ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 2 2022

УДК 512.542

О СОВПАДЕНИИ ГРАФОВ ГРЮНБЕРГА — КЕГЕЛЯ ПОЧТИ ПРОСТОЙ ГРУППЫ И НЕРАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ ФРОБЕНИУСА[1]

Н. В. Маслова, К. А. Ильенко

Пусть G — конечная группа. Множество порядков всех элементов группы G называется ее спектром и обозначается через $\omega(G)$. Простым спектром $\pi(G)$ группы G называется множество всех простых делителей ее порядка. Графом Грюнберга — Кегеля (или графом простых чисел) $\Gamma(G)$ группы G называется обыкновенный граф, множество вершин которого совпадает с множеством $\pi(G)$, и две вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Из структурной теоремы Грюнберга — Кегеля следует, что класс конечных групп с несвязными графами Грюнберга — Кегеля широко обобщает класс конечных групп Фробениуса, роль которых в теории конечных групп совершенно исключительна. Естественным образом возникает вопрос о совпадении графов Грюнберга — Кегеля конечной группы Фробениуса и конечной почти простой группы с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Ответ на этот вопрос известен в случаях, когда группа Фробениуса разрешима и когда почти простая группа совпадает со своим цоколем. В этой короткой заметке мы даем ответ на этот вопрос в случае, когда группа Фробениуса неразрешима, а цоколь почти простой группы изоморфен группе $PSL_2(q)$ для некоторого q.

Ключевые слова: конечная группа, граф Грюнберга — Кегеля (граф простых чисел), неразрешимая группа Фробениуса, почти простая группа

N. V. Maslova, K. A. Ilenko. On the coincidence of Gruenberg–Kegel graphs of an almost simple group and a nonsolvable Frobenius group.

Let G be a finite group. Its spectrum $\omega(G)$ is the set of all element orders of G. The prime spectrum $\pi(G)$ is the set of all prime divisors of the order of G. The Gruenberg–Kegel graph (or the prime graph) $\Gamma(G)$ is a simple graph whose vertex set is $\pi(G)$, and two distinct vertices p and q are adjacent in $\Gamma(G)$ if and only if $pq \in \omega(G)$. The structural Gruenberg–Kegel theorem implies that the class of finite groups with disconnected Gruenberg–Kegel graphs widely generalizes the class of finite Frobenius groups, whose role in finite group theory is absolutely exceptional. The question of coincidence of Gruenberg–Kegel graphs of a finite Frobenius group and of an almost simple group naturally arises. The answer to the question is known in the cases when the Frobenius group is solvable and when the almost simple group coincides with its socle. In this short note we answer the question in the case when the Frobenius group is nonsolvable and the socle of the almost simple group is isomorphic to $PSL_2(q)$ for some q.

Keywords: finite group, Gruenberg–Kegel graph (prime graph), nonsolvable Frobenius group, almost simple group.

MSC: 20D06, 20D60

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-168-175

Введение

В этой работе мы рассматриваем только конечные группы, поэтому термин “группа” означает “конечная группа”. Наши обозначения и терминология, в основном, стандартны, их можно найти в [9; 10; 12; 13; 15; 16].

Будем обозначать через $\mathrm{Soc}(G)$ *цоколь* группы G (т. е. подгруппу группы G, порожденную всеми ее минимальными нетривиальными нормальными подгруппами). Напомним, что группа G называется *почти простой*, если $\mathrm{Soc}(G)$ — неабелева простая группа. Хорошо известно, что группа G почти проста тогда и только тогда, когда существует неабелева простая группа S такая, что $\mathrm{Inn}(S) \trianglelefteq G \leq \mathrm{Aut}(S)$; более того, здесь $\mathrm{Inn}(S) \cong S$, поэтому мы будем отождествлять S и $\mathrm{Inn}(S)$ и писать $S \trianglelefteq G \leq \mathrm{Aut}(S)$.

[1]Работа выполнена за счет Российского научного фонда (проект 19-71-10067).

Группа G называется *группой Фробениуса*, если существует неединичная подгруппа $C < G$ такая, что $C \cap C^g = \{1\}$, если $g \in G \setminus C$. Подгруппа C в этом случае называется *дополнением Фробениуса* в G. Пусть

$$K = \{1\} \cup (G \setminus \cup_{g \in G} C^g).$$

Тогда хорошо известно, что K — нормальная подгруппа в G, которая называется *ядром Фробениуса* группы G. Класс групп Фробениуса играет совершенно исключительную роль в теории конечных групп. Группа G называется 2-*фробениусовой группой*, если $G = ABC$, где A и AB — нормальные подгруппы в G, AB и BC — группы Фробениуса с ядрами A и B и дополнениями B и C соответственно. Хорошо известно, что любая 2-фробениусова группа разрешима.

Пусть G — группа. Множество порядков всех элементов группы G называется ее *спектром* и обозначается через $\omega(G)$. *Простым спектром* $\pi(G)$ группы G называется множество всех простых делителей ее порядка (эквивалентно, множество всех простых элементов из $\omega(G)$). *Графом Грюнберга — Кегеля* (или *графом простых чисел*) $\Gamma(G)$ называется обыкновенный граф, множество вершин которого совпадает с множеством $\pi(G)$, а две вершины p и q в нем смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число связных компонент графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq s(G)\}$; для группы G четного порядка мы предполагаем, что $2 \in \pi_1(G)$.

Понятие графа Грюнберга — Кегеля возникло в связи с изучением некоторых когомологических вопросов теории целочисленных групповых колец: было установлено, что разностный идеал целочисленного группового кольца разложим как модуль тогда и только тогда, когда граф Грюнберга — Кегеля группы несвязен (см. [14]). К. Грюнберг и О. Кегель описали строение произвольной конечной группы с несвязным графом Грюнберга — Кегеля, в их неизданной работе была доказана соответствующая структурная теорема, опубликованная позднее Дж. Уильямсом [18], учеником К. Грюнберга.

Теорема Грюнберга — Кегеля (см. [18, теорема A]). *Если G — группа с несвязным графом $\Gamma(G)$, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *G — группа Фробениуса*;

(2) *G — 2-фробениусова группа*;

(3) *G — расширение нильпотентной группы N с помощью группы A, где $S \trianglelefteq A \leq \mathrm{Aut}(S)$, S — неабелева простая группа, $s(G) \leq s(S)$, при этом $\pi(N) \cup \pi(A/S) \subseteq \pi_1(G)$.*

Как видно из теоремы Грюнберга — Кегеля, класс групп с несвязными графами Грюнберга — Кегеля широко обобщает класс конечных групп Фробениуса. Естественным образом возникает вопрос о совпадении графов Грюнберга — Кегеля групп из разных пунктов теоремы Грюнберга — Кегеля, в частности, вопрос о совпадении графов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ в случаях, когда G — почти простая группа, а H — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа. Случай, когда G — неабелева простая группа, был полностью рассмотрен М. Р. Зиновьевой и В. Д. Мазуровым [4], а соответствующие результаты в случае, когда H — разрешима, можно извлечь из основных результатов работ [2] и [3]. Таким образом, остается неисследованным случай, когда G — почти простая, но не простая группа, а H — неразрешимая группа Фробениуса. В частных случаях последний вопрос исследовался, например, в работе А. Махмодифара [17], где был построен пример неразрешимой группы Фробениуса с таким же графом Грюнберга — Кегеля, как у группы $PGL_2(49)$. В этой статье мы даем описание всех почти простых групп с цоколем, изоморфным группе $PSL_2(q)$, графы Грюнберга — Кегеля которых совпадают с графами Грюнберга — Кегеля некоторых неразрешимых групп Фробениуса. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть q — степень простого числа p и G — почти простая группа такая, что $\mathrm{Soc}(G) \cong PSL_2(q)$. Тогда существует неразрешимая группа Фробениуса H такая, что*

$\Gamma(G) = \Gamma(H)$, *если и только если* G *— группа из следующего списка*: $PSL_2(11).2 \cong PGL_2(11)$, $PSL_2(19).2 \cong PGL_2(19)$, $PSL_2(25).2_2$, $PGL_2(49).2_1 \cong PGL_2(49)$, $PSL_2(81).2_1$, $PSL_2(81).4_1$, $PSL_2(81).4_2$.

1. Предварительные результаты

Наибольшая целая неотрицательная степень простого числа p, которая делит натуральное число n, называется p-частью числа n и обозначается через n_p. Множество всех простых делителей целого положительного числа n будем обозначать через $\pi(n)$.

Следующие утверждения хорошо известны и доказываются элементарно (соответствующие ссылки приводятся для полноты доказательства).

Лемма 1.1 (см., например, [7, лемма 9]). *Пусть* q *и* n *— нечетные натуральные числа. Тогда* $(q^n + 1)_2 = (q + 1)_2$ *и* $(q^n - 1)_2 = (q - 1)_2$.

Лемма 1.2 (см., например, [19, лемма 6]). *Пусть* q *— целое число, большее* 1, k *и* m *— натуральные числа. Тогда*

(1) $(q^k - 1, q^m - 1) = q^{(k,m)} - 1$;

(2) $(q^k + 1, q^m + 1) = q^{(k,m)} + 1$, *если* $k_2 = m_2$, *и* $(q^k + 1, q^m + 1) = (2, q + 1)$ *в противном случае*;

(3) $(q^k - 1, q^m + 1) = q^{(k,m)} + 1$, *если* $k_2 > m_2$, *и* $(q^k - 1, q^m + 1) = (2, q + 1)$ *в противном случае.*

Лемма 1.3 (см., например, [8, лемма 2]). *Если* K *— нормальная подгруппа группы* L *и* $r, s \in \pi(K) \setminus \pi(|L : K|)$, *то числа* r *и* s *не смежны в графе* $\Gamma(K)$ *тогда и только тогда, когда они не смежны в графе* $\Gamma(L)$.

Следующие утверждения также будут полезны для доказательства теоремы 1.

Лемма 1.4 (см. [6, лемма 1.3]). *Пусть* $q = p^m$, *где* p *— простое число,* m *— натуральное число и* $|\pi(q^2 - 1)| = 3$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(i) $17 \neq q = p \geq 11$, $p^2 - 1 = 2^a 3^b s^c$, *где* $s > 3$ *— простое число,* a *и* b *— натуральные числа и* c *равно либо* 1, *либо* 2 *при* $p \in \{97, 577\}$;

(ii) $q \in \{16,\ 25,\ 27,\ 49,\ 81\}$;

(iii) $p \in \{2,\ 3\}$, $\dfrac{q-1}{(2,\ q-1)}$ *и* m *— простые нечетные числа,* $\left|\pi\Big(\dfrac{q+1}{p+1}\Big)\right| = 1$.

Лемма 1.5 (см. [11]). *Пусть* p *и* q *— простые числа такие, что* $p^a - q^b = 1$ *для некоторых натуральных* a *и* b. *Тогда* $(p^a, q^b) \in \{(3^2, 2^3),\ (p, 2^b),\ (2^a, q)\}$, *где* a *— простое число и* b *— степень числа* 2.

Если r — нечетное простое число, а $q > 1$ — натуральное число, взаимно простое с r, то положим
$$e(q, r) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid q^k \equiv 1 \pmod r\}.$$

Лемма 1.6 (Теорема Жигмонди, см., например, [20]). *Пусть* q *и* m *— натуральные числа, большие* 1. *Тогда найдется такое нечетное простое число* r, *что* $e(q, r) = m$, *за исключением следующих случаев*:

(1) *$q = 2$ и $m = 6$;*

(2) *$q = 2^l - 1$ для некоторого $l > 1$ и $m = 2$.*

Лемма 1.7. *Пусть $q = p^k$, где p — простое число и k — натуральное число. Если $\pi(q^2 - 1) = \{2, 3, 5\}$, то $q \in \{11, 19, 49\}$.*

Доказательство. Используем лемму 1.4. Из леммы 1.6 следует, что q не может быть числом из п. (iii) леммы 1.4, а если q — число из п. (ii) этой леммы, то $q = 49$.

Пусть теперь $q = p$ — число из п. (i) леммы 1.4 и $p^2 - 1 = 2^a 3^b s^c$. Легко понять, что если $s = 5$, то $p \notin \{97, 577\}$, поэтому $c = 1$.

Предположим, что $q \equiv 1 \pmod 4$. Тогда либо $p+1 = 2 \cdot 3^u$ и $p-1 = 2^w \cdot 5$, либо $p+1 = 2 \cdot 5$ и $p - 1 = 2^w \cdot 3^v$ для некоторых целых положительных чисел u, v и w. Второй случай не возникает, так как в этом случае $p = 9$ не является простым числом. Пусть $p + 1 = 2 \cdot 3^u$ и $p - 1 = 2^w \cdot 5$. Тогда

$$p = 2 \cdot 3^u - 1 = 2^w \cdot 5 + 1, \text{ поэтому } 3^u - 1 = 2^{w-1} \cdot 5.$$

Предположим, что u четно. Тогда $3^u - 1 = (3^{u/2} - 1)(3^{u/2} + 1)$, при этом $(3^{u/2} - 1, 3^{u/2} + 1) = 2$. Значит, либо $3^{u/2} - 1$ является степенью числа 2, либо $3^{u/2} + 1$ является степенью числа 2. По лемме 1.5 либо $3^u - 1 = 8$, либо $3^u - 1 = 80$. В первом случае $p = 2 \cdot (3^u - 1) + 1 = 17$, при этом $\pi(p^2 - 1) = \{2, 3\}$, во втором случае $p = 2 \cdot (3^u - 1) + 1 = 161 = 7 \cdot 23$ не является простым числом. При нечетном u число $3^u - 1$ дает в остатке 1 или 2 при делении на 5, поэтому равенство выполняться не может.

Предположим, что $q \equiv 3 \pmod 4$. Тогда либо $p-1 = 2 \cdot 3^u$ и $p+1 = 2^w \cdot 5$, либо $p-1 = 2 \cdot 5$ и $p+1 = 2^w \cdot 3^v$ для некоторых целых положительных чисел u, v и w. Во втором случае имеем $p = 11$ и $\pi(p^2 - 1) = \{2, 3, 5\}$. Пусть $p - 1 = 2 \cdot 3^u$ и $p + 1 = 2^w \cdot 5$. Тогда

$$p = 2 \cdot 3^u + 1 = 2^w \cdot 5 - 1, \text{ поэтому } 3^u + 1 = 2^{w-1} \cdot 5.$$

Пусть u нечетно. Тогда $3^u + 1$ при делении на 5 дает в остатке 4 или 3, значит, равенство выполняться не может. Таким образом, u четно и $u = 2u_0$. Легко понять, что $((3^{u_0})^2 + 1)_2 = 2$, поэтому 2^{w-1}=2 и $(3^{u_0})^2 + 1 = 2 \cdot 5 = 10$, значит, $3^u = 9$, откуда $p = 19$ — простое число такое, что $\pi(p^2 - 1) = \{2, 3, 5\}$. □

Лемма 1.8 (см. [4, лемма 3, предложение 1]). (1) *Если G — неразрешимая группа Фробениуса, то $\Gamma(G)$ — объединение двух компонент связности, одна из которых — полный граф, а вторая содержит вершины 2, 3 и 5 и является полным графом, из которого удалено ребро $\{3, 5\}$.*

(2) *Конечные непересекающиеся множества π_1 и π_2, состоящие из простых чисел, являются компонентами связности графа $\Gamma(G)$ некоторой неразрешимой группы Фробениуса G тогда и только тогда, когда одно из этих множеств содержит 2, 3 и 5.*

Лемма 1.9 (см. [13, теорема 4.5.1, предложения 2.5.12, 4.9.1, 4.9.2]). *Пусть $S = PSL_2(q)$, где $q = p^m$, p — простое число и $q > 3$, x — элемент простого порядка r в $\mathrm{Aut}(S) \setminus \mathrm{Inndiag}(S)$ и $S_x = O^{p'}(C_S(x))$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$\mathrm{Aut}(S) = \mathrm{Inndiag}(S) \rtimes \Phi$, где $\mathrm{Outdiag}(S) \cong Z_{(2,q-1)} \in \{1, Z_2\}$, $\Phi = \langle f \rangle \cong \mathrm{Aut}(F_q) \cong Z_m$ — группа полевых автоморфизмов группы S и $\mathrm{Out}(S) = \mathrm{Outdiag}(S) \times \Phi$;*

(2) *число r делит m, $S_x \cong PSL_2(q^{1/r})$ и $C_{\mathrm{Inndiag}(S)}(x) \cong \mathrm{Inndiag}(S_x)$.*

2. Доказательство теоремы 1

Пусть G — почти простая группа такая, что $S = \mathrm{Soc}(G) \cong PSL_2(q)$, где $q = p^m$ и p — простое число.

Спектр группы S известен (см. [1, следствие 3]). Если q четно, то $\Gamma(S)$ состоит из трех клик: $\pi_1(S) = \{2\}$ и без ограничения общности $\pi_2(S) = \pi(q-1)$ и $\pi_3(S) = \pi(q+1)$. Если q нечетно и $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$, то $\Gamma(S)$ состоит из трех клик: $\pi_1(S) = \pi(q - \varepsilon 1)$ и без ограничения общности $\pi_2(S) = \pi\bigl(\dfrac{q+\varepsilon 1}{2}\bigr)$ и $\pi_3(S) = \{p\}$.

Предположим, что существует неразрешимая группа Фробениуса H со свойством $\Gamma(G) = \Gamma(H)$. Применим лемму 1.8. Легко понять, что $G \neq S$. Заметим, что числа 2 и 3 делят порядок S при любом q. Покажем, что 5 делит $|S|$. Если это не так, то 5 делит индекс $|G:S|$, поэтому ввиду леммы 1.9 существует $x \in G \setminus S$ порядка 5, при этом порядок подгруппы $C_S(x)$ делится на число 3, откуда следует, что числа 3 и 5 смежны в $\Gamma(G)$; противоречие.

Пусть $p = 2$. Если $\{3,5\} \subseteq \pi_2(S)$ или $\{3,5\} \subseteq \pi_3(S)$, то числа 3 и 5 смежны в $\Gamma(S)$, следовательно, смежны в $\Gamma(G)$, получаем противоречие. Если $3 \in \pi_2(S)$ и $5 \in \pi_3(S)$ или $3 \in \pi_3(S)$ и $5 \in \pi_2(S)$, то, поскольку $\{2,3,5\} \subseteq \pi_1(G)$, имеем, что граф $\Gamma(G)$ связен, вновь получаем противоречие. Поэтому p нечетно.

Пусть $p \notin \{3,5\}$. Снова если $\{3,5\} \subseteq \pi_1(S)$ или $\{3,5\} \subseteq \pi_2(S)$, то числа 3 и 5 смежны в $\Gamma(S)$, следовательно, смежны в $\Gamma(G)$, получаем противоречие. Отсюда либо $3 \in \pi_1(S)$ и $5 \in \pi_2(S)$, либо $3 \in \pi_2(S)$ и $5 \in \pi_1(S)$. Предположим, что индекс $|G:S|$ не является степенью числа 2 и r — нечетный простой делитель индекса $|G:S|$. Тогда по лемме 1.9 существует элемент $x \in G \setminus S$ порядка r, при этом порядок подгруппы $C_S(x)$ делится на числа 2 и p, откуда $p \in \pi_1(G)$. В то же время $3 \in \pi_1(G)$ и $5 \in \pi_1(G)$, значит, граф $\Gamma(G)$ связен; противоречие. Поэтому получаем, что индекс $|G:S|$ является степенью числа 2. Предположим, что существует число $u \in \pi(q^2-1) \setminus \{2,3,5\}$. Тогда $u \in \pi_1(G)$, значит, u смежно с 3 и с 5 в $\Gamma(G)$, поэтому по лемме 1.3 u смежно с 3 и с 5 в $\Gamma(S)$, откуда 3 и 5 лежат в одной компоненте смежности $\Gamma(S)$; противоречие. Поэтому $\pi(q^2-1) = \{2,3,5\}$, следовательно, по лемме 1.7 имеем $q \in \{11,19,49\}$.

Пусть $p = 5$. Поскольку $5 \equiv 1 \pmod 4$, имеем $q \equiv 1 \pmod 4$ и $\pi_1(S) = \pi(q-1)$. Если $3 \in \pi_2(S)$, то, поскольку $\{2,3,5\} \subseteq \pi_1(G)$, граф $\Gamma(G)$ связен; противоречие. Отсюда $3 \in \pi_1(S)$, т. е. число 3 делит число $5^m - 1$, откуда m четно. Предположим, что индекс $|G:S|$ не является степенью числа 2 и r — нечетный простой делитель индекса $|G:S|$. Тогда по лемме 1.9 существует элемент $x \in G \setminus S$ порядка r, при этом $C_S(x) \geq PSL_2(q^{1/r})$ и $|PSL_2(q^{1/r})| = \dfrac{q^{1/r}}{2}(q^{2/r}-1)$, поэтому ввиду леммы 1.2 граф $\Gamma(G)$ в этом случае связен; противоречие. Итак, индекс $|G:S|$ является степенью числа 2. Предположим, что существует число $u \in \pi(q-1) \setminus \{2,3\}$. Тогда $u \in \pi_1(S) \subseteq \pi_1(G)$, и, так как $5 \in \pi_3(S)$, по лемме 1.3 u не смежно с 5 в $\Gamma(G)$; противоречие. Поэтому $\pi(q-1) = \{2,3\}$, откуда число $q^{m/2}-1$ является степенью числа 2 или число $q^{m/2}+1$ является степенью числа 2, следовательно, по лемме 1.5 имеем $m/2 = 1$, откуда $q = 25$.

Пусть $p = 3$. Если $5 \in \pi_2(S)$, то, поскольку $\{2,3,5\} \subseteq \pi_1(G)$, граф $\Gamma(G)$ связен; противоречие. Поэтому $5 \in \pi_1(S)$. Если m нечетно, то $q \equiv -1 \pmod 4$, $\pi_1(S) = \pi(q+1)$ и $5 \notin \pi_1(S)$; противоречие. Поэтому m четно, $q \equiv 1 \pmod 4$ и $\pi_1(S) = \pi(q-1)$. Предположим, что индекс $|G:S|$ не является степенью числа 2, и r — нечетный простой делитель индекса $|G:S|$. Тогда по лемме 1.9 существует элемент $x \in G \setminus S$ порядка r, при этом $C_S(x) \geq PSL_2(q^{1/r})$ и $|PSL_2(q^{1/r})| = \dfrac{q^{1/r}}{2}(q^{2/r}-1)$, поэтому ввиду леммы 1.2 граф $\Gamma(G)$ в этом случае связен; противоречие. Итак, индекс $|G:S|$ является степенью числа 2. Предположим, что существует число $u \in \pi(q-1) \setminus \{2,5\}$. Тогда $u \in \pi_1(S) \subseteq \pi_1(G)$, так как $3 \in \pi_3(S)$, и по лемме 1.3 u не смежно с 3 в $\Gamma(G)$; противоречие. Поэтому $\pi(q-1) = \{2,5\}$, откуда число $q^{m/2}-1$ является степенью числа 2 или число $q^{m/2}+1$ является степенью числа 2, следовательно, по лемме 1.5 имеем $m/2 \in \{1,2\}$, откуда $q \in \{9,81\}$. Однако $\pi(PSL_2(9)) = \{2,3,5\}$, поэтому, если $S \cong PSL_2(9)$, то граф $\Gamma(G)$ связен; противоречие. Поэтому $q = 81$.

Таким образом, $q \in \{11, 19, 25, 49, 81\}$ и, следовательно, $|\pi(S)| = |\pi(\mathrm{Aut}(S))| = 4$. Графы Грюнберга — Кегеля почти простых 4-примарных групп известны [5; 6]. Из леммы 1.8 и [6, табл. 1] с учетом сделанных в [5] исправлений следует, что существует неразрешимая группа Фробениуса H со свойством $\Gamma(G) = \Gamma(H)$ тогда и только тогда, когда G — одна из следующих групп: $PSL_2(11).2 \cong PGL_2(11)$, $PSL_2(19).2 \cong PGL_2(19)$, $PSL_2(25).2_2$, $PGL_2(49).2_1 \cong PGL_2(49)$, $PSL_2(81).2_1$, $PSL_2(81).4_1$, $PSL_2(81).4_2$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бутурлакин А.А.** Спектры конечных линейных и унитарных групп // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 157–173.
2. **Горшков И.Б., Маслова Н.В.** Конечные почти простые группы с графами Грюнберга — Кегеля как у разрешимых групп // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 2. С. 175–196. doi: 10.17377/alglog.2018.57.203 .
3. **Зиновьева М.Р., Кондратьев А.С.** Конечные почти простые группы с графами простых чисел, все связные компоненты которых являются кликами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 132–141.
4. **Зиновьева М.Р., Мазуров В.Д.** О конечных группах с несвязным графом простых чисел // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 99–105.
5. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** Письмо в редакцию // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 1. С. 276–277. doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-276-277 .
6. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 142–159.
7. **Маслова Н.В.** Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 100–118.
8. **Маслова Н.В.** О совпадении графов Грюнберга — Кегеля конечной простой группы и ее собственной подгруппы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 156–168.
9. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407). doi: 10.1017/CBO9781139192576 .
10. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
11. **Gérono G.C.** Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math (2). 1870. Vol. 9. P. 469–471.
12. **Gorenstein D.** Finite groups. NY: Chelsea, 1968. 520 p.
13. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Providence, RI : American Math. Soc., 1998. (Vol. 40.3 of Mathematical Surveys and Monographs.)
14. **Gruenberg K.W., Roggenkamp K.W.** Decomposition of the augmentation ideal and of the relation modules of a finite group // Proc. London Math. Soc. (3). 1975. Vol. 31, no. 2. P. 149–166. doi: 10.1112/plms/s3-31.2.149 .
15. An atlas of Brauer characters / C. Jansen [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1995. 327 p.
16. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1990. 304 p.
17. **Mahmoudifar A.** On some Frobenius groups with the same prime graph as the almost simple group $PGL(2, 49)$ [e-resource]. 2016. 7 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1601.00146.pdf .
18. **Williams J. S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513. doi: 10.1515/jgth.2003.044 .
19. **Zavarnitsine A. V.** Recognition of the simple groups $L_3(q)$ by element orders // J. Group Theory. 2004. Vol. 7, no. 1. P. 81–97.
20. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // J. Monatshefte Math. Phys. 1892. Vol. 3. P. 265–284. doi: 10.1007/BF01692444 .

Поступила 28.01.2022
После доработки 30.04.2022
Принята к публикации 5.05.2022

Маслова Наталья Владимировна
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: butterson@mail.ru

Ильенко Кристина Альбертовна
аспирант
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: christina.ilyenko@yandex.ru

REFERENCES

1. Buturlakin A.A. Spectra of finite linear and unitary groups. *Algebra and Logic*, 2008, vol. 47, no. 2, pp. 91–99. doi: 10.1007/s10469-008-9003-3 .
2. Gorshkov I.B., Maslova N.V. Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs coincide with Gruenberg–Kegel graphs of solvable groups. *Algebra and Logic*, 2018, vol. 57, no. 2, pp. 115–129. doi: 10.1007/s10469-018-9484-7 .
3. Zinov'eva M.R., Kondrat'ev A.S. Finite almost simple groups with prime graphs all of whose connected components are cliques. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 295, suppl. 1, pp. 178–188. doi: 10.1134/S0081543816090194 .
4. Zinov'eva M.R., Mazurov V.D. On finite groups with disconnected prime graph. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2013, vol. 283, suppl. 1, pp. 139–145. doi: 10.1134/S0081543813090149 .
5. Kondrat'ev A.S., Khramtsov I.V. Letter to the editors. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 276–277 (in Russian).
6. Kondrat'ev A.S., Khramtsov I.V. On finite tetraprimary groups. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 279, suppl. 1, pp. 43–61. doi: 10.1134/S0081543812090040 .
7. Maslova N.V. Classification of maximal subgroups of odd index in finite simple classical groups. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2009, vol. 267, suppl. 1, pp. 164–183.
8. Maslova N.V. On the coincidence of Gruenberg–Kegel graphs of a finite simple group and its proper subgroup. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 288, suppl. 1, p. 129–141.
9. Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M. *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013, London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 407, 438 p. doi: 10.1017/CBO9781139192576 .
10. Conway J.H. et al. *Atlas of finite groups*. Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN: 9780198531999 .
11. Gérono G.C. Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$. *Nouv. Ann. Math. (2)*, 1870, vol. 9, pp. 469–471.
12. Gorenstein D. *Finite groups*. NY: Chelsea, 1968, 520 p.
13. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. *The classification of the finite simple groups*. Number 3, Providence, RI: American Math. Soc., 1998, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 40, no. 3, 419 p. ISBN: 0-8218-0391-3 .
14. Gruenberg K.W., Roggenkamp K.W. Decomposition of the augmentation ideal and of the relation modules of a finite group. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 1975, vol. 31, no. 2, pp. 149–166. doi: 10.1112/plms/s3-31.2.149 .
15. Jansen C. et al. *An atlas of Brauer characters*. Oxford: Clarendon Press, 1995, 327 p. ISBN: 0198514816 .
16. Kleidman P., Liebeck M. *The subgroup structure of the finite classical groups*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990, 304 p. ISBN: 0-521-35949-X .
17. Mahmoudifar A. On some Frobenius groups with the same prime graph as the almost simple group $PGL(2, 49)$. 2016. 7 p. Available on: https://arxiv.org/pdf/1601.00146.pdf .
18. Williams J.S. Prime graph components of finite groups. *J. Algebra*, 1981, vol. 69, no. 2, pp. 487–513. doi: 10.1016/0021-8693(81)90218-0 .

19. Zavarnitsine A.V. Recognition of the simple groups $L_3(q)$ by element orders. *J. Group Theory*, 2004, vol. 7, no. 1, pp. 81–97. doi: 10.1515/jgth.2003.044 .
20. Zsigmondy K. Zur Theorie der Potenzreste. *Monatsh. Math. Phys.*, 1892, vol. 3, no. 1, pp. 265–284. doi: 10.1007/BF01692444 .

Received January 28, 2022
Revised April 30, 2022
Accepted May 5, 2022

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-71-10067).

Natalia Vladimirovna Maslova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: butterson@mail.ru .

Kristina Albertovna Ilenko, doctoral student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: christina.ilyenko@yandex.ru .

Cite this article as: N. V. Maslova, K. A. Ilenko. On the coincidence of Gruenberg–Kegel graphs of an almost simple group and a nonsolvable Frobenius group, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 168–175 .