forall s \in \overline{1, N_j - N_{j-1}}.$$

Затем полагаем при $j \in \overline{1, r-1}$

$$X_j^{00} \overset{\triangle}{=} \bigcup_{s \in \overline{1, N_j - N_{j-1}} \setminus \widetilde{\mathbf{K}}_j} \mathbf{M}_s^{(j)}; \tag{12.4}$$

здесь X_j^{00} (см. (12.4)) — множество всех возможных точек старта в $\mathcal{M}_{j+1}$-задаче.

2) Для $\mathcal{M}_r$-задачи последовательно конструируем существенные списки заданий, слои пространства позиций и слои функции Беллмана, следуя разд. 5. Последний слой функции Беллмана определяет функцию экстремума $\mathcal{M}_r$-задачи, определенную на X^{00}_{r-1}. Данная функция порождает терминальную компоненту критерия $\mathcal{M}_{r-1}$-задачи подобно (6.2), (6.3).

3) Если $j \in \overline{2, r-1}$ и функция экстремума для $\mathcal{M}_{j+1}$-задачи уже построена, то определяем терминальную компоненту критерия $\mathcal{M}_j$-задачи по аналогии с (6.2), (6.3), после чего для $\mathcal{M}_j$-задачи последовательно конструируем существенные списки заданий, слои пространства позиций и слои функции Беллмана. Последний слой данной функции используется для построения терминальной компоненты критерия $\mathcal{M}_{j-1}$-задачи.

4) Проделав процедуру пункта 3) для всех $\mathcal{M}_j$-задач, где $j \in \overline{2, r-1}$, мы в итоге получим функцию экстремума для $\mathcal{M}_2$-задачи, на основе которой сформулируем подобно (6.2), (6.3) терминальную компоненту критерия $\mathcal{M}_1$-задачи. После этого последовательно конструируем существенные списки заданий, слои пространства позиций и слои функции Беллмана для $\mathcal{M}_1$-задачи. Получаем, в частности, функцию экстремума $\mathcal{M}_1$-задачи, определенную на множестве X^0. Определяем точку $x^0 \in X^0$, доставляющую минимум данной функции экстремума.

5) Используя слои функции Беллмана $\mathcal{M}_1$-задачи, по стандартной для ДП процедуре (см., например, [19]) конструируем оптимальное решение $\mathcal{M}_1$-задачи в виде УП маршрут-траектория; в качестве точки старта используем x^0 пункта 4).

6) Если $k \in \overline{1, r-1}$ и уже построены оптимальные решения задач $\mathcal{M}_j$, $j \in \overline{1, k}$, то фиксируем точку финиша на траектории $\mathcal{M}_k$-задачи (каждое из упомянутых решений $\mathcal{M}_j$-задач, $j \in \overline{1, k}$, есть УП маршрут-траектория) в виде второго элемента УП, отвечающей финальному значению траектории (здесь имеется в виду аналог (9.31)). Данную финишную точку принимаем за точку старта в $\mathcal{M}_{k+1}$-задаче, действуя по аналогии с (9.37), (9.38) (см. также пункт 10) разд. 11), после чего по стандартной для ДП процедуре (см. [19]) конструируем оптимальное решение $\mathcal{M}_{k+1}$-задачи, используя ранее построенные слои функции Беллмана.

7) Пусть построены "последовательно оптимальные" решения всех $\mathcal{M}_j$-задач, $j \in \overline{1, r}$ (см. предыдущий пункт). Осуществляем покомпонентное склеивание упомянутых решений: отдельно склеиваем маршруты (аналогично (2.6), (2.7)) и траектории (аналогично (9.42)). Получившаяся УП дополняется точкой x^0, реализуя при этом требуемый маршрутный процесс.

Совсем кратко рассмотрим пример реализации предлагаемого алгоритма 1)–7) для задачи о листовой резки зонами (см. [5, §1.33]).

Вычисления производились на ПЭВМ с процессором Intel i5-11300H с 8Гб оперативной памяти, работающей под управлением Windows 11 (64-bit). Для разработки программы был использован язык C++, компилятор MinGW и интерфейсная библиотека Qt.

В первом примере количество контуров 52, количество деталей 37, количество адресных пар 39. Все контуры разделены на два кластера — первый в левой части листа, второй в правой. В примере использовались тепловые ограничения, описанные в [13]. Именно, область завершения реза имеет длину 150 мм и ширину 50 мм. Пороговое значение для использования штрафа равно 0.3 от площади завершения реза. Полученный результат счета 124.3. В значении отсутствуют штрафы. Следовательно, условия, связанные с тепловым расширением, выполнены. Время счета: 11 мин. 9 сек. На рис. 1 приведен результат работы алгоритма для первого примера.

Во втором примере количество контуров 100, количество деталей 60, количество адресных пар 50. Все контуры разделены на пять кластеров, имеющих вид вертикальных областей, состыкованных в горизонтальном направлении. В примере также использовались тепловые

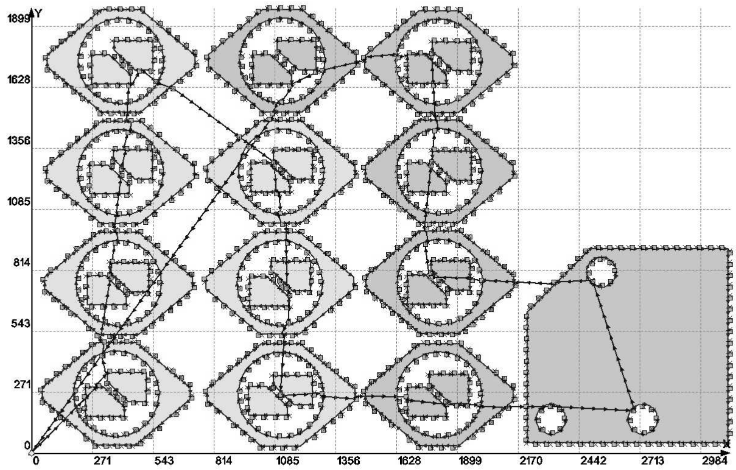

Рис. 1. Результат работы алгоритма для примера с двумя кластерами.

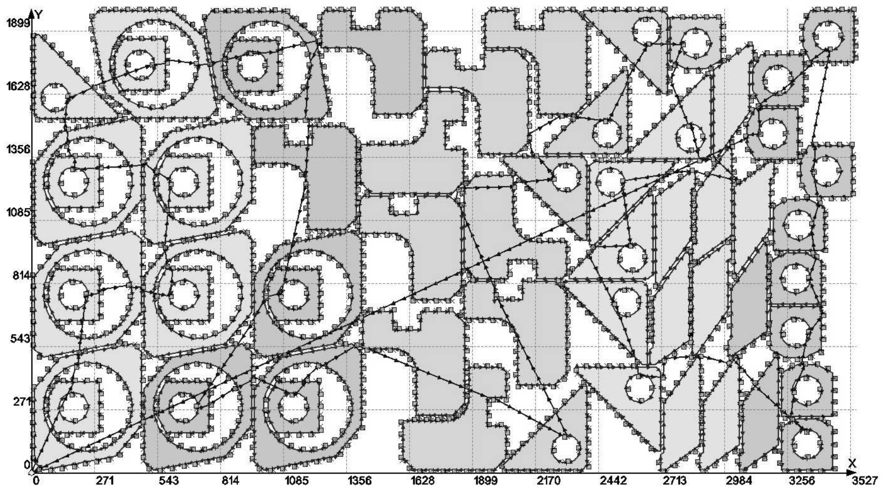

Рис. 2. Результат работы алгоритма для примера с пятью кластерами.

ограничения с теми же параметрами, что и в первом примере. Результат счета 237.1. В значении также отсутствуют штрафы. Время счета: 6 мин. 30 сек. На рис. 2 приведен результат работы алгоритма для второго примера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gutin G., Punnen A.** The traveling salesman problem and its variations. Berlin: Springer, 2002. 850 p.
2. **Cook W. J.** In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 2012. 228 p.
3. **Гимади Э. Х., Хачай М. Ю.** Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2016. 220 с.
4. **Петунин А. А.** О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вест. Уфим. гос. авиационного технич. ун-та. 2009. Т. 13, № 2. С. 280–286.
5. **Петунин А. А., Ченцов А. Г., Ченцов П. А.** Оптимальная маршрутизация инструмента машин фигурной листовой резки с числовым программным управлением. Математические модели и алгоритмы. Екатеринбург: Изд-во УрФУ, 2020. 248 с.
6. **Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К.** Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и мат. методы. 1965. Т. 1, вып. 1. С. 94–107.
7. **Беллман Р.** Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сб. М.: Мир. 1964. Т. 9. С. 219–228.

8. **Хелд М., Карп Р. М.** Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сб. М.: Мир. 1964. Т. 9. С. 202–218.
9. **Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х.** Задача коммивояжера // Автоматика и телемеханика. 1989. Вып. 9. С. 3–33; Вып. 10. С. 3–29; Вып. 11. С. 3–26.
10. **Ченцов А. Г.** Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008. 238 с.
11. **Ченцов А. Г., Ченцов А. А.** Дискретно-непрерывная задача маршрутизации с условиями предшествования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 1. С. 275–292.
12. **Ченцов А. Г., Ченцов П. А., A. G. Chentsov, P. A. Chentsov,** The routing problems with optimization of the starting point: dynamic programming // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2019. Т. 54. С. 102–121.
13. **Ченцов А. Г., Ченцов П. А.** Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов // Автоматика и телемеханика. 2016. Вып. 11. С. 96–117.
14. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
15. **Дьедонне Ж.** Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
16. **Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.** Алгоритмы: построение и анализ. М.:МЦНМО, 2002. 960 с.
17. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
18. **Ченцов А. Г., Ченцов А. А., Сесекин А. Н.** О задаче последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования и функциями стоимости с зависимостью от списка заданий // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 3. С. 219–234.
19. **Ченцов А. Г.** К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вест. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 59–82.

Поступила 4.04.2022
После доработки 26.04.2022
Принята к публикации 30.04.2022

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук
чл.-корр. РАН, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ченцов Павел Александрович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: chentsov.p@mail.ru

REFERENCES

1. Gutin G., Punnen A.P. *The traveling salesman problem and its variations.* Berlin: Springer, 2002, 850 p. ISBN: 0-306-48213-4 .
2. Cook W.J. *In pursuit of the traveling salesman: Mathematics at the limits of computation.* Princeton: Princeton University Press, 2012, 228 p. ISBN: 0691152705 .
3. Gimadi E.Kh., Khachai M.Yu. *Ekstremal'nye zadachi na mnozhestvakh perestanovok* [Extremal problems on sets of permutations]. Yekaterinburg: UMC UPI, 2016, 220 p. ISBN: 978-5-8295-0497-7 .
4. Petunin A.A. On some strategies of forming tool routes at developing the control programs for the thermal machine cutting. *Vestn. UGATU, Ser. Upravl., Vychisl. Tekhn., Informat.*, 2009, vol. 13, no. 2, pp. 280–286 (in Russian).

5. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. *Optimal'naya marshrutizatsiya instrumenta mashin figurnoi listovoi rezki s chislovym programmnym upravleniem: Matematicheskie modeli i algoritmy* [Optimal tool routing of figured sheet cutting machines with computer numerical control: Mathematical models and algorithms]. Yekaterinburg: UrFU Publ., 2020. 248 p. ISBN: 978-5-7996-3016-4 .
6. Little L.D.C., Murty K.G., Sweeney D.W., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem. *Operations Research*, 1963, vol. 11, no. 6, pp. 972–989. doi: 10.1287/opre.11.6.972 .
7. Bellman R. Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem. *J. of the ACM (JACM)*, 1962, vol. 9, no. 1, pp. 61–63. doi: 10.1145/321105.321111 .
8. Held M., Karp R.M. A dynamic programming approach to sequencing problems. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 1962, vol. 10, no. 1, pp. 196–210. doi: 10.1137/0110015 .
9. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. *Autom. Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 9, pp. 1147–1173; no. 10, pp. 1303–1324; no. 11, pp. 1459–1479.
10. Chentsov A.G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadanii: voprosy teorii* [Extreme routing and distribution tasks: theory questions]. Moscow; Izhevsk: R&C Dynamics Publ., 2008, 238 p. ISBN: 978-5-93972-654-2 .
11. Chentsov A.G., Chentsov A.A. A discrete-continuous routing problem with precedence conditions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, vol. 300, suppl. 1, pp. 56–71. doi: 10.1134/S0081543818020074 .
12. Chentsov A.G., Chentsov P.A. The routing problems with optimization of the starting point: dynamic programming. *Izv. IMI UdGU*, 2019, vol. 54, pp. 102–121 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2019-54-08 .
13. Chentsov A.G., Chentsov P.A. Routing under constraints: problem of visit to megalopolises. *Autom. Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 11, pp. 1957–1974. doi: 10.1134/S0005117916110060 .
14. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*. Warszawa: PWN — Polish Sci. Publ., 1968, 417 p. ISBN: 9780444534170 . Translated to Russian under the title *Teoriya mnozhestv*. Moscow: Mir Publ., 1970, 416 p.
15. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis*. NY: Acad. Press Inc., 1960, 361 p. Translated to Russian under the title *Osnovy sovremennogo analiza*, Moscow: Mir Publ., 1964, 430 p.
16. Cormen T., Leiserson C., Rivest R. *Introduction to algorithms*. NY: McGraw-Hill, 1990, 1028 p. ISBN: 0-262-53091-0 . Translated to Russian under the title *Algoritmy: postroenie i analiz*, Moscow: MTsNMO Publ., 2002. 960 p.
17. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*. NY: Acad. Press, 1972. 624 p. ISBN: 9781483259192 . Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami*, Moscow: Nauka Publ., 1977. 624 p.
18. Chentsov A.G., Chentsov A.A., Sesekin A.N. On the problem of sequential traversal of megalopolises with precedence conditions and cost functions depending on a list of tasks. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 219–234. (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-219-234 .
19. Chentsov A.G. To question of routing of works complexes. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2013, no. 1, pp. 59–82 (in Russian).

Received April 4, 2022
Revised April 26, 2022
Accepted April 30, 2022

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-08-00873).

Alexander Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia,
e-mail: chentsov@imm.uran.ru .

Pavel Alexandrovich Chentsov, Cand. Sci. (Phys.-Math.) Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: chentsov.p@mail.ru .

Cite this article as: A. G. Chentsov, P. A. Chentsov. An extremal two-stage routing problem and procedures based on dynamic programming, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 215–248 .