ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 2 2022

УДК 517.968.48

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МОНОТОННЫМ ОПЕРАТОРОМ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА[1]

Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян

В работе исследуется система нелинейных интегральных уравнений на положительной полупрямой с некомпактным монотонным матричным интегральным оператором гаммерштейновского типа. Для конкретных представлений матричных ядер и нелинейностей, входящих в систему уравнений, рассматриваемый класс векторных нелинейных интегральных уравнений имеет приложения в различных областях математической физики. В частности такие системы встречаются в теории переноса излучения в неоднородных средах, в кинетической теории газов, в математической биологии. Доказывается существование нетривиального покомпонентно неотрицательного и ограниченного решения. В одном важном частном случае изучается также интегральная асимптотика построенного решения. В конце статьи приводятся конкретные примеры нелинейностей и матричных ядер, удовлетворяющих условиям сформулированных теорем.

Ключевые слова: монотонность, ограниченное решение, итерации, выпуклость, нелинейность, сходимость.

Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan. On the solvability of a system of nonlinear integral equations with a monotone Hammerstein type operator.

A system of nonlinear integral equations with a noncompact monotone Hammerstein type matrix integral operator is studied on the positive half-line. For specific representations of matrix kernels and nonlinearities involved in the system, the class of vector nonlinear integral equations under consideration has applications in various areas of mathematical physics. In particular, such systems arise in the theory of radiative transfer in inhomogeneous media, in the kinetic theory of gases, and in mathematical biology. The existence of a nontrivial componentwise nonnegative and bounded solution is proved. In one important particular case, the integral asymptotic behavior of the constructed solution is also studied. At the end of the paper, specific examples of nonlinearities and matrix kernels that satisfy the conditions of the formulated theorems are given.

Keywords: monotonicity, bounded solution, iterations, convexity, nonlinearity, convergence.

MSC: 45M20

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-201-214

1. Введение

Рассмотрим следующую систему нелинейных интегральных уравнений на положительной полупрямой:

$$F_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty W_{ij}(x,t) G_j(F_j(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ := [0, +\infty), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{1.1}$$

относительно искомой измеримой вектор-функции $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))^T$ (T — знак транспонирования). В системе (1.1) матричное ядро $W(x,t) = (W_{ij}(x,t))_{i,j=1}^{n\times n}$ удовлетворяет следующим условиям:

a) $W_{ij}(x,t) > 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} \int_0^\infty W_{ij}(x,t)dt := a_{ij} < +\infty, \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21T-1A047.

b) $r(A) = 1, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$, где $r(A)$ — спектральный радиус матрицы A.

Нелинейности $\{G_j(u)\}_{j=1}^{n}$ — определенные на множестве $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ измеримые и вещественнозначные функции, обладающие определенными ниже свойствами.

Из условий a) и b) согласно теореме Перрона существует вектор $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)^T$ с положительными координатами η_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, такой, что $A\eta = \eta$ (см. [1]).

Последнее равенство запишем в раскрытом виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j = \eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Предположим, что нелинейности $\{G_j(u)\}_{j=1}^{n}$ обладают следующими свойствами:

1) $G_j(0) = 0$, существуют числа $\eta_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющие соотношению (1.2) такие, что $G_j(\eta_j) = \eta_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$;

2) $G_j \in C[0, \eta_j]$ и $G_j(u)$ монотонно возрастает по u на отрезке $[0, \eta_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$;

3) $G_j(u) \geq u$, $u \in [0, \eta_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

При конкретных представлениях ядер $\{W_{ij}(x,t)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ и нелинейностей $\{G_j(u)\}_{j=1}^{n}$ система (1.1) возникает в различных направлениях естествознания. В частности, когда матричное ядро $W(x,t)$ зависит от разности своих аргументов или мажорируется матричным разностным ядром, спектральный радиус интеграла которого равен единице, при определенных представлениях $G_j(u)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, системы вида (1.1) встречаются в теории переноса излучения в неоднородных средах, в кинетической теории газов, в математической теории распространения эпидемии, в математической экономике (см. [2–7]).

Следует отметить, что в случае, когда $W_{ij}(x,t) = W_{ij}(x-t)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, система (1.1), при условиях a), b) и 1)–3), подробно исследована в работах [8–10].

В настоящей работе мы займемся изучением и решением системы (1.1) при достаточно общих ограничениях на $\{W_{ij}(x,t)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ и $\{G_j(u)\}_{j=1}^{n}$. Будут доказаны конструктивные теоремы существования нетривиальных неотрицательных и ограниченных решений. При определенных представлениях матричных ядер $W(x,t)$ мы также исследуем интегральную асимптотику построенного решения. В одном важном частном случае, когда $n = 1$, покажем, что интегральное уравнение (1.1) может обладать однопараметрическим семейством неотрицательных и ограниченных решений. В конце приведем конкретные примеры $\{W_{ij}(x,t)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ и $\{G_j(u)\}_{j=1}^{n}$, удовлетворяющие всем условиям доказанных теорем.

2. Обозначения и вспомогательные факты

Рассмотрим вспомогательную систему нелинейных интегральных уравнений со стохастическим ядром на полуоси:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(x) \int_0^\infty K_{ij}(y) G_j(f_j(\rho(x,y)))dy, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.1}$$

относительно искомой неотрицательной и измеримой вектор-функции $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^T$. В системе (2.1) функции $\{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^{n\times n}$ и $\{K_{ij}\}_{i,j=1}^{n\times n}$ удовлетворяют следующим ограничениям:

A) $0 \leq \lambda_{ij}(x) \leq 1$, $\lambda_{ij}(x) \not\equiv 1$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\lambda_{ij}(x) \uparrow$ по x на $\mathbb{R}^+$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

B) $x(1 - \lambda_{ij}(x)) \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

C) $\{K_{ij}(y)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ — измеримые функции на $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ и $K_{ij}(y)=K_{ji}(y)>0,\ y\in\mathbb{R}$;

D) $K_{ij}\in L_1(\mathbb{R}^+)\cap M(\mathbb{R}^+),\ \displaystyle\int_0^\infty K_{ij}(y)dy=a_{ij},\ i,j=1,2,\dots,n.$

Функция $\rho(x,y)$ определена на множестве $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, принимает неотрицательные значения и удовлетворяет следующим условиям:

I) $\rho\in C(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)$, причем при каждом фиксированном $x\in\mathbb{R}^+$ функция $\rho(x,y)\uparrow$ по y на множестве $\mathbb{R}^+$ и при каждом фиксированном $y\in\mathbb{R}^+$ функция $\rho(x,y)\uparrow$ по x на $\mathbb{R}^+$;

II) $\rho(x,0)\geq x,\ x\in\mathbb{R}^+$, и существует число $\delta>0$ такое, что $\rho(x,\delta)\geq x+\delta,\ x\in\mathbb{R}^+$.

Справедлива

Теорема 1. *При условиях* 1)–3), A)–D) *и* I), II) *система нелинейных интегральных уравнений* (2.1) *обладает нетривиальным покомпонентно неотрицательным и ограниченным решением* $f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))^T$, *причем* $f_i(x)\leq\eta_i,\ x\in\mathbb{R}^+,\ \eta_i-f_i\in L_1(\mathbb{R}^+),\ i=1,2,\dots,n.$

Доказательству сформулированной теоремы предпошлем следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* C), D), *и* I), II). *Тогда система линейных неоднородных интегральных уравнений*

$$\psi_i(x)=g_i(x)+\sum_{j=1}^n\int\limits_0^\infty K_{ij}(y)\psi_j(\rho(x,y))dy,\quad x\in\mathbb{R}^+,\quad i=1,2,\dots,n, \tag{2.2}$$

со свободным членом $g(x)=(g_1(x),\dots,g_n(x))^T$, *обладающим свойствами*

$$g_i(x)\geq 0,\quad g_i(x)\not\equiv 0,\quad x\in\mathbb{R}^+,\quad g_i(x)\downarrow\ \text{по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, \tag{2.3}$$

$$m_q(g_i):=\int\limits_0^\infty x^q g_i(x)dx<+\infty,\quad q=0,1,\quad i=1,2,\dots,n, \tag{2.4}$$

имеет покомпонентно неотрицательное монотонно невозрастающее и суммируемое на $\mathbb{R}^+$ *решение. Более того, если* $g_i\in M(\mathbb{R}^+),\ i=1,2,\dots,n,$ *и* $\rho(0,y)\geq y,\ y\in\mathbb{R}^+$, *то* $\psi_i\in M(\mathbb{R}^+),\ i=1,2,\dots,n.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для системы (2.2) рассмотрим следующие простые итерации:

$$\begin{gathered}\psi_i^{(p+1)}(x)=g_i(x)+\sum_{j=1}^n\int\limits_0^\infty K_{ij}(y)\psi_j^{(p)}(\rho(x,y))dy,\\ \psi_i^{(0)}(x)=g_i(x),\quad p=0,1,2,\dots,\quad x\in\mathbb{R}^+,\quad i=1,2,\dots,n.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Исходя из условий (2.3) и C) индукцией легко можно проверить, что

$$\psi_i^{(p)}(x)\uparrow\ \text{по } p,\quad x\in\mathbb{R}^+,\quad i=1,2,\dots,n. \tag{2.6}$$

Индукцией по p докажем, что если $g_i(x)\downarrow$ по x на $\mathbb{R}^+,\ i=1,2,\dots,n$, то

$$\psi_i^{(p)}(x)\downarrow\ \text{по } x \text{ на } \mathbb{R}^+,\quad p=0,1,2,\dots,\quad i=1,2,\dots,n. \tag{2.7}$$

Действительно, монотонность нулевого приближения очевидна. Предположим, что $\psi_i^{(p)}(x)\downarrow$ по x на $\mathbb{R}^+,\ i=1,2,\dots,n$, при некотором натуральном p. Пусть $x_1,x_2\in\mathbb{R}^+,\ x_1>x_2$ —

произвольные числа. Тогда, учитывая монотонность функций $\{g_i(x)\}_{i=1}^n$, условий I), C) и индукционное предположение, из (2.5) будем иметь

$$\psi_i^{(p+1)}(x_1) = g_i(x_1) + \sum_{j=1}^n \int_0^\infty K_{ij}(y)\psi_j^{(p)}(\rho(x_1,y))dy$$
$$\leq g_i(x_2) + \sum_{j=1}^n \int_0^\infty K_{ij}(y)\psi_j^{(p)}(\rho(x_2,y))dy = \psi_i^{(p+1)}(x_2).$$

Следовательно, утверждение (2.7) доказано.

Используя условия (2.3), II) и A)–C), с учетом (2.7) индукцией можно также доказать, что

$$\psi_i^{(p)} \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad p = 0,1,2,\dots,\ i = 1,2,\dots,n. \tag{2.8}$$

Займемся теперь доказательством равномерной оценки сверху для интегралов $\int_0^\infty \psi_i^{(p)}(x)dx$, $p = 0,1,2,\dots$, $i = 1,2,\dots,n$, т. е. покажем, что существует число $C > 0$ такое, что для всех $p = 0,1,2,\dots$ и $i = 1,2,\dots,n$ имеет место неравенство

$$\int_0^\infty \psi_i^{(p)}(x)dx \leq C. \tag{2.9}$$

Пусть $l \geq 0$ — произвольное число. Проинтегрируем обе части (2.5) по x в пределах от $l \geq 0$ до $+\infty$, затем, умножая правые и левые части полученного равенства на η_i, просуммируем по всем $i = 1,2,\dots,n$. Тогда, учитывая условия (2.3), (2.4), $C), D), I), II)$, соотношение (1.2) и утверждения (2.6), (2.7), в силу теоремы Фубини (см. [11]) будем иметь

$$\sum_{i=1}^n \eta_i \int_l^\infty \psi_i^{(p+1)}(x)dx = \sum_{i=1}^n \eta_i \int_l^\infty g_i(x)dx + \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n \int_l^\infty \int_0^\infty K_{ij}(y)\psi_j^{(p)}(\rho(x,y))dydx$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \eta_i \int_l^\infty g_i(x)dx + \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n \int_0^\infty K_{ij}(y) \int_l^\infty \psi_j^{(p+1)}(\rho(x,y))dxdy$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \eta_i \int_l^\infty g_i(x)dx + \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n \int_0^\delta K_{ij}(y) \int_l^\infty \psi_j^{(p+1)}(\rho(x,0))dxdy$$

$$+ \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n \int_\delta^\infty K_{ij}(y) \int_l^\infty \psi_j^{(p+1)}(\rho(x,\delta))dxdy$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \eta_i \int_l^\infty g_i(x)dx + \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n \int_0^\delta K_{ij}(y) \int_l^\infty \psi_j^{(p+1)}(x)dxdy + \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n \int_\delta^\infty K_{ij}(y) \int_l^\infty \psi_j^{(p+1)}(x+\delta)dxdy$$

$$= \sum_{i=1}^n \eta_i \int_l^\infty g_i(x)dx + \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n \int_0^\delta K_{ij}(y)dy \int_l^\infty \psi_j^{(p+1)}(x)dx + \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n \int_\delta^\infty K_{ij}(y)dy \int_{l+\delta}^\infty \psi_j^{(p+1)}(x)dx$$

$$= \sum_{i=1}^n \eta_i \int_l^\infty g_i(x)dx + \sum_{j=1}^n \int_l^\infty \psi_j^{(p+1)}(x)dx \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^\delta K_{ji}(y)dy + \sum_{j=1}^n \int_{l+\delta}^\infty \psi_j^{(p+1)}(x)dx \sum_{i=1}^n \eta_i \int_\delta^\infty K_{ji}(y)dy$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{l}^{\infty} g_i(x)dx + \sum_{j=1}^{n} \int_{l}^{\infty} \psi_j^{(p+1)}(x)dx \Big(\sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{0}^{\infty} K_{ji}(y)dy - \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{\delta}^{\infty} K_{ji}(y)dy \Big)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_{l+\delta}^{\infty} \psi_j^{(p+1)}(x)dx \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{\delta}^{\infty} K_{ji}(y)dy = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{l}^{\infty} g_i(x)dx + \sum_{j=1}^{n} \eta_j \int_{l}^{\infty} \psi_j^{(p+1)}(x)dx$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \int_{l}^{l+\delta} \psi_j^{(p+1)}(x)dx \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{\delta}^{\infty} K_{ij}(y)dy,$$

откуда получаем, что

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{l}^{l+\delta} \psi_j^{(p+1)}(x)dx \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{\delta}^{\infty} K_{ij}(y)dy \le \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{l}^{\infty} g_i(x)dx. \tag{2.10}$$

Учитывая (2.7), из (2.10) выводим

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_j^{(p+1)}(l+\delta)\delta \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{\delta}^{\infty} K_{ij}(y)dy \le \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{l}^{\infty} g_i(x)dx. \tag{2.11}$$

Обозначим

$$\mathcal{B} := \min_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{\delta}^{\infty} K_{ij}(y)dy. \tag{2.12}$$

Тогда из (2.11) следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_j^{(p+1)}(l+\delta) \le \frac{1}{\mathcal{B}\delta} \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{l}^{\infty} g_i(x)dx. \tag{2.13}$$

В силу неотрицательности слагаемых левой части неравенства (2.13), в частности, получаем

$$0 \le \psi_i^{(p+1)}(l+\delta) \le \frac{1}{\mathcal{B}\delta} \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{l}^{\infty} g_i(x)dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.14}$$

Снова используя теорему Фубини и условие B), из (2.14) имеем

$$0 \le \int_{0}^{\infty} \psi_i^{(p+1)}(l+\delta)dl \le \frac{1}{\mathcal{B}\delta} \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{0}^{\infty} \int_{l}^{\infty} g_i(x)dxdl$$

$$= \frac{1}{\mathcal{B}\delta} \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{0}^{\infty} g_i(x) \int_{0}^{x} dldx = \frac{1}{\mathcal{B}\delta} \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{0}^{\infty} xg_i(x)dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad p = 0, 1, 2, \ldots,$$

или

$$\int_{\delta}^{\infty} \psi_i^{(p+1)}(x)dx \le \frac{1}{\mathcal{B}\delta} \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{0}^{\infty} xg_i(x)dx < +\infty, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad p = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.15}$$

Теперь проинтегрируем обе части (2.5) по x в пределах от 0 до δ, затем умножим обе части полученного равенства на η_i и просуммируем по всем $i = 1, 2, \ldots, n$. Здесь снова, используя (2.3), (2.4), условия C), D), I), II), соотношение (1.2), утверждения (2.6), (2.7), а также доказанное неравенство (2.15), в силу теоремы Фубини имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_0^{\delta}\psi_i^{(p+1)}(x)dx\le\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_0^{\delta}g_i(x)dx+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^{\delta}\int\limits_0^{\infty}K_{ij}(y)\psi_j^{(p+1)}(\rho(x,y))dydx$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_0^{\infty}g_i(x)dx+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^{\delta}\int\limits_0^{\delta}K_{ij}(y)\psi_j^{(p+1)}(\rho(x,0))dydx$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^{\delta}\int\limits_{\delta}^{\infty}K_{ij}(y)\psi_j^{(p+1)}(\rho(x,\delta))dydx\le\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_0^{\infty}g_i(x)dx$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^{\delta}K_{ij}(y)dy\int\limits_0^{\delta}\psi_j^{(p+1)}(x)dx+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\delta}^{\infty}K_{ij}(y)dy\int\limits_{\delta}^{2\delta}\psi_j^{(p+1)}(x)dx$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_0^{\infty}g_i(x)dx+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^{\delta}K_{ji}(y)dy\int\limits_0^{\delta}\psi_j^{(p+1)}(x)dx$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\delta}^{\infty}K_{ji}(y)dy\int\limits_{\delta}^{\infty}\psi_j^{(p+1)}(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_0^{\infty}g_i(x)dx$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^{\delta}\psi_j^{(p+1)}(x)dx\sum_{i=1}^{n}\left(\eta_i\int\limits_0^{\infty}K_{ji}(y)dy-\eta_i\int\limits_{\delta}^{\infty}K_{ji}(y)dy\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\delta}^{\infty}K_{ji}(y)dy\int\limits_{\delta}^{\infty}\psi_j^{(p+1)}(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_0^{\infty}g_i(x)dx+\sum_{j=1}^{n}\eta_j\int\limits_0^{\infty}\psi_j^{(p+1)}(x)dx$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^{\delta}\psi_j^{(p+1)}(x)dx\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_{\delta}^{\infty}K_{ij}(y)dy+\frac{1}{\mathcal{B}\delta}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\delta}^{\infty}K_{ij}(y)dy\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_0^{\infty}xg_i(x)dx;$$

отсюда получаем, что

$$\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^{\delta}\psi_j^{(p+1)}(x)dx\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_{\delta}^{\infty}K_{ij}(y)dy\le\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_0^{\infty}g_i(x)dx$$

$$+\frac{1}{\mathcal{B}\delta}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\delta}^{\infty}K_{ij}(y)dy\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_0^{\infty}xg_i(x)dx,\quad p=0,1,2,\ldots.\tag{2.16}$$

Учитывая обозначение (2.12), из (2.16) будем иметь

$$\int\limits_0^{\delta}\psi_i^{(p+1)}(x)dx$$

$$\le\frac{1}{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_0^{\infty}g_i(x)dx+\frac{1}{\mathcal{B}\delta}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\delta}^{\infty}K_{ij}(y)dy\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_0^{\infty}xg_i(x)dx\right):=c_0\tag{2.17}$$

Складывая неравенства (2.15) и (2.17), окончательно получаем

$$\int\limits_0^\infty \psi_i^{(p+1)}(x)dx \le \frac{1}{\mathcal{B}\delta}\sum_{i=1}^n \eta_i \int\limits_0^\infty x g_i(x)dx + c_0 := C < +\infty, \tag{2.18}$$
$$i = 1, 2, \dots, n, \quad p = 0, 1, 2, \dots .$$

Следовательно, учитывая (2.6)–(2.8), (2.18) по теореме Б. Леви (см. [11]) можно утверждать, что последовательность суммируемых монотонно невозрастающих вектор-функций

$$\{\psi^{(p)}(x)\}_{p=0}^\infty, \quad \psi^{(p)}(x) := (\psi_1^{(p)}(x), \dots, \psi_n^{(p)}(x))^T, \quad p = 0, 1, 2, \dots ,$$

имеет предел почти всюду на $\mathbb{R}^+$, когда $p \to +\infty$: $\lim\limits_{p\to+\infty} \psi_i^{(p)}(x) = \psi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$; при этом $\psi_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \dots, n$, и имеет место оценка

$$\int\limits_0^\infty \psi_i(x)dx \le C, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{2.19}$$

а $\psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_n(x))^T$ удовлетворяет системе линейных интегральных уравнений (2.2). Из (2.7) следует также, что $\psi_i(x) \downarrow$ по x на $\mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, \dots, n$. Заметим, если $g_i \in M(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \dots, n$, то $\psi_i \in M(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Действительно, учитывая условия D), I), II) и оценку (2.19), из (2.2) будем иметь

$$0 \le \psi_i(x) \le \sup_{x\in\mathbb{R}^+}(g_i(x)) + \sum_{j=1}^n \sup_{y\in\mathbb{R}^+}(K_{ij}(y)) \int\limits_0^\infty \psi_j(\rho(x,y))dy$$

$$\le \max_{1\le i\le n}\big(\sup_{x\in\mathbb{R}^+}(g_i(x))\big) + \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n \sup_{y\in\mathbb{R}^+}(K_{ij}(y)) \int\limits_0^\infty \psi_j(\rho(0,y))dy$$

$$\le \max_{1\le i\le n}\big(\sup_{x\in\mathbb{R}^+}(g_i(x))\big) + \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n \sup_{y\in\mathbb{R}^+}(K_{ij}(y)) \int\limits_0^\infty \psi_j(y)dy$$

$$\le \max_{1\le i\le n}\big(\sup_{x\in\mathbb{R}^+}(g_i(x))\big) + C\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n \sup_{y\in\mathbb{R}^+}(K_{ij}(y)) := \Lambda < +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Таким образом, лемма 1 полностью доказана. □

Справедлива также следующая

Лемма 2. *При условиях* A)–D) *и* I), II) *система однородных интегральных уравнений*

$$\Phi_i(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(x) \int\limits_0^\infty K_{ij}(y)\Phi_j(\rho(x,y))dy, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{2.20}$$

обладает неотрицательным нетривиальным и ограниченным решением $\{\Phi_i(x)\}_{i=1}^n$, *причем* $\Phi_i(x) \le \eta_i$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\eta_i - \Phi_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим следующую линейную неоднородную систему интегральных уравнений на полуоси:

$$\tilde{\psi}_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j(1 - \lambda_{ij}(x)) + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(x) \int\limits_0^\infty K_{ij}(y)\tilde{\psi}_j(\rho(x,y))dy, \tag{2.21}$$
$$x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

относительно искомой вектор-функции $\tilde{\psi}(x) = (\tilde{\psi}_1(x), \ldots, \tilde{\psi}_n(x))^T$.

Несложно убедиться, что неподвижный вектор Перрона $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)^T$ является тривиальным решением для системы (2.21). Последнее сразу следует из соотношения (1.2). С другой стороны, ниже убедимся, что система (2.21), кроме такого тривиального решения, обладает также суммируемым и ограниченным на $\mathbb{R}^+$ решением $\tilde{\psi}(x) = (\tilde{\psi}_1(x), \ldots, \tilde{\psi}_n(x))^T$, причем $\tilde{\psi}_j(x) \le \eta_j$, $x \in \mathbb{R}^+$, $j = 1, 2, \ldots, n$. С этой целью для (2.21) рассмотрим следующие последовательные приближения:

$$\begin{gathered}\tilde{\psi}_i^{(p+1)}(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j(1 - \lambda_{ij}(x)) + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(x) \int\limits_0^\infty K_{ij}(y)\tilde{\psi}_j^{(p)}(\rho(x, y))dy,\\ \tilde{\psi}_i^{(0)}(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j(1 - \lambda_{ij}(x)), \quad p = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n.\end{gathered} \tag{2.22}$$

Во-первых, заметим, что в силу условий A) и B) функции

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j(1 - \lambda_{ij}(x)), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.23}$$

удовлетворяют условиям (2.3) и (2.4). Более того, $g_i \in M(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Следовательно, согласно лемме 1 система линейных интегральных уравнений (2.2) со свободным членом вида (2.23) обладает покомпонентно неотрицательным монотонно невозрастающим суммируемым и ограниченным на $\mathbb{R}^+$ решением $\psi(x) = (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x))^T$.

Методом математической индукции с использованием условий A)–D) легко можно доказать следующие факты для последовательности вектор-функций $\tilde{\psi}^{(p)}(x) = (\tilde{\psi}_1^{(p)}(x), \ldots, \tilde{\psi}_n^{(p)}(x))^T$, $p = 0, 1, 2, \ldots$:

п$_1$) $\tilde{\psi}_i^{(p)}(x) \uparrow$ по p, $x \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

п$_2$) $\tilde{\psi}_i^{(p)}(x) \le \eta_i$, $x \in \mathbb{R}^+$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

п$_3$) $\tilde{\psi}_i^{(p)}(x) \le \psi_i(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Значит, последовательность вектор-функций $\{\tilde{\psi}^{(p)}(x)\}_{p=0}^\infty$ имеет поточечный предел, когда $p \to \infty$: $\lim\limits_{p\to\infty} \tilde{\psi}^{(p)}(x) = \tilde{\psi}(x) = (\tilde{\psi}_1(x), \ldots, \tilde{\psi}_n(x))^T$, причем предельная вектор-функция $\tilde{\psi}(x)$ согласно теореме Б. Леви удовлетворяет системе (2.21). Из п$_1$)–п$_3$) следует также, что имеют место двойные оценки:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j(1 - \lambda_{ij}(x)) \le \tilde{\psi}_i(x) \le \min\{\eta_i, \psi_i(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.24}$$

Так как $\psi_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то из (2.24) вытекает, что $\tilde{\psi}_i(x) \not\equiv \eta_i$, $x \in \mathbb{R}^+$, для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Очевидно, что функции $\Phi_i(x) = \eta_i - \tilde{\psi}_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x \in \mathbb{R}^+$, удовлетворяют системе линейных однородных интегральных уравнений (2.20). В силу (2.24) получаем, что

$$\begin{gathered}0 \le \eta_i - \min\{\eta_i, \psi_i(x)\} \le \Phi_i(x) \le \eta_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j(1 - \lambda_{ij}(x)) \le \eta_i,\\ x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n.\end{gathered} \tag{2.25}$$

Таким образом лемма 2 доказана. □

З а м е ч а н и е 1. В ходе доказательства леммы 2 для решения однородной системы (2.20) мы получили также дополнительную оценку (2.25).

З а м е ч а н и е 2. Доказанная лемма 1 обобщает и дополняет лемму 3.5 из работы [12].

На рис. 1 заштрихована предварительная зона нахождения построенного решения однородной системы (2.20).

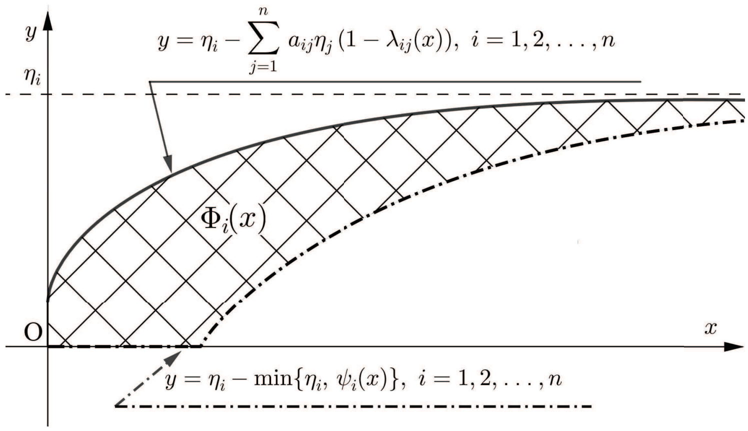

Рис. 1.

Перейдем теперь доказательству теоремы 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Рассмотрим для системы нелинейных интегральных уравнений (2.1) следующие итерации:

$$\begin{gathered} f_i^{(p+1)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(x) \int\limits_0^\infty K_{ij}(y) G_j(f_j^{(p)}(\rho(x,y)))dy, \\ f_i^{(0)}(x) \equiv \eta_i, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{2.26}$$

Используя условия $1) - 3)$, $A) - D)$ и доказанную лемму 2, индукцией по p несложно проверить справедливость следующих утверждений:

c$_1$) $f_i^{(p)}(x)$ — измеримые функции на $\mathbb{R}^+,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ p = 0, 1, 2, \ldots$;

c$_2$) $f_i^{(p)}(x) \downarrow$ по $p,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ x \in \mathbb{R}^+$;

c$_3$) $f_i^{(p)}(x) \geq \Phi_i(x),\ p = 0, 1, 2, \ldots,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ x \in \mathbb{R}^+$.

Следовательно, из $c_1) - c_3)$ получаем поточечную сходимость последовательности измеримых вектор-функций $f^{(p)}(x) = (f_1^{(p)}(x), \ldots, f_n^{(p)}(x))^T,\ p = 0, 1, 2, \ldots :\ \lim\limits_{p\to\infty} f_i^{(p)}(x) = f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, причем

$$\eta_i - \min\{\eta_i, \psi_i(x)\} \leq \Phi_i(x) \leq f_i(x) \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j\lambda_{ij}(x) \leq \eta_i, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.27}$$

Снова используя теорему Б. Леви, заключаем, что вектор-функция $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^T$ удовлетворяет системе (2.1). Из (2.25), (2.27) и леммы 1 приходим к включениям $\eta_i - f_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Таким образом, теорема 1 полностью доказана. □

3. Основной результат. Примеры

Перейдем теперь к изучению системы нелинейных интегральных уравнений (1.1). Кроме основных условий a), b) и 1)–3) здесь мы будем предполагать выполнение следующих ограничений:

c) существуют число $\varepsilon \in (0,1)$ и непрерывная монотонно возрастающая на $\mathbb{R}^+$ функция $\alpha(x)$ со свойством $\alpha(x) \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^+$, такие, что

$$W_{ij}(x,t) \geq \varepsilon \frac{\lambda_{ij}(x)}{\alpha(x)} K_{ij}\left(\frac{t-x}{\alpha(x)}\right)\theta(t-x), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad i,j=1,2,\ldots,n, \tag{3.1}$$

где функции $\{\lambda_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$, $\{K_{ij}(y)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ обладают свойствами A)–D), а $\theta(x)$ — известная функция Хевисайда,

4) существуют числа $\delta_i \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$, $i=1,2,\ldots,n$, такие, что функциональные уравнения $G_i(u) = \delta_i u$ имеют положительные решения $\xi_i < \eta_i$, $i=1,2,\ldots,n$ (см. рис. 2).

Ниже с использованием теоремы 1 мы докажем разрешимость системы (1.1) в классе нетривиальных неотрицательных измеримых и ограниченных на множестве $\mathbb{R}^+$ функций.

Справедлива

Теорема 2. *При условиях* a)–c) *и* 1)–4) *система нелинейных интегральных уравнений* (1.1) *обладает нетривиальным покомпонентно неотрицательным измеримым и ограниченным решением* $F(x) = (F_1(x),\ldots,F_n(x))^T$. *Более того, имеют место оценки*

$$\min_{1\leq i\leq n}\left(\frac{\xi_i}{\eta_i}\right) f_j(x) \leq F_j(x) \leq \eta_j, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad j=1,2,\ldots,n, \tag{3.2}$$

где $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$ *— решение системы* (2.1) *с* $\rho(x,y) = \alpha(x)y + x$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим для системы (1.1) следующие итерации:

$$\begin{gathered} F_i^{(p+1)}(x) = \sum_{j=1}^n \int_0^\infty W_{ij}(x,t) G_j(F_j^{(p)}(t))dt, \\ F_i^{(0)}(x) \equiv \eta_i, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i=1,2,\ldots,n, \quad p=0,1,2\ldots . \end{gathered} \tag{3.3}$$

Используя условия a), b) и 1), 2), индукцией легко можно убедиться, что

$$F_i^{(p)}(x) \downarrow \quad \text{по} \quad p, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{3.4}$$

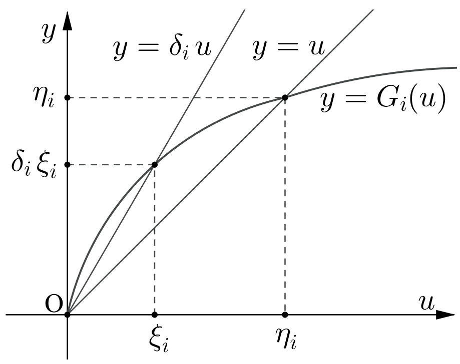

Рис. 2.

Докажем, что имеет место следующая оценка снизу:

$$F_j^{(p)}(x) \geq \min_{1\leq i\leq n}\Big(\frac{\xi_i}{\eta_i}\Big) f_j(x), \quad p = 0, 1, 2\ldots, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.5}$$

Действительно, в случае $p = 0$ неравенство (3.5) немедленно следует из определения нулевого приближения с учетом цепочки неравенств

$$\eta_i > \xi_i \geq \frac{\xi_i}{\eta_i} f_i(x) \geq \min_{1\leq j\leq n}\Big(\frac{\xi_j}{\eta_j}\Big) f_i(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Предположим, что (3.5) имеют место при некотором $p \in \mathbb{N}$. Рассмотрим следующий частный пример функции $\rho(x, y)$:

$$\rho(x, y) = \alpha(x)y + x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Тогда с помощью простой замены $t = \alpha(x)y + x$ система (2.1) примет вид

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{ij}(x)}{\alpha(x)} \int_x^\infty K_{ij}\Big(\frac{t-x}{\alpha(x)}\Big) G_j(f_j(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Из теоремы 1 следует существование нетривиального покомпонентно неотрицательного и ограниченного решения системы (3.6), причем справедливы оценки (2.27). Учитывая условия 2)–4), c) и a) в силу (3.6), из (3.3) будем иметь

$$F_i^{(p+1)}(x) \geq \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty W_{ij}(x,t) G_j\Big(\min_{1\leq i\leq n}\Big(\frac{\xi_i}{\eta_i}\Big) f_j(t)\Big)dt$$

$$\geq \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{ij}(x)}{\alpha(x)} \int_0^\infty K_{ij}\Big(\frac{t-x}{\alpha(x)}\Big)\theta(t-x) G_j\Big(\min_{1\leq i\leq n}\Big(\frac{\xi_i}{\eta_i}\Big) f_j(t)\Big)dt$$

$$\geq \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{ij}(x)}{\alpha(x)} \int_x^\infty K_{ij}\Big(\frac{t-x}{\alpha(x)}\Big)\delta_j \min_{1\leq i\leq n}\Big(\frac{\xi_i}{\eta_i}\Big) G_j(f_j(t))dt$$

$$\geq \min_{1\leq j\leq n}\Big(\frac{\xi_j}{\eta_j}\Big) \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{ij}(x)}{\alpha(x)} \int_x^\infty K_{ij}\Big(\frac{t-x}{\alpha(x)}\Big) G_j(f_j(t))dt = \min_{1\leq j\leq n}\Big(\frac{\xi_j}{\eta_j}\Big) f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

ибо

$$G_j\Big(\min_{1\leq i\leq n}\Big(\frac{\xi_i}{\eta_i}\Big) f_j(t)\Big) \geq G_j(\xi_j)\frac{G_j(f_j(t))}{G_j(\eta_j)} = \frac{\delta_j\xi_j G_j(f_j(t))}{\eta_j} \geq \delta_j \min_{1\leq i\leq n}\Big(\frac{\xi_i}{\eta_i}\Big) G_j(f_j(t)),$$

$$j = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Индукцией несложно проверить измеримость итерационной последовательности $F^{(p)}(x) = (F_1^{(p)}(x), \ldots, F_n^{(p)}(x))^T$ по x на $\mathbb{R}^+$. Итак, на основании (3.4) и (3.5) можем утверждать, что последовательность измеримых вектор-функций $\{F^{(p)}(x)\}_{p=0}^\infty$ имеет поточечный предел, когда $p \to \infty$: $\lim\limits_{p\to\infty} F^{(p)}(x) = F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))^T$. Используя теорему Б. Леви, заключаем, что предельная вектор-функция $F(x)$ удовлетворяет системе (1.1). Из (3.4) и (3.5) приходим также к оценкам (3.2).

Теорема 2 доказана.

Отсутствие единственности. Предположим, что $n=1$ и

$$W(x,t)=\frac{\lambda(x)}{\alpha(x)}K\left(\frac{t-x}{\alpha(x)}\right)\theta(t-x),\quad (x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+;\quad G(u)=u+\sin^2 u,\quad u\in\mathbb{R}^+.$$

Прямой проверкой можно убедиться, что выполняются условия 1)–3) для $G(u)$. Очевидно, что в данном случае для отображения $y=G(u)$ существует счетное число неподвижных точек $\eta^{(m)}=\pi m$, $m=0,1,2,\ldots$, причем на каждом отрезке $[0,\eta^{(m)}]$, $m=1,2,\ldots$, функция $G(u)$ удовлетворяет условиям 2), 3). Неподвижные точки $\{\eta^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ порождают однопараметрическое семейство решений $\{f_{(m)}(x)\}_{m=1}^{\infty}$ уравнения (2.1) при $n=1$. По теореме 1 для этих решений получаем включения $\eta^{(m)}-f_{(m)}\in L_1(\mathbb{R}^+)$, $m=1,2,\ldots$. $\square$

В конце работы приведем несколько примеров для $\{W_{ij}(x,t)\}_{i,j=1}^{n\times n}$, $\{K_{ij}(y)\}_{i,j=1}^{n\times n}$, $\{\lambda_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$, $\{G_j(u)\}_{j=1}^{n}$, и $\rho(x,y)$, удовлетворяющие всем условиям доказанных утверждений.

Примеры для функций $\{\lambda_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$:

i_1) $\lambda_{ij}(x)=1-e^{-\omega_{ij}x}$, $x\in\mathbb{R}^+$, где $\omega_{ij}>0$, $i,j=1,2,\ldots,n$, — произвольные числовые параметры;

i_2) $\lambda_{ij}(x)=1-\varepsilon_{ij}e^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}^+$, $\varepsilon_{ij}\in(0,1]$, $i,j=1,2,\ldots,n$, — числовые параметры.

Примеры ядер $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$:

j_1) $K_{ij}(x)=\displaystyle\int_a^b e^{-xs}Q_{ij}(s)ds$, $x\in\mathbb{R}$, $i,j=1,2,\ldots,n$, где $\{Q_{ij}(s)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ — непрерывные и положительные функции на множестве $[a,b)$, $0<a<b\le+\infty$, причем спектральный радиус матрицы $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}$, $a_{ij}=\displaystyle\int_a^b\frac{Q_{ij}(s)}{s}ds$, $i,j=1,2,\ldots,n$, равен единице и $Q_{ij}(s)=Q_{ji}(s)$, $s\in[a,b)$, $i,j=1,2,\ldots,n$;

j_2) $K_{ij}(x)=\dfrac{a_{ij}}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$, $i,j=1,2,\ldots,n$.

Примеры нелинейностей $\{G_j(u)\}_{j=1}^{n}$:

k_1) $G_j(u)=\eta_j\sqrt[p]{\dfrac{u}{\eta_j}}$, $u\in\mathbb{R}^+$, $j=1,2,\ldots,n$, где $p\ge2$ — натуральное число;

k_2) $G_j(u)=\dfrac{\eta_j}{1-e^{-\eta_j}}(1-e^{-u})$, $u\in\mathbb{R}^+$, $j=1,2,\ldots,n$.

Примеры ядер $\{W_{ij}(x,t)\}_{i,j=1}^{n\times n}$:

q_1) $W_{ij}(x,t)=\dfrac{\lambda_{ij}(x)}{\alpha(x)}K_{ij}\Big(\dfrac{t-x}{\alpha(x)}\Big)\theta(t-x)$, $(x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, $i,j=1,2,\ldots,n$;

q_2) $W_{ij}(x,t)=\varepsilon\dfrac{\lambda_{ij}(x)}{\alpha(x)}K_{ij}\Big(\dfrac{t-x}{\alpha(x)}\Big)\theta(t-x)+(1-\varepsilon)T_{ij}(x,t)$, $(x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, $i,j=1,2,\ldots,n$, где $T_{ij}(x,t)>0$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+}\displaystyle\int_0^\infty T_{ij}(x,t)dt=a_{ij}$, $i,j=1,2,\ldots,n$.

Примеры функции ρ:

γ_1) $\rho(x,y)=xe^y+\sqrt{y}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, $\delta=1$;

γ_2) $\rho(x,y)=(x+\alpha)e^y+2(1-e^{-y})$, $(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, $\delta=1$;

γ_3) $\rho(x,y)=(x+1)e^y+\sqrt[p]{y}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, $\delta=1$, $p\ge2$ — натуральное число.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ланкастер П.** Теория матриц. М.: Наука, 1973г. 280 с.
2. **Соболев В.В.** Проблема Милна для неоднородной атмосферы // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 3. С. 558–561.
3. **Арабаджян Л.Г.** Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 9. С. 1618–1622.
4. **Cercignani C.** The Boltzmann equation and its applications. NY: Springer-Verlag, 1988. 455 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1039-9 .
5. **Khachatryan A.Kh., Khachatryan Kh.A.** On solvability of one infinite system of nonlinear functional equations in the theory of epidemics // Eurasian Math. J. 2020. Vol. 11, no. 2. P. 52–64. doi: 10.32523/2077-9879-2020-11-2-52-64 .
6. **Diekmann O.** Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // J. Math. Biol. 1978. Vol. 6, no. 2. P. 109–130. doi: 10.1007/BF02450783 .
7. **Sargan I.D.** The distribution of wealth // Econometrics. 1957. Vol. 25, no. 4. P. 568–590. doi: 10.2307/1905384 .
8. **Khachatryan Kh.A.** On some systems of nonlinear integral Hammerstein-type equations on the semiaxis // Ukrainian Math. J. 2010. Vol. 62, no. 4. P. 630–674.
9. **Хачатрян Х.А., Терджян Ц.Э., Сардарян Т.Г.** О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси // Укр. мат. журн. 2017. Vol. 69, no. 8. P. 1107–1122.
10. **Khachatryan Kh.A., Petrosyan H.S.** Solvability of a certain system of singular integral equations with convex nonlinearity on the positive half-line // Russian Math. 2021. Vol. 65, no. 1. P. 27–48. doi: 10.3103/S1066369X21010035 .
11. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.
12. **Арабаджян Л.Г., Енгибарян Н.Б.** Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. № 22. М.: ВИНИТИ, 1984. С. 175–244.

Поступила 2.03.2022
После доработки 30.03.2022
Принята к публикации 11.04.2022

Хачатрян Хачатур Агавардович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой теории функций и дифф. уравнений
Ереванский государственный университет
г. Ереван
e-mail: Khach82@rambler.ru, khachatur.khachatryan@ysu.am

Петросян Айкануш Самвеловна
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры высшей математики и физики
Национальный аграрный университет Армении
г. Ереван
e-mail: Haykuhi25@mail.ru

REFERENCES

1. Lancaster P. *Theory of matrices.* NY: Acad. Press, 1969, 316 p. Translated to Russian under the title *Teoriya matrits*, Moscow: Nauka Publ., 1973, 280 p.
2. Sobolev V.V. The Milne problem for an inhomogeneous atmosphere. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1978, vol. 239, no. 3, pp. 558–561 (in Russian).
3. Arabadzhyan L.G. An integral equation of transport theory in an inhomogeneous medium. *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 9, pp. 1618–1622 (in Russian).
4. Cercignani C. *The Boltzmann equation and its applications.* NY: Springer, 1988, 455 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1039-9 .

5. Khachatryan A.Kh., Khachatryan Kh.A. On solvability of one infinite system of nonlinear functional equations in the theory of epidemics. *Eurasian Math. J.*, 2020, vol. 11, no. 2, pp. 52–64. doi: 10.32523/2077-9879-2020-11-2-52-64 .
6. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection. *J. Math. Biol.*, 1978, vol. 6, no. 2, pp. 109–130. doi: 10.1007/BF02450783 .
7. Sargan J. The distribution of wealth. *Econometrica*, 1957, vol. 25, no. 4, pp. 568–590. doi: 10.2307/1905384 .
8. Khachatryan K.A. On some systems of nonlinear integral Hammerstein-type equations on the semiaxis. *Ukr. Math. J.*, 2010, vol. 62, no. 4, pp. 630–647. doi: 10.1007/s11253-010-0376-9 .
9. Sardaryan T.G., Terjyan T.E., Khachatryan K.A. On the solvability of one system of nonlinear Hammerstein-type integral equations on the semiaxis. *Ukr. Mat. Zhur.*, 2017, vol. 69, no. 8, pp. 1107–1122 (in Russian).
10. Khachatryan Kh.A., Petrosyan H.S. Solvability of a certain system of singular integral equations with convex nonlinearity on the positive half-line. *Russian Math.* (*Iz. VUZ*), 2021, vol. 65, no. 1, pp. 27–46. doi: 10.3103/S1066369X21010035 .
11. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis*, vol. 1, 2. Mineola; NY: Dover Publ., 1999, 288 p. ISBN: 0486406830 . Original Russian text published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza*, Moscow: Nauka Publ., 1981, 544 p.
12. Arabadzhyan L.G., Engibaryan N.B. Convolution equations and nonlinear functional equations. *J. Soviet Math.*, 1987, vol. 36, no. 6, pp. 745–791. doi: 10.1007/BF01085507 .

Received March 2, 2022
Revised March 30, 2022
Accepted April 11, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Science Committee of the Republic of Armenia (project no. 21T-1A047).

Khachatur Aghavardovich Khachatryan, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Yerevan State University, 0025 Yerevan, Republic of Armenia, e-mail: Khach82@rambler.ru, khachatur.khachatryan@ysu.am .

Haykanush Samvelovna Petrosyan, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Armenian National Agrarian University, 0009, Yerevan, Republic of Armenia, e-mail: Haykuhi25@mail.ru .

Cite this article as: Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan. On the solvability of a system of nonlinear integral equations with a monotone Hammerstein type operator, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 201–214 .