ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 2 2022

УДК 519.17

О Q-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ГРАФАХ ШИЛЛА С $b = 4$[1]

А. А. Махнев, И. Н. Белоусов, М. П. Голубятников

Рассматриваются графы Шилла, введенные Дж. Куленом и Ч. Паком. Для определения допустимых массивов пересечений графов Шилла с фиксированным параметром b важную роль играют Q-полиномиальные графы. Для таких графов наименьшее собственное значение является минимально возможным для третьего неглавного собственного значения. В 2010 г. Дж. Куленом и Ч. Паком были найдены массивы пересечений Q-полиномиальных графов с $b = 3$ и позднее в 2018 г. И.Н. Белоусовым с $b \in \{4, 5\}$. В частности, известно, что Q-полиномиальный граф Шилла с $b = 4$ имеет массив пересечений $\{104, 81, 27; 1, 9, 78\}$, $\{156, 120, 36; 1, 12, 117\}$ или $\{20(q-2), 3(5q-9), 2q; 1, 2q, 15(q-2)\}$, $q = 6, 9, 18$. В работе доказано, что дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{80, 63, 12; 1, 12, 60\}$, $\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$ и $\{320, 243, 36; 1, 36, 240\}$ не существуют.

Ключевые слова: граф Шилла, дистанционно регулярный граф, Q-полиномиальный граф.

A. A. Makhnev, I. N. Belousov, M. P. Golubyatnikov. On Q-polynomial Shilla graphs with $b = 4$.

Shilla graphs introduced by J. H. Koolen and J. Park are considered. In the problem of finding feasible intersection arrays of Shilla graphs with a fixed parameter b, Q-polynomial graphs play an important role. For such graphs, the smallest eigenvalue is the minimum possible for the third nonprincipal eigenvalue. Intersection arrays of Q-polynomial graphs were found for $b = 3$ in 2010 by Koolen and Park and for $b \in \{4, 5\}$ in 2018 by Belousov. In particular, it is known that a Q-polynomial Shilla graph with $b = 4$ has intersection array $\{104, 81, 27; 1, 9, 78\}$, $\{156, 120, 36; 1, 12, 117\}$, or $\{20(q-2), 3(5q-9), 2q; 1, 2q, 15(q-2)\}$, where $q = 6, 9, 18$. We prove that distance-regular graphs with intersection arrays $\{80, 63, 12; 1, 12, 60\}$, $\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$, and $\{320, 243, 36; 1, 36, 240\}$ do not exist.

Keywords: Shilla graph, distance-regular graphs, Q-polynomial graph.

MSC: 05E30, 05C50

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-176-186

Введение

Графы Шилла были введены Дж. Куленом и Ч. Паком [1] как в некотором смысле экстремальные дистанционно регулярные графы диаметра 3 (необходимые определения можно найти в следующем разделе). А именно, наибольшее неглавное собственное значение θ_1 не меньше $\min\left\{\dfrac{a_1+\sqrt{a_1^2+4k}}{2}, a_3\right\}$, где k — валентность графа, и $\theta_1 = a_3$ тогда и только тогда, когда $\theta_1 = \dfrac{a_1+\sqrt{a_1^2+4k}}{2}$ [1, теорема 7]. Графы с $\theta_1 = a_3$ и назвали графами Шилла. В графах Шилла параметр a_3 обозначают через a, и k делится на a. Полагают $b = b(\Gamma) = k/a$, и графы Шилла имеют массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$. Заметим, что дистанционно регулярный граф диаметра 3 с $k = ab$ и $b_1 = (a+1)(b-1)$ является графом Шилла.

В дальнейшем А. Юришич и Я. Видали показали, что графы Шилла с $b_2 = c_2$ содержат максимальный 1-код [2, предложение 5] и нашли бесконечные серии допустимых массивов графов Шилла. Дж. Кулен и Ч. Пак в [1] нашли все допустимые массивы пересечений графов Шилла для $b \in \{2, 3\}$, а в работе И. Белоусова [3] найдены допустимые массивы для $b \in \{4, 5\}$. Отметим, что в случае $b = 2$ получилось 5 допустимых массивов, которым отвечают известные

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10067).

графы, при $b = 3$ таких массивов оказалось 12, среди которых только для двух доказано существование графа — унитарный неизотропный граф и граф Доро. В [4; 5] доказано несуществование графов Шилла с $b = 3$ и массивами пересечений $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$, $\{69, 48, 24; 1, 4, 46\}$ соответственно. При $b = 4$ известно 50 допустимых массивов, а при $b = 5$ — 82 (см. [3]).

Для определения допустимых массивов пересечений графов Шилла с фиксированным параметром b важную роль играют Q-полиномиальные графы относительно θ_1. Для таких графов наименьшее собственное значение равно $-b(bb_2 + c_2)/(b_2 + c_2)$, что является минимально возможным для третьего неглавного собственного значения [1, предложение 15 и следствие 16]. По [1, предложение 18] Q — полиномиальный граф с $b = 3$ имеет массив пересечений $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ или $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ и не существует по [6; 7] соответственно. Естественный вопрос, существуют ли Q-полиномиальные графы Шилла с $b = 4$? Классификация Q-полиномиальных схем была начата Э. Баннаи и Т. Ито в [8] и на данный момент не закончена. В настоящее время появилось много статей, связанных с решением этой проблемы [9–11]. Вопрос существования Q-полиномиальных графов Шилла с $b = 4$ лежит в русле данных исследований. Такие графы имеют массив пересечений $\{80, 63, 12; 1, 12, 60\}$, $\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$ или $\{320, 243, 36; 1, 36, 240\}$ в случае $b_2 = c_2$ и $\{104, 81, 27; 1, 9, 78\}$ или $\{156, 120, 36; 1, 12, 117\}$ при $b_2 \neq c_2$. В настоящей работе доказано, что существование указанных графов остается неизвестным только для графа с массивом пересечений $\{156, 120, 36; 1, 12, 117\}$.

Пусть Γ — граф с массивом пересечений $\{104, 81, 27; 1, 9, 78\}$. В [3, теорема 1] найдена бесконечная серия допустимых массивов пересечений графов Шилла $\{(s+1)(s^3-1), s^4, s^3; 1, s^2, s(s^3-1)\}$. В [14] доказано, что в случае $s = 2$ граф не существует. Таким образом, массив пересечений $\{104, 81, 27; 1, 9, 78\}$ отвечает графу в указанной серии с наименьшим s, равным 3, поэтому графа с таким массивом пересечений нет в силу [15].

Теорема 1. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений* $\{80, 63, 12; 1, 12, 60\}$, $\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$ *и* $\{320, 243, 36; 1, 36, 240\}$ *не существуют.*

1. Основные определения и обозначения

Рассматриваются обыкновенные графы, то есть неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Пусть Γ — граф диаметра d, $i \in \{1, 2, 3, \ldots, d\}$. Граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, и вершины u, w смежны в Γ_i, если $d_\Gamma(u, w) = i$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ (см. [12]).

Предположим, что Γ — дистанционно регулярный граф степени k и диаметра D, большего 1. Под матрицей A_i $(0 \le i \le D)$ графа Γ будем понимать квадратную матрицу, строки и столбцы которой индексированы множеством $V(\Gamma)$, и на месте (x, y) матрицы A_i стоит 1 в случае $d_\Gamma(x, y) = i$ и 0 в противном случае. *Матрицей смежности* графа Γ называют матрицу A_1 и обозначают ее через A. Под графом Γ_i понимают граф с $V(\Gamma_i) = V(\Gamma)$ и матрицей смежности A_i, т. е. две вершины смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

Алгеброй Бозе — Меснера M дистанционно регулярного графа Γ называется вещественная матричная алгебра, порожденная матрицей смежности A графа Γ с базисом $\{A_i \mid i = 0, \dots, D\}$. Алгебра M имеет базис, состоящий из примитивных идемпотентов $\{E_0 = \frac{1}{v}J, E_1, \dots, E_D\}$, где $v = |V(\Gamma)|$ и E_i — ортогональная проекция на собственное подпространство, отвечающее собственному значению θ_i. Определим матрицы $P = \{P_{ij}\}$ и $Q = \{Q_{ij}\}$ следующим образом: $A_j = \sum_{i=0}^{D} P_{ij}E_i$, $E_j = v^{-1}\sum_{i=0}^{D} Q_{ij}A_i$. Заметим, что существует зависимость между собственными значениями и примитивными идемпотентами, и $\{P_{ij}\}_{i=0}^{D}$ — собственные значения матрицы A_j. Матрицы P и Q называются матрицей собственных значений и дуальной матрицей собственных значений соответственно. Далее, относительно покомпонентного умножения “$\circ$” выполняются равенства $E_i \circ E_j = \frac{1}{v}\sum_{i=0}^{D} q_{ij}^k E_k$. Граф Γ называется *Q-полиномиальным*, если существует упорядочение примитивных идемпотентов $E_0 = \frac{1}{v}J, E_1, \dots, E_D$, такое, что $q_{ij}^k = 0$ при $|j-k| > 1$. Будем говорить, что граф Γ является *Q-полиномиальным относительно* θ, если E_1 — ортогональная проекция на собственное подпространство, отвечающее собственному значению θ.

В [13, разд. 4.4, теорема 4.5.6, теорема 4.6.3] получен следующий результат, играющий ключевую роль в доказательстве теоремы 2.

Предложение 1. *Пусть Γ — граф Шилла с $b_2 = c_2$ и $\theta_3 = -b(b+1)/2$. Тогда*

а) *b четно,*

б) *$b = 2r$, $c_2 = r(t+r)$ и граф Γ имеет массив пересечений $\{2rt(2r+1), (2r-1)(2rt+t+1), r(r+t); 1, r(r+t), t(4r^2-1)\}$,*

в) *для любой вершины u из Γ подграф $\Gamma_3(u)$ является антиподальным дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{t(2r+1), (2r-1)(t+1), 1; 1, t+1, t(2r+1)\}$, причем в случае $t = r$ имеем $r = 1$.*

2. Тройные числа пересечений

В доказательстве теоремы используются тройные числа пересечений [2].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Пусть u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d. Через $\left\{ \begin{matrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{matrix} \right\}$ обозначим множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, а через $\begin{bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{bmatrix}$ — число вершин в $\left\{ \begin{matrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{matrix} \right\}$. Числа $\begin{bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{bmatrix}$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\begin{bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{bmatrix}$ будем писать $[r_1r_2r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1r_2r_3]$ нет общих формул. Однако в [2] предложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1r_2r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u,v), U = d(v,w), V = d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x,u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$ и сосчитав число вершин, находящихся на всех возможных расстояниях от третьей:

$$\begin{cases} \sum_l^d [ljh] = p^U_{jh} - [0jh], \\ \sum_l^d [ilh] = p^V_{ih} - [i0h], \\ \sum_l^d [ijl] = p^W_{ij} - [ij0]. \end{cases} \qquad (+)$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i - j| > W$ или $i + j < W$ имеем $p^W_{ij} = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, ..., d\}$.

Положим

$$S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix},$$

где Q_{ij} — элементы дуальной матрицы собственных значений Q.

Если параметр Крейна $q^h_{ij} = 0$, то $S_{ijh}(u, v, w) = 0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{ijh\} = \begin{Bmatrix} uvw \\ ijh \end{Bmatrix}$, $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$, $[ijh]' = \begin{bmatrix} uvw \\ ihj \end{bmatrix}$, $[ijh]^* = \begin{bmatrix} uvw \\ jih \end{bmatrix}$ и $[ijh]^\sim = \begin{bmatrix} uvw \\ hji \end{bmatrix}$. Вычисление чисел $[ijh]'$, $[ijh]^*$ и $[ijh]^\sim$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

3. Граф с массивом $\{80, 63, 12; 1, 12, 60\}$

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{80, 63, 12; 1, 12, 60\}$. Тогда число вершин равно $1 + 80 + 420 + 84 = 585$, Γ имеет спектр $80^1, 20^{52}, 2^{350}, -10^{182}$, и дуальная матрица собственных значений графа Γ равна

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 52 & 350 & 182 \\ 1 & 13 & \frac{35}{4} & -\frac{91}{4} \\ 1 & 0 & -\frac{15}{2} & \frac{13}{2} \\ 1 & -13 & 25 & -13 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Для чисел пересечения графа верны равенства*
$p^1_{11} = 16$, $p^1_{21} = 63$, $p^1_{32} = 63$, $p^1_{22} = 294$, $p^1_{33} = 21$;
$p^2_{11} = 12$, $p^2_{12} = 56$, $p^2_{13} = 12$, $p^2_{22} = 303$, $p^2_{23} = 60$, $p^2_{33} = 12$;
$p^3_{12} = 60$, $p^3_{13} = 20$, $p^3_{22} = 300$, $p^3_{23} = 60$, $p^3_{33} = 3$.

Доказательство. Прямые вычисления по [12, лемма 4.1.7].

Пусть u, v, w — вершины графа Γ и $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$. Положим $\Delta = \Gamma_2(u)$, $\Lambda = \Delta_2$. Тогда Λ — регулярный граф степени 303 на 420 вершинах.

Лемма 2. *Пусть* $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 1$. *Тогда верны равенства*

$[111] = r_1,$ $[112] = [121] = -r_1 + 12,$ $[122] = -2\,r_2 - 2\,r_1 + 50,$

$[123] = [132] = 2\,r_2 + 3\,r_1 - 6,$ $[133] = -2\,r_2 - 3\,r_1 + 18;$

$[211] = -2\,r_2 - 4\,r_1 + 28,$ $[212] = [221] = 2\,r_2 + 4\,r_1 + 27,$ $[222] = -r_2 - r_1 + 219,$

$[223] = [232] = -r_2 - 3\,r_1 + 57,$ $[233] = r_2 + 3\,r_1 + 3;$

$[311] = 2\,r_2 + 3\,r_1 - 12,$ $[312] = [321] = -2\,r_2 - 3\,r_1 + 24,$ $[322] = 3\,r_2 + 3\,r_1 + 24,$

$[323] = [332] = -r_2 + 12,$ $[333] = r_2,$

где $r_2 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $r_1 \in \{0, 1, \ldots, 6\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Упрощение формул (+) с использованием чисел пересечений, полученных в лемме 1, а также с учетом равенств

$$S_{113}(u, v, w) = S_{131}(u, v, w) = S_{311}(u, v, w) = 0. \qquad (*)$$

По лемме 2 с учетом неравенств $0 \le r_1 \le 6$ и $0 \le r_2 \le 9$ имеем

$$204 = -9 - 6 + 219 \le [222] = -r_2 - r_1 + 219 \le 219.$$

Лемма 3. *Пусть* $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 3$. *Тогда*

$[112] = \frac{1}{4}r_3 + \frac{1}{4}r_4 + \frac{3}{4}r_5 + \frac{15}{4},$ $[113] = -\frac{1}{4}r_3 - \frac{1}{4}r_4 - \frac{3}{4}r_5 + \frac{33}{4},$

$[121] = r_3 - r_4 + 15,$ $[122] = -\frac{3}{2}r_3 + \frac{1}{2}r_4 - \frac{1}{2}r_5 + \frac{79}{2},$

$[123] = \frac{1}{2}r_3 + \frac{1}{2}r_4 + \frac{1}{2}r_5 + \frac{3}{2},$ $[131] = -r_3 + r_4 - 3,$

$[132] = \frac{5}{4}r_3 - \frac{3}{4}r_4 - \frac{1}{4}r_5 + \frac{51}{4},$ $[133] = -\frac{1}{4}r_3 - \frac{1}{4}r_4 + \frac{1}{4}r_5 + \frac{9}{4};$

$[212] = \frac{1}{2}r_3 - \frac{3}{2}r_4 - \frac{1}{2}r_5 + \frac{111}{2},$ $[213] = -\frac{1}{2}r_3 + \frac{3}{2}r_4 + \frac{1}{2}r_5 + \frac{1}{2},$

$[221] = -r_3 + r_4 + r_5 + 33,$ $[222] = \frac{3}{2}r_3 + \frac{1}{2}r_4 - \frac{1}{2}r_5 + \frac{423}{2},$

$[223] = -\frac{1}{2}r_3 - \frac{3}{2}r_4 - \frac{1}{2}r_5 + \frac{117}{2},$ $[231] = r_3 - r_4 - r_5 + 23,$

$[232] = -2\,r_3 + r_4 + r_5 + 36,$ $[233] = r_3;$

$[312] = -\frac{3}{4}r_3 + \frac{5}{4}r_4 - \frac{1}{4}r_5 + \frac{3}{4},$ $[313] = \frac{3}{4}r_3 - \frac{5}{4}r_4 + \frac{1}{4}r_5 + \frac{45}{4},$

$[321] = -r_5 + 12,$ $[322] = -r_4 + r_5 + 48,$

$[323] = r_4,$ $[331] = r_5,$

$[332] = \frac{3}{4}r_3 - \frac{1}{4}r_4 - \frac{3}{4}r_5 + \frac{45}{4},$ $[333] = -\frac{3}{4}r_3 + \frac{1}{4}r_4 - \frac{1}{4}r_5 + \frac{3}{4},$

где $r_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$, $r_4 \in \{3, 4, \ldots, 12\}$, $r_5 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Упрощение формул (+) с учетом равенств (∗). □

Положим $\{z_1, z_2, z_3\} = \Gamma_3(v) \cap \Gamma_3(w)$. По предложению 1 подграф $\Gamma_3(z_i)$ является антиподальным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{20, 15, 1; 1, 5, 20\}$. Если $u \in \Gamma_3(z_i)$, то $[133] = (-r_3 - r_4 + r_5 + 9)/4 = 1$, $[233] = r_3 = 1$ и $[333] = (-3r_3 + r_4 - r_5 + 3)/4 = 1$. Отсюда $r_4 - r_5 = 4$, $[122] = r_5 + 40$, поэтому $r_5 = r_5'$ и $[112] = r_5 + 5 = [121]' = 10 - r_5'$ влечет $2r_5 = 5$; противоречие.

Итак, u не попадает в $\Gamma_3(z_i)$ для $i = 1, 2, 3$ и $[333] = (-3r_3 + r_4 - r_5 + 3)/4 = 0$, поэтому $3r_{12} + r_5 - r_4 = 3$ и $r_4 - r_5$ делится на 3.

Далее, u смежна не более чем с одной вершиной из $\{z_1, z_2, z_3\}$, поэтому u находится на расстоянии 2 от, по крайней мере, 4 вершин из $C = \{v, w, z_1, z_2, z_3\}$. В этом случае любая вершина, находящаяся на расстоянии 2 от двух вершин из C, находится на расстоянии 2 от, по крайней мере, четырех вершин из C.

Пусть $y \in \Gamma_3(v) - \{w, z_1, z_2, z_3\}$. Тогда y смежна не более чем с одной вершиной из $\{w, z_1, z_2, z_3\}$ и находится на расстоянии 2 от, по крайней мере, трех вершин из $\{w, z_1, z_2, z_3\}$. Как показано выше, y не может находиться на расстоянии 3 от вершин из $\{v, w, z_1, z_2, z_3\}$; противоречие.

Итак, дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{80, 63, 12; 1, 12, 60\}$ не существует. □

4. Граф с массивом $\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$ имеет спектр $140^1, 35^{60}, 5^{560}, -10^{504}$, $1+140+840+144 = 1125$ вершин и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 60 & 560 & 504 \\ 1 & 15 & 20 & -36 \\ 1 & 0 & -10 & 9 \\ 1 & -15 & 35 & -21 \end{pmatrix}.$$

Лемма 4. *Числа пересечений графа* Γ *равны*
$p^1_{11} = 31$, $p^1_{21} = 108$, $p^1_{32} = 108$, $p^1_{22} = 624$, $p^1_{33} = 36$;
$p^2_{11} = 18$, $p^2_{12} = 104$, $p^2_{13} = 18$, $p^2_{22} = 627$, $p^2_{23} = 108$, $p^2_{33} = 18$;
$p^3_{12} = 105$, $p^3_{13} = 35$, $p^3_{22} = 630$, $p^3_{23} = 105$, $p^3_{33} = 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прямые вычисления по [12, лемма 4.1.7].

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, $\Delta = \Gamma_2(u)$ и $\Lambda = \Delta_2$. Тогда Λ — регулярный граф степени 627 на 840 вершинах.

Лемма 5. *Пусть* $d(u, v) = (u, w) = 2, d(v, w) = 1$. *Тогда верны следующие равенства:*

$$\begin{aligned}
&[111] = -\frac{2}{3}r_6 + \frac{1}{3}r_7 + 6, && [112] = [121] = \frac{2}{3}r_6 - \frac{1}{3}r_7 + 12,\\
&[122] = -\frac{2}{3}r_6 - \frac{2}{3}r_7 + 83, && [123] = [132] = r_7 + 9,\ [133] = -r_7 + 9;\\
&[211] = \frac{2}{3}r_6 - \frac{4}{3}r_7 + 25, && [212] = [221] = -\frac{2}{3}r_6 + \frac{4}{3}r_7 + 78,\\
&[222] = -\frac{1}{3}r_6 - \frac{1}{3}r_7 + 468, && [223] = [232] = r_6 - r_7 + 81,\ [233] = -r_6 + r_7 + 27;\\
&[311] = r_7, && [312] = [321] = -r_7 + 18,\\
&[322] = r_6 + r_7 + 72, && [323] = [332] = -r_6 + 18,\\
&[333] = r_6,
\end{aligned}$$

где $r_6 \in \{0, 1, \ldots, 13\}$, $r_7 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Упрощение формул (+) с использованием чисел пересечений, полученных в лемме 4, а также с учетом равенств (∗). □

По лемме 5 с учетом неравенств $0 \le r_6 \le 13$ и $0 \le r_7 \le 9$ имеем

$$461 = -12/3 - 9/3 + 468 \le [222] = -r_6/3 - r_7/3 + 468 \le 468.$$

Лемма 6. *Пусть* $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 3$. *Тогда верны равенства*

$$[112] = \frac{1}{2}r_8 + \frac{1}{2}r_9 + \frac{9}{2}, \qquad [113] = -\frac{1}{2}r_8 - \frac{1}{2}r_9 + \frac{27}{2},$$
$$[121] = \frac{1}{2}r_8 - \frac{1}{2}r_9 + r_{10} + \frac{9}{2}, \qquad [122] = -\frac{3}{2}r_8 + \frac{1}{2}r_9 - r_{10} + \frac{199}{2},$$
$$[123] = r_8, \qquad [131] = -\frac{1}{2}r_8 + \frac{1}{2}r_9 - r_{10} + \frac{27}{2},$$
$$[132] = r_8 - r_9 + r_{10}, \qquad [133] = -\frac{1}{2}r_8 + \frac{1}{2}r_9 + \frac{9}{2};$$
$$[212] = -\frac{1}{2}r_8 - \frac{1}{2}r_9 + r_{10} + \frac{165}{2}, \qquad [213] = \frac{1}{2}r_8 + \frac{1}{2}r_9 - r_{10} + \frac{43}{2},$$
$$[221] = -\frac{1}{2}r_8 + \frac{3}{2}r_9 - r_{10} + \frac{165}{2}, \qquad [222] = \frac{9}{4}r_8 - \frac{7}{4}r_9 + \frac{1}{2}r_{10} + \frac{1785}{4},$$
$$[223] = -\frac{7}{4}r_8 + \frac{1}{4}r_9 + \frac{1}{2}r_{10} + \frac{393}{4}, \qquad [231] = \frac{1}{2}r_8 - \frac{3}{2}r_9 + r_{10} + \frac{43}{2},$$
$$[232] = -\frac{7}{4}r_8 + \frac{9}{4}r_9 - \frac{3}{2}r_{10} + \frac{393}{4}, \qquad [233] = \frac{5}{4}r_8 - \frac{3}{4}r_9 + \frac{1}{2}r_{10} - \frac{51}{4};$$
$$[312] = -r_{10} + 18, \qquad [313] = r_{10},$$
$$[321] = -r_9 + 18, \qquad [322] = -\frac{3}{4}r_8 + \frac{5}{4}r_9 + \frac{1}{2}r_{10} + \frac{333}{4},$$
$$[323] = \frac{3}{4}r_8 - \frac{1}{4}r_9 - \frac{1}{2}r_{10} + \frac{27}{4}, \qquad [331] = r_9,$$
$$[332] = \frac{3}{4}r_8 - \frac{5}{4}r_9 + \frac{1}{2}r_{10} + \frac{27}{4}, \qquad [333] = -\frac{3}{4}r_8 + \frac{1}{4}r_9 - \frac{1}{2}r_{10} + \frac{45}{4},$$

где $r_8 \in \{7, 8, \ldots, 18\}$, $r_9, r_{10} \in \{0, 1, \ldots, 12\}$.

Доказательство. Упрощение формул (+) с учетом равенств (∗). □

Так как $[133] = -r_8/2 + r_9/2 + 9/2$, то $r_8 - r_9 = r_8' - r_9'$. Имеем $[313] = r_{10} = [331]' = r_9'$.

Положим $\{z_1, z_2, z_3\} = \Gamma_3(v) \cap \Gamma_3(w)$. По предложению 1 подграф $\Gamma_3(z_i)$ является антиподальным дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{35, 24, 1; 1, 8, 35\}$. Если $u \in \Gamma_3(z_i)$, то по лемме 6 имеем $[133] = -r_8/2 + r_9/2 + 9/2 = 1$, $[233] = 5r_8/4 - 3r_9/4 + r_{10}/2 - 51/4 = 1$ и $[333] = -3r_8/4 + r_9/4 - r_{10}/2 + 45/4 = 1$. Отсюда $r_8 - 7 = r_9$ и $r_9' = r_{10} = 10 - r_9 = 17 - r_8$. Далее, $[112] = r_8 + 1 = [121]' = 25 - r_8'$ и $r_8 + r_8' = 24$. Из равенств $[133] = 1$, $[313] = r_{10} = 17 - r_8$ следует, что $r_8' = 16$, $r_8 = 8$, $r_9 = 1$ и $r_{10} = 9$. Противоречие с тем, что для тройки вершин (u, w, v) число $r_8' = [132]$ должно равняться 8.

Если же u не попадает в $\Gamma_3(z_i)$ для $i = 1, 2, 3$, то u смежна не более чем с одной вершиной из $\{z_1, z_2, z_3\}$, поэтому u находится на расстоянии 2 от, по крайней мере 4, вершин из $C = \{v, w, z_1, z_2, z_3\}$. Значит, любая вершина, находящаяся на расстоянии 2 от двух вершин из C, находится на расстоянии 2 от, по крайней мере 4, вершин из C.

Пусть $y \in \Gamma_3(v) - \{w, z_1, z_2, z_3\}$. Тогда y смежна не более чем с одной вершиной из $\{w, z_1, z_2, z_3\}$ и находится на расстоянии 2 от, по крайней мере, трех вершин из $\{w, z_1, z_2, z_3\}$. Как показано выше, y не может находиться на расстоянии 3 от вершин из $\{v, w, z_1, z_2, z_3\}$; противоречие.

Итак, дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$ не существует. □

5. Граф с массивом $\{320, 243, 36; 1, 36, 240\}$

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{320, 243, 36; 1, 36, 240\}$. Число вершин графа Γ равно 2805, Γ имеет спектр $320^1, 80^{68}, 14^{900}, -10^{1836}$ и дуальная матрица собственных значений графа Γ равна

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 68 & 900 & 1836 \\ 1 & 17 & \frac{315}{8} & -\frac{459}{8} \\ 1 & 0 & -\frac{55}{4} & \frac{51}{4} \\ 1 & -17 & 50 & -34 \end{pmatrix}.$$

Лемма 7. *Числа пересечений графа* Γ *равны*
$p^1_{11} = 76$, $p^1_{21} = 243$, $p^1_{32} = 243$, $p^1_{22} = 1674$, $p^1_{33} = 81$;
$p^2_{11} = 36$, $p^2_{12} = 248$, $p^2_{13} = 36$, $p^2_{22} = 1659$, $p^2_{23} = 252$, $p^2_{33} = 36$;
$p^3_{12} = 240$, $p^3_{13} = 80$, $p^3_{22} = 1680$, $p^3_{23} = 240$, $p^3_{33} = 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прямые вычисления по [12, лемма 4.1.7]. □

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, $\Delta = \Gamma_2(u)$ и $\Lambda = \Delta_2$. Тогда Λ — регулярный граф степени 1659 на 2160 вершинах.

Лемма 8. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 2, d(v,w) = 1$. *Тогда верны равенства*

$$[111] = r_{11}, \qquad [112] = [121] = -r_{11} + 36,$$
$$[122] = r_{12} + r_{11} + 176, \qquad [123] = [132] = -r_{12} + 36,$$
$$[133] = r_{12};$$
$$[211] = r_{12} - r_{11} + 58, \qquad [212] = [221] = -r_{12} + r_{11} + 189,$$
$$[222] = \frac{1}{2} r_{12} + \frac{1}{2} r_{11} + 1272, \qquad [223] = [232] = \frac{1}{2} r_{12} - \frac{3}{2} r_{11} + 198,$$
$$[233] = -\frac{1}{2} r_{12} + \frac{3}{2} r_{11} + 54;$$
$$[311] = -r_{12} + 18, \qquad [312] = [321] = r_{12} + 18,$$
$$[322] = -\frac{3}{2} r_{12} - \frac{3}{2} r_{11} + 225, \qquad [323] = [332] = \frac{1}{2} r_{12} + \frac{3}{2} r_{11} + 9,$$
$$[333] = -\frac{1}{2} r_{12} - \frac{3}{2} r_{11} + 27,$$

где $r_{12}, r_{11} \in \{0, 1, \ldots, 18\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Упрощение формул $(+)$ с использованием числа пересечений, полученных в лемме 7, а также с учетом равенств $(*)$.

По лемме 8 с учетом неравенств $0 \le r_{11} \le 18$ и $0 \le r_{12} \le 18$ имеем

$$1272 \le [222] = r_{12}/2 + r_{11}/2 + 1272 \le 18/2 + 18/2 + 1272 = 1290.$$

Лемма 9. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 2, d(v,w) = 3$. *Тогда*

$$[112] = -r_{13} + 36, \qquad [113] = r_{13},\ [121] = -r_{14} + 36,$$
$$[122] = \frac{4}{3} r_{14} - \frac{2}{3} r_{15} + \frac{2}{3} r_{13} + 194, \qquad [123] = -\frac{1}{3} r_{14} + \frac{2}{3} r_{15} - \frac{2}{3} r_{13} + 18,$$
$$[131] = r_{14}, \qquad [132] = -\frac{4}{3} r_{14} + \frac{2}{3} r_{15} + \frac{1}{3} r_{13} + 18,$$
$$[133] = \frac{1}{3} r_{14} - \frac{2}{3} r_{15} - \frac{1}{3} r_{13} + 18;$$
$$[212] = -\frac{2}{3} r_{14} - \frac{2}{3} r_{15} + \frac{2}{3} r_{13} + 204, \qquad [213] = \frac{2}{3} r_{14} + \frac{2}{3} r_{15} - \frac{2}{3} r_{13} + 44,$$
$$[221] = \frac{4}{3} r_{14} - \frac{2}{3} r_{15} - \frac{4}{3} r_{13} + 204, \qquad [222] = -\frac{5}{3} r_{14} + \frac{7}{3} r_{15} + \frac{2}{3} r_{13} + 1233,$$
$$[223] = \frac{1}{3} r_{14} - \frac{5}{3} r_{15} + \frac{2}{3} r_{13} + 222, \qquad [231] = -\frac{4}{3} r_{14} + \frac{2}{3} r_{15} + \frac{4}{3} r_{13} + 44,$$
$$[232] = \frac{7}{3} r_{14} - \frac{5}{3} r_{15} - \frac{4}{3} r_{13} + 222, \qquad [233] = -r_{14} + r_{15} - 15;$$
$$[312] = \frac{2}{3} r_{14} + \frac{2}{3} r_{15} + \frac{1}{3} r_{13}, \qquad [313] = -\frac{2}{3} r_{14} - \frac{2}{3} r_{15} - \frac{1}{3} r_{13} + 36,$$
$$[321] = -\frac{1}{3} r_{14} + \frac{2}{3} r_{15} + \frac{4}{3} r_{13}, \qquad [322] = \frac{1}{3} r_{14} - \frac{5}{3} r_{15} - \frac{4}{3} r_{13} + 252,$$
$$[323] = r_{15}, \qquad [331] = \frac{1}{3} r_{14} - \frac{2}{3} r_{15} - \frac{4}{3} r_{13} + 36,$$
$$[332] = -r_{14} + r_{15} + r_{13}, \qquad [333] = \frac{2}{3} r_{14} - \frac{1}{3} r_{15} + \frac{1}{3} r_{13},$$

где $r_{14}, r_{13} \in \{0, 1, \ldots, 19\}$, $r_{15} \in \{15, 16, \ldots, 36\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Упрощения формул (+) с учетом равенств (∗).

Теперь

$$[113] = r_{13} = [131]' = r'_{14}, \quad [233] = -r_{14} + r_{15} - 15 = -r'_{14} + r'_{15} - 15 \ \text{ и } \ -r_{14} + r_{15} + r_{13} = r'_{15}.$$

Положим $\{z_1, z_2, z_3\} = \Gamma_3(v) \cap \Gamma_3(w)$. По предложению 1 подграф $\Gamma_3(u)$ является антиподальным дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{80, 51, 1; 1, 17, 80\}$. Если $u \in \Gamma_3(z_i)$, то по лемме 9 имеем $[133] = (r_{14} - 2r_{15} - r_{13})/3 + 18 = 1$, $[233] = -r_{14} + r_{15} - 15 = 1$ и $[333] = (2r_{14} - r_{15} + r_{13})/3 = 1$. Отсюда $r_{15} = r_{14} + 16$, $r_{13} = 19 - r_{14}$ и $r'_{15} = -r_{14} + (r_{14} + 16) + (19 - r_{14}) = 35 - r_{14}$. Так как $[112] = r_{14} + 17$, то $r_{14} = r^*_{14}$. Далее, $[122] = 196$, $[212] = -2r_{14} + 206$, поэтому $r_{14} = 5$ и $r'_{14} = 14$. Поменяв местами вершины v и w, получим $r_{14} = 14$; противоречие.

Если же u не попадает в $\Gamma_3(z_i)$ для $i = 1, 2, 3$, то u смежна не более чем с одной вершиной из $\{z_1, z_2, z_3\}$, поэтому u находится на расстоянии 2 от, по крайней мере, 4 вершин из $C = \{v, w, z_1, z_2, z_3\}$. Значит, любая вершина, находящаяся на расстоянии 2 от двух вершин из C, находится на расстоянии 2 от, по крайней мере, 4 вершин из C.

Пусть $y \in \Gamma_3(v) - \{w, z_1, z_2, z_3\}$. Тогда y смежна не более чем с одной вершиной из $\{w, z_1, z_2, z_3\}$ и находится на расстоянии 2 от, по крайней мере, трех вершин из $\{w, z_1, z_2, z_3\}$. Как показано выше, y не может находиться на расстоянии 3 от вершин из $\{v, w, z_1, z_2, z_3\}$; противоречие.

Итак, дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{320, 243, 36; 1, 36, 240\}$ не существует. □

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Koolen J.H., Park J.** Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb. 2010. Vol. 31, no. 8. P. 2064–2073. doi: 10.1016/j.ejc.2010.05.012 .
2. **Jurishic A., Vidali J.** Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // Des. Codes Cryptogr. 2012. Vol. 65. P. 29–47.
3. **Белоусов И.Н.** Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = sc_2$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 16–26. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-16-26 .
4. **Brouwer A.E., Sumaloj S., Worawannotai C.** The nonexistence of distance-regular graphs with intersection arrays $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$ and $\{36, 28, 4; 1, 2, 24\}$ // Australasian J. Comb. 2016. Vol. 66, no. 2. P. 330–332.
5. **Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A.** Distance-regular graphs with intersection arrays $\{52, 35, 16; 1, 4, 28\}$ and $\{69, 48, 24; 1, 4, 46\}$ do not exist // Des. Codes Cryptogr. 2012. Vol. 65. P. 49–54.
6. **Белоусов И.Н., Махнев А.А.** Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ не существует // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 206–216. doi: 10.33048/semi.2019.16.012 .
7. **Белоусов И.Н., Махнев А.А.** Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ и $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ не существуют // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 1506–1512. doi: 10.33048/semi.2018.15.125 .
8. **Bannai E., Ito T.** Algebraic combinatorics I: Association schemes. Menlo Park: Benjamin/Cummings, 1984. 425 p. ISBN: 0805304908 .
9. **Penttila T., Williford J.** New families of Q-polynomial association schemes // J. Comb. Theory. Series A. 2011. Vol. 118, iss. 2. P. 502–509. doi: 10.1016/j.jcta.2010.08.001 .
10. **Kurihara H., Nozaki H.** A characterization of Q-polynomial association schemes // J. Comb. Theory. Series A. 2012. Vol. 119. P. 57–62. doi: 10.1016/j.jcta.2011.07.008 .
11. **Suda S.** On Q-polynomial association schemes of small class // Electron. J. Comb. 2012. Vol. 19, no. 1. Art. no. P68. doi: 10.37236/2157 .
12. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; NY: Springer-Verlag, 1989. 495 p. ISBN: 0387506195 .
13. **Vidali J.** Kode v razdaljno regularnih grafih: Doctorska dissertacija / Univerza v Ljubljani. Ljubljana, 2013. 155 str.
14. **Coolsaet K.** A distance regular graph with intersection array (21, 16, 8; 1, 4, 14) does not exist // Europ. J. Comb. 2005. Vol. 26, no. 5. C. 709–716. doi: 10.1016/j.ejc.2004.04.005 .

15. **Махнев А.А., Белоусов И.Н., Голубятников М.П., Нирова М.С.** Три бесконечные серии графов Шилла не существуют // Докл. АН. Vol. 498, no. 1. 2021. С. 45–50. doi: 10.31857/S2686954321030115 .

Поступила 15.03.2022
После доработки 15.04.2022
Принята к публикации 18.04.2022

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук
чл.-корр. РАН, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: iai@imm.uran.ru

Белоусов Иван Николаевич
канд. физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: i_belousov@mail.ru

Голубятников Михаил Петрович
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: mike_ru1@mail.ru

REFERENCES

1. Koolen J.H., Park J. Shilla distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, 2010, vol. 31, no. 8, pp. 2064–2073. doi: 10.1016/j.ejc.2010.05.012 .
2. Jurisic A., Vidali J. Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3. *Des. Codes Cryptogr.*, 2012, vol. 65, pp. 29–47.
3. Belousov I.N. Shilla distance-regular graphs with $b_2 = sc_2$. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 16–26 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-16-26 .
4. Brouwer A.E., Sumaloj S., Worawannotai C. The nonexistence of distance-regular graphs with intersection arrays $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$ and $\{36, 28, 4; 1, 2, 24\}$. *Australasian J. Comb.*, 2016, vol. 66, no. 2, pp. 330–332.
5. Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A. Distance-regular graphs with intersection arrays $\{52, 35, 16; 1, 4, 28\}$ and $\{69, 48, 24; 1, 4, 46\}$ do not exist. *Des. Codes Cryptogr.*, 2012, vol. 65, no. 1-2, pp. 49–54. doi: 10.1007/s10623-012-9695-1 .
6. Belousov I.N., Makhnev A.A. Distance-regular graph with intersection array $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ does not exist. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, vol. 16, pp. 206–216 (in Russian). doi: 10.33048/semi.2019.16.012 .
7. Belousov I.N., Makhnev A.A. Distance-regular graphs with intersection arrays $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ and $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ do not exist. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2018, vol. 15, pp. 1506–1512 (in Russian). doi: 10.33048/semi.2018.15.125 .
8. Bannai E., Ito T. *Algebraic combinatorics I: Association schemes.* Menlo Park: Benjamin/Cummings, 1984, 425 p. ISBN: 0805304908 .
9. Penttila T., Williford J.S. New families of Q-polynomial association schemes. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 2011, vol. 118, no. 2, pp. 502–509. doi: 10.1016/j.jcta.2010.08.001 .
10. Kurihara H., Nozaki H. A characterization of Q-polynomial association schemes. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 2012, vol. 119, no. 1, pp. 57–62. doi: 10.1016/j.jcta.2011.07.008 .
11. Suda S. On Q-polynomial association schemes of small class. *Electron. J. Comb.*, 2012, vol. 19, no. 1, art. no. P68. doi: 10.37236/2157 .

12. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs*. Berlin; Heidelberg; NY: Springer-Verlag, 1989, 495 p. ISBN: 0387506195 .
13. Vidali J. *Kode v razdaljno regularnih grafih*. Doctorska Dissertacija. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, 2013, 155 p.
14. Coolsaet K. Distance-regular graph with intersection array $(21, 16, 8; 1, 4, 14)$ does not exist. *Europ. J. Comb.*, 2005, vol. 26, no. 5, pp. 709–716. doi: 10.1016/j.ejc.2004.04.005 .
15. Makhnev A.A., Belousov I.N., Golubyatnikov M.P., Nirova M.S. Three infinite families of Shilla graphs do not exist. *Dokl. Ross. Akad. Nauk*, 2021, vol. 498, no. 1, pp. 45–50 (in Russian). doi: 10.31857/S2686954321030115 .

Received March 15, 2022
Revised April 15, 2022
Accepted April 18, 2022

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project 19-71-10067).

Aleksandr Alekseevich Makhnev, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: makhnev@imm.uran.ru .

Ivan Nikolaevich Belousov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: i_belousov@mail.ru .

Mikhail Petrovich Golubyatnikov, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: mike_ru1@mail.ru .

Cite this article as: A. A. Makhnev, I. N. Belousov, M. P. Golubyatnikov. On Q-polynomial Shilla graphs with $b = 4$. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 176–186 .