

УДК 517.977

АССИМИЛЯЦИЯ ДАННЫХ О СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА ЖИДКОСТИ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ЕЕ ВЯЗКОСТИ¹**А. И. Короткий, И. А. Цепелев, А. Т. Исмаил-Заде**

Рассматривается модель течения вязкой двухфазной несмешивающейся несжимаемой жидкости и решается обратная задача для нахождения вязкости этой жидкости по известному местоположению ее свободной поверхности. Математическая модель сводится к решению задачи, описываемой уравнением Навье — Стокса в поле силы тяжести, уравнением несжимаемости, уравнением адвекции границы раздела двух фаз, а также соответствующими начальными и граничными условиями. Плотность и вязкость жидкости зависят от пространственной координаты и времени. Рассматриваемая задача является некорректной, т. е. малые погрешности в задании исходных данных и вычислительные погрешности могут привести к большим погрешностям в результате решения задачи. Для численного моделирования таких задач требуется применение специальных методов, которые гарантируют устойчивость вычислительного процесса по отношению к этим погрешностям. Цель данной работы состоит в построении методов и алгоритмов устойчивого численного моделирования рассматриваемой обратной задачи. Для решения обратной задачи предлагается воспользоваться вариационным методом и заменить исходную задачу экстремальной задачей на минимум подходящего функционала невязки между замерами местоположения свободной поверхности жидкости и ее местоположением, полученным в результате решения специально построенной управляемой динамической системы. Искомое решение такой экстремальной задачи последовательно приближается решениями финально-краевых задач управления для сопряженной системы, которая представляет градиент целевого функционала. Одной из трудностей такого подхода является численное моделирование задач управления ввиду их нелинейности. Для минимизации функционала невязки могут применяться некоторые варианты градиентных методов. Градиент функционала невязки и шаг спуска по антиградиенту определяются аналитически, что позволяет существенно сократить объем вычислений.

Ключевые слова: вязкая жидкость; несжимаемая жидкость; двухфазная жидкость; обратная задача; функционал невязки; вариационный метод; метод градиентного спуска.

A. I. Korotkii, I. A. Tsepelev, A. T. Ismail-Zadeh. Assimilating data on the free surface of a fluid flow to find its viscosity.

We consider a model of a two-phase immiscible incompressible viscous fluid flow and solve an inverse problem to determine the fluid viscosity from a known location of its free surface. The mathematical model of the fluid flow is reduced to solving a problem described by the Navier–Stokes equation in the field of gravity, the incompressibility equation, and the advection equation for the interface between the two phases and is supplemented by the corresponding initial and boundary conditions. The fluid density and viscosity depend on the spatial coordinates and time. The considered problem is ill-posed, as small errors in the initial data and computations may lead to large errors in the solution. The numerical modeling of such problems requires the use of special methods that guarantee the stability of the computational process with respect to the errors. The aim of this work is to develop methods and algorithms for a stable numerical modeling of the inverse problem. To solve the inverse problem, we propose to use a variational method and to replace the original problem with an extremal problem in which a suitable functional related to the discrepancy between the measurements of the location of the fluid's free surface and its location obtained from the solution of a specially constructed controlled dynamic system is minimized. The desired solution of this extremal problem is successively approximated by solutions of terminal–boundary value control problems for the adjoint system, which represents the gradient of the objective functional. A difficulty of this approach is associated with the numerical simulation of the control problems due to their nonlinearity. Some variants of gradient methods can be applied to minimize the discrepancy functional. The gradient of this functional and the descent step along the anti-gradient are determined analytically, allowing for an essential reduction of computations.

Keywords: viscous fluid, incompressible fluid, two-phase fluid, inverse problem, discrepancy functional, variational method, gradient descent method.

MSC: 35Q30, 76D05, 76T10, 76T15

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-143-157

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) и Немецкого научного фонда (DFG) (гранты РФФИ № 20-51-12002, DFG IZ203/14-1).

Введение

Обсудим содержательную сторону задачи. Рассмотрим какой-либо процесс, в котором вязкая жидкость вытекает из отверстия на некоторую поверхность и растекается по ней. Например, можно представить себе истечение лавы из жерла вулкана при извержениях [1–3]. Вязкость лавы не поддается непосредственному измерению. Требуется найти вязкость вытекающей жидкости по измерениям местоположения свободной поверхности течения (части поверхности, доступной прямому наблюдению и измерению) в какой-то заданный момент времени. Данную задачу будем называть обратной задачей.

Узнать вязкость лавы — непростая задача. Из-за критических природных условий, при которых развиваются потоки лавы (а именно, очень высокая температура, опасная токсичная атмосфера, плохая видимость и т. д.) в большинстве случаев вязкость лавы не поддается непосредственному измерению, во всяком случае, не для всего объема расплавленных пород. Кроме того, вязкость зависит от многочисленных параметров и состояния самой жидкости и поэтому постоянно меняется в пространстве и во времени. Поскольку лава является общеизвестной вязкой жидкостью, ее вязкость представляет собой фундаментальный параметр, который должен быть известен для адекватного изучения, моделирования или даже симуляции этой жидкости. Хорошая адекватная модель должна уметь воспроизвести зависимость физических свойств потока от вязкости лавы. Рассматриваемая задача относится к классу обратных задач, здесь отсутствует информация о коэффициенте вязкости, но существует некоторая информация о свойствах потока и некоторых причинно-следственных связях.

В модельной области Ω с неподвижной границей Γ , состоящей из частей Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , рассматривается движение двухфазной несмешивающейся несжимаемой вязкой среды (см. рис. 1). Одна фаза рассматриваемой среды представляет высоковязкую плотную жидкость (условимся называть ее просто жидкостью или жидкой фазой), другая фаза представляет собой слабовязкую низкоплотную жидкость (этой фазе можно придать содержательный смысл воздуха). Фазы разделены условной подвижной границей S . Влияние воздушной фазы на движение жидкой фазы незначительно из-за большой разницы между плотностями и вязкостями фаз (плотность и вязкость жидкости значительно больше плотности и вязкости воздуха, соответственно). Температурной зависимостью физических параметров среды и силами межфазового взаимодействия пренебрегаем.

На участке границы Γ_3 области Ω воздушная фаза вытекает из области Ω в соответствии с несжимаемостью фаз жидкостей и втеканию жидкой фазы через участок границы Γ_1 области Ω . Содержательный смысл рассматриваемого течения состоит, как уже было сказано выше, в истечении вязкой неоднородной несжимаемой жидкости из некоторого отверстия на некоторую поверхность или плоскость.

Опишем математическую модель рассматриваемого движения жидкости. В качестве основных уравнений состояния жидкости примем уравнения движения двухфазной вязкой несжимаемой жидкости. В модельной области Ω движение такой жидкости на промежутке времени $t \in T = [t_0, \vartheta]$, где $t = t_0$ — начальный момент времени наблюдения за процессом, $t = \vartheta$ — ко-

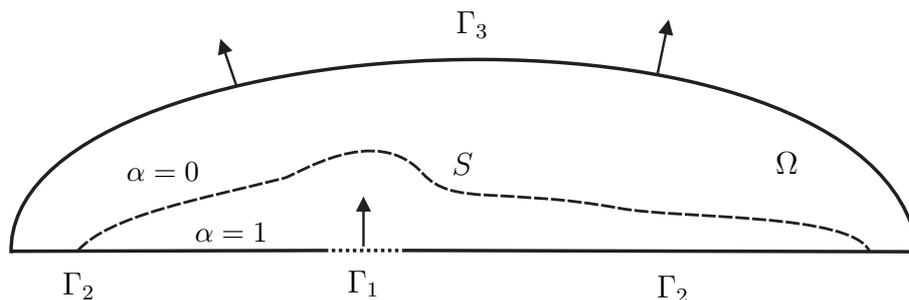


Рис. 1. Модельная область.

нечный момент времени наблюдения за процессом, представляется уравнением Навье — Стокса с общим полем потока с начальным условием $\mathbf{u}(t_0, \mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$, и уравнением несжимаемости (неразрывности) [4–8]:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \langle \mathbf{u}, \nabla \rangle (\rho\mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)) = -\nabla p - \rho \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T; \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ — декартовы координаты геометрической точки на плоскости; $\mathbf{u} = (u_1(t, \mathbf{x}), u_2(t, \mathbf{x}))$ — скорость движения жидкости; $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$ — плотность; $\mu = \mu(t, \mathbf{x})$ — динамическая вязкость; $p = p(t, \mathbf{x})$ — давление; $\mathbf{g} = (0, g)$, \mathbf{g} — ускорение силы тяжести; ∇ , $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\nabla \cdot$ обозначают вектор градиента, скалярное произведение векторов, дивергенцию вектора соответственно. Модельные плотность и вязкость равны соответственно $\rho = \rho(t, \mathbf{x}; \alpha) = \rho_F \alpha(t, \mathbf{x}) + \rho_A(1 - \alpha(t, \mathbf{x}))$, $\mu = \mu(t, \mathbf{x}; \alpha) = \mu_F(t, \mathbf{x})\alpha(t, \mathbf{x}) + \mu_A(1 - \alpha(t, \mathbf{x}))$, где $\rho_A = \text{const}$ — плотность воздуха; $\rho_F = \text{const}$ — плотность жидкости; $\mu_A = \text{const}$ — вязкость воздуха и $\mu_F = \mu_F(t, \mathbf{x})$ — вязкость жидкости. Функция $\alpha = \alpha(t, \mathbf{x})$ — характеризует местоположение жидкой фазы в области Ω , она принимает значение “единица”, если в момент времени $t \in T$ точка $\mathbf{x} \in \Omega$ принадлежит жидкости, и принимает значение “нуль”, если в момент времени $t \in T$ точка $\mathbf{x} \in \Omega$ принадлежит воздуху. Эту функцию будем называть характеристической. Она “переносится” со скоростью \mathbf{u} согласно уравнению адвекции [4–8]

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T. \quad (3)$$

Считается, что в начальный момент времени вся расчетная область заполнена воздухом. В течение всего промежутка времени наблюдения за процессом жидкость постоянно поступает в расчетную область через границу Γ_1 со скоростью $\mathbf{u} = -\varphi \mathbf{n}$, где φ — некоторая заданная неотрицательная функция на $T \times \Gamma_1$. Из сказанного следует, что $\alpha(t_0, \mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$; $\alpha(t, \mathbf{x}) = 1$, $t \in T$, $\mathbf{x} \in \Gamma_1$. Если жидкость все время остается в области Ω , не вытекает из нее, то следует считать, что $\alpha(t, \mathbf{x}) = 0$, $t \in T$, $\mathbf{x} \in \Gamma_3$.

1. Постановка прямой задачи

Прямой задачей будем называть задачу определения поля скоростей, давления и местоположения границы раздела фаз в модельной области Ω для $t \in T$. Движение среды в декартовых координатах описывается [4–8] уравнениями (1)–(3) с известными физическими характеристиками среды. Начальные условия для скорости и характеристической функции считаются нулевыми. Уточним граничные условия.

На границе модельной области задаются следующие граничные условия. Предполагается, что жидкость плотности ρ_F и вязкости μ_F поступает в модельную область через границу Γ_1 . Будем считать, как указано выше, что жидкость втекает по закону $\mathbf{u} = -\varphi \mathbf{n}$. На границе Γ_2 задано условие прилипания $\mathbf{u} = 0$. Воздух выходит из модельной области через границу Γ_3 в соответствии с заданным законом поступления жидкости: $\mathbf{u} = \psi \mathbf{n}$, где ψ — некоторая заданная неотрицательная функция на $T \times \Gamma_3$. Входящая за единицу времени в область Ω через границу Γ_1 жидкость вытесняет за единицу времени такой же объем воздуха из области Ω через границу Γ_3 :

$$-\int_{\Gamma_1} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle d\Gamma = \int_{\Gamma_3} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \varphi d\Gamma = \int_{\Gamma_3} \psi d\Gamma.$$

Итак, имеем

$$\begin{aligned} \Omega : \quad & \mathbf{u}(t_0, \cdot) = 0, \quad \alpha(t_0, \cdot) = 0; \\ \Gamma_1 : \quad & \mathbf{u} = -\varphi \mathbf{n}, \quad \alpha = 1, \quad t \in T; \\ \Gamma_2 : \quad & \mathbf{u} = 0, \quad t \in T; \\ \Gamma_3 : \quad & \mathbf{u} = \psi \mathbf{n}, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (4)$$

Прямая задача состоит в нахождении решения ($\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}), p = p(t, \mathbf{x}), \alpha = \alpha(t, \mathbf{x})$), $t \in T$, $\mathbf{x} \in \Omega$, начально-краевой задачи (1)–(4) при известных величинах $\rho_F, \rho_A, \mu_F, \mu_A, \mathbf{g}, \varphi, \psi$. Нахождению также подлежат модельные плотность и вязкость среды.

В недавней статье 2021 г. (Короткий А.И., Стародубцева Ю.В., Цепелев И.А. Гравитационное течение двухфазной вязкой несжимаемой жидкости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 61–73. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-61-73) введено понятие обобщенного решения и исследован вопрос о разрешимости начально-краевой задачи (1)–(4). Некоторые вопросы разрешимости в классическом или обобщенном смысле близких по постановкам краевых задач исследовались в [9–15].

2. Постановка обратной задачи

Допустим, что в момент времени $t = \vartheta$ проводится измерение (нахождение) линии раздела фаз $S = S(\vartheta)$ и соответствующей характеристической функции $\bar{\alpha} = \alpha(\vartheta, \cdot)$ (см. рис. 2).

Обратная задача состоит в нахождении априори неизвестного коэффициента вязкости $\mu = \mu(t, \mathbf{x})$, $t \in T$, $\mathbf{x} \in \Omega$, жидкости в начально-краевой задаче (1)–(4) и известном дополнительном условии, состоящем в знании измеренной (найденной) границы раздела фаз $S = S(\vartheta)$ или соответствующей характеристической функции $\bar{\alpha} = \alpha(\vartheta, \cdot)$.

Обратные задачи являются, как правило, некорректными [16–20]. На практике это проявляется в том, что малые ошибки в задании исходных данных и (или) погрешности вычислений приводят к неконтролируемым ошибкам в определении результата решения задачи. Другими словами, это проявляется в неустойчивости решения задачи или нарушении свойств решения задачи (например, принципа максимума), которые лежат в основе данной модели. Некорректность задачи требует разработки специальных методов и алгоритмов ее решения. Методы и алгоритмы, представленные в данной работе, позволяют найти адекватное решение поставленной обратной задачи. Здесь используется вариационный метод решения, который в совокупности с подходящим методом минимизации варьируемого функционала позволяет получить устойчивый метод решения обратной задачи. Его суть состоит в замене исходной некорректной задачи на подходящую задачу минимизации целевого функционала невязки [15–23]. Для решения экстремальной задачи, в данном случае, используется метод градиентного спуска, при реализации этого метода исходная задача сводится к последовательному решению корректно поставленных задач управления для некоторой вспомогательной сопряженной краевой задачи. В работе продолжаются исследования [23–26].

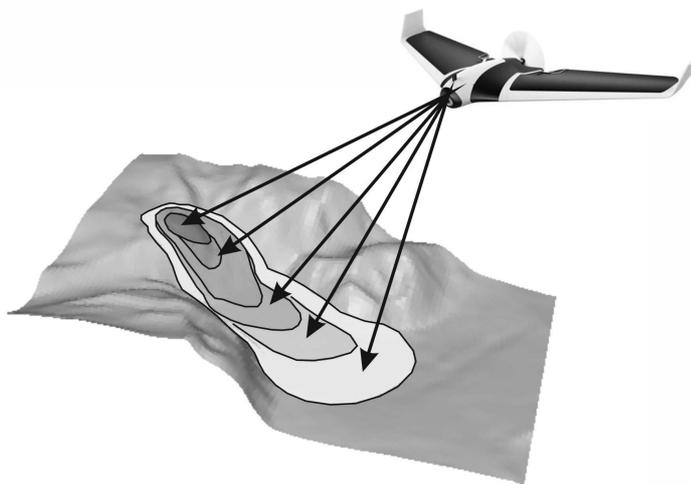


Рис. 2. Измерение поверхности раздела фаз.

3. Вариационный метод решения обратной задачи

Для решения обратной задачи воспользуемся вариационным методом. Преобразуем исходную обратную задачу в экстремальную задачу на минимум некоторого подходящего функционала. Введем предварительно некоторые обозначения и понятия. Решение прямой начально-краевой задачи (1)–(4), соответствующее какой-либо допустимой вязкости $\mu \in U$, обозначим символом $(\mathbf{u}[\mu], \alpha[\mu]) = (\mathbf{u}[t, \mathbf{x}; \mu], \alpha[t, \mathbf{x}; \mu])$, $t \in T$, $\mathbf{x} \in \Omega$. В момент времени $t \in T$ характеристическая функция $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(t, \cdot)$ однозначно определяет местоположение жидкости в области Ω и линию раздела фаз $S = S(t)$, которую условимся обозначать символом $S(t) = S(t; \bar{\alpha})$. С другой стороны, линия раздела фаз $S = S(t)$ однозначно определяет местоположение жидкости в области Ω и соответствующую характеристическую функцию, которую условимся обозначать символом $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(t, \cdot; S)$. Ясно, что $S = S(t) = S(t; \bar{\alpha} = \bar{\alpha}(t, \cdot; S))$.

Приведем некоторые эвристические соображения, позволяющие сформулировать обратную задачу как некоторую вариационную задачу. Пусть наблюдаемая граница раздела фаз $S(\vartheta)$ и соответствующая ей характеристическая функция местоположение жидкости $\bar{\alpha}(\vartheta, \cdot; S(\vartheta))$ соответствуют состоянию жидкости с некоторой вязкостью $\mu_* \in U$ такой, что $\bar{\alpha}(\vartheta, \cdot; S(\vartheta)) = \alpha[\vartheta, \cdot; \mu_*]$. Рассмотрим неотрицательный функционал невязки

$$J(\mu) = \|\alpha[\vartheta, \cdot; \mu] - \bar{\alpha}(\vartheta, \cdot; S(\vartheta))\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (\alpha[\vartheta, \mathbf{x}; \mu] - \bar{\alpha}(\vartheta, \mathbf{x}; S(\vartheta)))^2 dx. \quad (5)$$

Данный функционал примет нулевое значение при $\mu = \mu_*$, поскольку $\bar{\alpha}(\vartheta, \cdot; S(\vartheta)) = \alpha[\vartheta, \cdot; \mu_*]$. С другой стороны, всякий элемент $\mu^* \in U$, в котором функционал невязки примет нулевое значение, можно принять за решение обратной задачи. Итак, искомая вязкость $\mu_* \in U$ является минимизирующим элементом вариационной задачи

$$J(\mu) \rightarrow \min : \mu \in U. \quad (6)$$

Таким образом, от решения исходной обратной задачи можно перейти к решению вариационной задачи (6).

Теоретическое и численное исследование вопросов корректности обратной задачи весьма затруднительно. Точно также как весьма затруднительно теоретическое и численное исследование вопросов корректности экстремальной задачи (6). Рассматриваемая обратная задача является достаточно сложным объектом исследования [15; 23; 24; 26]. Она является, как правило, некорректной, она неустойчива (малые ошибки в исходных данных могут привести к большим ошибкам в решении задачи), а также может иметь неединственное решение [23; 24; 26].

Классические методы не пригодны для решения некорректных задач. Альтернативными в этой ситуации являются различные подходы, связанные с математическими преобразованиями обратных задач [16–19]. Многие из таких подходов могут оказаться удовлетворительными при теоретическом исследовании задачи, но неудовлетворительными при ее численном решении. Другие подходы связаны с различными упрощениями обратных задач, приводящими к их регуляризации и вычислительным удобствам.

Сформулируем один результат о минимизации функционала (5) на компакте.

Теорема 1. *Для любого компактного в $L_2(T \times \Omega)$ подмножества $V \subset U$ вариационная задача на минимум функционала $J(\cdot)$ на множестве V имеет хотя бы одну точку минимума. Пусть V_* множество всех точек минимума функционала $J(\cdot)$ на множестве V , тогда всякая минимизирующая последовательность задачи $J(\mu) \rightarrow \min : \mu \in V$ сходится к множеству V_* , т. е. из всякой минимизирующей последовательности задачи $J(\mu) \rightarrow \min : \mu \in V$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $L_2(T \times \Omega)$ к некоторому элементу множества V_* .*

Доказательство теоремы опирается на теорему Вейерштрасса о достижимости точек минимума непрерывным функционалом на компактном множестве [21, с. 502]. Заключительная часть теоремы доказывается от обратного. \square

4. Метод градиентного спуска

Для решения вариационной задачи (6) применим итерационный метод градиентного спуска [15; 18; 19; 21–23; 27]. Классическая формула градиентного спуска имеет вид

$$\mu^{(n+1)} = \mu^{(n)} - \gamma^{(n)} \nabla J(\mu^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (7)$$

где $\mu^{(0)}$ — начальное приближение, которое обычно выбирается с учетом априорной информации об искомом решении или из содержательного смысла задачи; $\gamma^{(n)}$ — шаг спуска по минус градиенту; $\nabla J(\mu^{(n)})$ — градиент функционала J в точке $\mu^{(n)}$.

Вычислим градиент функционала невязки J . Дадим аргументу $\mu \in U$ допустимое приращение h : $\mu + h \in U$. Найдем приращение функционала $J(\mu + h) - J(\mu)$ и выделим в нем главную линейную часть. Обозначим для краткости $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}[\mu]$, $p_1 = p[\mu]$, $\alpha_1 = \alpha[\mu]$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}[\mu + h]$, $p_2 = p[\mu + h]$, $\alpha_2 = \alpha[\mu + h]$, $\mathbf{v} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$, $P = p_2 - p_1$, $z = \alpha_2 - \alpha_1$, $\omega = \rho_2 - \rho_1$, $\rho^* = \rho_F - \rho_A$ ($\omega = \rho^* z$). Преобразуем приращение функционала

$$\begin{aligned} J(\mu + h) - J(\mu) &= \|\alpha[\vartheta, \cdot; \mu + h] - \bar{\alpha}(\vartheta, \cdot; S(\vartheta))\|_{L_2(\Omega)}^2 - \|\alpha[\vartheta, \cdot; \mu] - \bar{\alpha}(\vartheta, \cdot; S(\vartheta))\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &= 2\langle \alpha[\vartheta, \cdot; \mu + h] - \alpha[\vartheta, \cdot; \mu], \alpha[\vartheta, \cdot; \mu] - \bar{\alpha}(\vartheta, \cdot; S(\vartheta)) \rangle_{L_2(\Omega)} + \|\alpha[\vartheta, \cdot; \mu + h] - \alpha[\vartheta, \cdot; \mu]\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &= 2\langle z[\vartheta, \cdot], \alpha[\vartheta, \cdot; \mu] - \bar{\alpha}(\vartheta, \cdot; S(\vartheta)) \rangle_{L_2(\Omega)} + o_1(\|h\|_{L_2(T \times \Omega)}). \end{aligned} \quad (8)$$

Разность решений (\mathbf{v}, P, z) удовлетворяет начально-краевой задаче

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\rho_1 \mathbf{v})}{\partial t} + \frac{\partial(\omega \mathbf{v})}{\partial t} + \frac{\partial(\omega \mathbf{u}_1)}{\partial t} \\ &+ \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle (\rho_1 \mathbf{u}_1) + \langle \mathbf{u}_1, \nabla \rangle (\rho_1 \mathbf{v}) + \langle \mathbf{u}_1, \nabla \rangle (\omega \mathbf{u}_1) \\ &+ \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle (\rho_2 \mathbf{v}) - \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle (\omega \mathbf{u}_1) + \langle \mathbf{u}_1, \nabla \rangle (\omega \mathbf{v}) \\ &- \nabla \cdot (h (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1^T)) - \nabla \cdot (h (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)) - \nabla \cdot (\mu_1 (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1^T)) \\ &= -\nabla P - \omega \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\mathbf{v}(t_0, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega;$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T; \quad (10)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \nabla \cdot (z \mathbf{u}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \mathbf{v}) + \nabla \cdot (z \mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T; \quad (11)$$

$$z(t_0, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega;$$

$$\Gamma_1 : \mathbf{v} = 0, \quad z = 0, \quad t \in T;$$

$$\Gamma_2 \cup \Gamma_3 : \mathbf{v} = 0, \quad t \in T. \quad (12)$$

Перегруппируем слагаемые в равенстве (9) (перебросим все слагаемые высокого порядка малости по сравнению с $\|h\|_{L_2(T \times \Omega)}$ в правую часть в выражение R_1):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\rho_1 \mathbf{v})}{\partial t} + \frac{\partial(\omega \mathbf{u}_1)}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle (\rho_1 \mathbf{u}_1) + \langle \mathbf{u}_1, \nabla \rangle (\rho_1 \mathbf{v}) + \langle \mathbf{u}_1, \nabla \rangle (\omega \mathbf{u}_1) \\ &- \nabla \cdot (h (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1^T)) - \nabla \cdot (\mu_1 (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1^T)) + \nabla P + \omega \mathbf{g} = R_1, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T; \end{aligned} \quad (13)$$

$$R_1 = -\frac{\partial(\omega \mathbf{v})}{\partial t} - \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle (\rho_2 \mathbf{v}) - \langle \mathbf{u}_1, \nabla \rangle (\omega \mathbf{v}) + \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle (\omega \mathbf{u}_1) + \nabla \cdot (h (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)).$$

Умножим (13) скалярно на пробную векторную функцию $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t, \mathbf{x})$, $t \in T$, $\mathbf{x} \in \Omega$, результат проинтегрируем по области $T \times \Omega$, воспользуемся формулой интегрирования по частям, формулами Грина и учтем начальные и граничные условия для \mathbf{v} и z . Пусть, кроме того, функция $\mathbf{w}(\vartheta, \cdot) = 0$ и удовлетворяет таким же граничным условиям, что и функция \mathbf{v} . В результате получим

$$\begin{aligned} \int_T \int_\Omega \left\langle \frac{\partial(\rho_1 \mathbf{v})}{\partial t}, \mathbf{w} \right\rangle d\mathbf{x} dt &= \int_\Omega \left\langle \rho_1 \mathbf{v}, \mathbf{w} \right\rangle \Big|_{t_0}^{\vartheta} d\mathbf{x} - \int_T \int_\Omega \rho_1 \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \mathbf{v} \right\rangle d\mathbf{x} dt = - \int_T \int_\Omega \rho_1 \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \mathbf{v} \right\rangle d\mathbf{x} dt; \\ \int_T \int_\Omega \left\langle \frac{\partial(\omega \mathbf{u}_1)}{\partial t}, \mathbf{w} \right\rangle d\mathbf{x} dt &= \int_\Omega \omega \left\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{w} \right\rangle \Big|_{t_0}^{\vartheta} d\mathbf{x} - \int_T \int_\Omega \omega \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \mathbf{u}_1 \right\rangle d\mathbf{x} dt = - \int_T \int_\Omega \omega \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \mathbf{u}_1 \right\rangle d\mathbf{x} dt; \\ &\int_T \int_\Omega \left\langle \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle (\rho_1 \mathbf{u}_1) + \langle \mathbf{u}_1, \nabla \rangle (\rho_1 \mathbf{v}) + \langle \mathbf{u}_1, \nabla \rangle (\omega \mathbf{u}_1), \mathbf{w} \right\rangle d\mathbf{x} dt \\ &= \int_T \int_\Omega \left(\langle \mathbf{v}, \nabla (\rho_1 \mathbf{u}_1)^T \mathbf{w} \rangle + \langle \langle \mathbf{u}_1, \nabla \rangle (\rho_1 \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle + \langle \langle \mathbf{u}_1, \nabla \rangle (\omega \mathbf{u}_1), \mathbf{w} \rangle \right) d\mathbf{x} dt \end{aligned}$$

(второе и третье слагаемые преобразуем по формуле (3.1.15) из [10, с. 86])

$$= \int_T \int_\Omega \left(\langle \mathbf{v}, \nabla (\rho_1 \mathbf{u}_1)^T \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \langle \rho_1 \mathbf{u}_1, \nabla \rangle \mathbf{w} \rangle - \omega \langle \mathbf{u}_1, \langle \mathbf{u}_1, \nabla \rangle \mathbf{w} \rangle \right) d\mathbf{x} dt + R_2;$$

(слагаемое R_2 на самом деле отсутствует, $R_2 = 0$)

$$\int_T \int_\Omega \left\langle -\nabla \cdot (h (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1^T)) - \nabla \cdot (\mu_1 (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)), \mathbf{w} \right\rangle d\mathbf{x} dt$$

(к первому слагаемому применим первую тензорную формулу Грина, ко второму — вторую)

$$\begin{aligned} &= - \int_T \int_\Gamma h \langle (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1^T) \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle d\Gamma dt + 2^{-1} \int_T \int_\Omega h \langle (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1^T), (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T) \rangle d\mathbf{x} dt \\ &\quad - \int_T \int_\Gamma \mu_1 \langle (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle d\Gamma dt + \int_T \int_\Gamma \mu_1 \langle (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle d\Gamma dt \\ &\quad - \int_T \int_\Omega \langle \mathbf{v}, \nabla \cdot (\mu_1 (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T)) \rangle d\mathbf{x} dt \\ &= 2^{-1} \int_T \int_\Omega h \langle (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1^T), (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T) \rangle d\mathbf{x} dt - \int_T \int_\Omega \langle \mathbf{v}, \nabla \cdot (\mu_1 (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T)) \rangle d\mathbf{x} dt, \end{aligned}$$

где символ $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$ обозначает скалярное произведение двух матриц

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}, \quad \mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Пусть функция $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет еще условию $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$. Тогда

$$\int_T \int_\Omega \langle \nabla P, \mathbf{w} \rangle d\mathbf{x} dt = \int_T \int_\Gamma P \langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle d\Gamma dt - \int_T \int_\Omega P (\nabla \cdot \mathbf{w}) d\mathbf{x} dt = - \int_T \int_\Omega P (\nabla \cdot \mathbf{w}) d\mathbf{x} dt = 0,$$

$$\int_T \int_\Omega \omega \langle \mathbf{g}, \mathbf{w} \rangle d\mathbf{x}dt = \int_T \int_\Omega \rho^* z \langle \mathbf{g}, \mathbf{w} \rangle d\mathbf{x}dt.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} & \int_T \int_\Omega \left[-\rho^* z \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \mathbf{u}_1 \right\rangle - \left\langle \mathbf{v}, \rho_1 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \mathbf{v}, \nabla(\rho_1 \mathbf{u}_1)^T \mathbf{w} \right\rangle - \left\langle \mathbf{v}, \langle \rho_1 \mathbf{u}_1, \nabla \rangle \mathbf{w} \right\rangle - \omega(\langle \mathbf{u}_1, \langle \mathbf{u}_1, \nabla \rangle \mathbf{w} \rangle) \right. \\ & \left. + 2^{-1} h \langle (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1^T), (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T) \rangle - \langle \mathbf{v}, \nabla \cdot (\mu_1 s \mathbf{w}) \rangle + \rho^* z \langle \mathbf{g}, \mathbf{w} \rangle \right] d\mathbf{x}dt \\ & = R_3 = \int_T \int_\Omega \langle R_1, \mathbf{w} \rangle d\mathbf{x}dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая, что каждый интеграл в выражении R_3 есть величина $o(\|h\|_{L_2(T \times \Omega)})$, имеем

$$|R_3| = o_2(\|h\|_{L_2(T \times \Omega)}).$$

Умножим (11) на пробную скалярную функцию $\xi = \xi(t, \mathbf{x})$, результат проинтегрируем по области $T \times \Omega$, воспользуемся формулой интегрирования по частям, учтем (2), а также начальные и граничные условия из (12), в итоге получим

$$\begin{aligned} & \int_T \int_\Omega \left[\frac{\partial z}{\partial t} + \nabla \cdot (z \mathbf{u}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \mathbf{v}) + \nabla \cdot (z \mathbf{v}) \right] \xi d\mathbf{x}dt \\ & = - \int_T \int_\Omega \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} z + z \langle \mathbf{u}_1, \nabla \xi \rangle + \alpha_1 \langle \mathbf{v}, \nabla \xi \rangle \right] d\mathbf{x}dt + \int_\Omega [z(\vartheta, \mathbf{x}) \xi(\vartheta, \mathbf{x}) - z(t_0, \mathbf{x}) \xi(t_0, \mathbf{x})] d\mathbf{x} \\ & + \int_T \int_\Gamma \xi z \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{n} \rangle d\Gamma dt + \int_T \int_\Gamma \alpha_1 \xi \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle d\Gamma dt = R_4 = \int_T \int_\Omega \langle \mathbf{v}, \nabla \xi \rangle d\mathbf{x}dt = o_3(\|h\|_{L_2(T \times \Omega)}). \end{aligned}$$

Заметим, что $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = 0$ всюду на Γ ; $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{n} \rangle = 0$ на Γ_2 ; $z = 0$ на Γ_1 и Γ_3 . Поэтому граничные интегралы в последнем равенстве равны нулю. Положим $\xi(\vartheta, \cdot) = 2(\alpha[\vartheta, \cdot; \mu] - \bar{\alpha}(\vartheta, \cdot; S(\vartheta)))$. Окончательно выводим

$$\begin{aligned} & \int_T \int_\Omega \left[\frac{\partial z}{\partial t} + \nabla \cdot (z \mathbf{u}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \mathbf{v}) + \nabla \cdot (z \mathbf{v}) \right] \xi d\mathbf{x}dt \\ & = - \int_T \int_\Omega \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} z + z \langle \mathbf{u}_1, \nabla \xi \rangle + \alpha_1 \langle \mathbf{v}, \nabla \xi \rangle \right] d\mathbf{x}dt \\ & + \int_\Omega [z(\vartheta, \mathbf{x}) 2(\alpha[\vartheta, \cdot; \mu] - \bar{\alpha}(\vartheta, \cdot; S(\vartheta)))] d\mathbf{x} = R_4. \end{aligned} \quad (15)$$

Умножив (10) на пробную скалярную функцию $q = q(t, \mathbf{x})$ и проинтегрировав полученное выражение по частям, имеем

$$\int_T \int_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{v}) q d\mathbf{x}dt = \int_T \int_\Gamma q \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle d\Gamma dt - \int_T \int_\Omega \langle \mathbf{v}, \nabla q \rangle d\mathbf{x}dt = - \int_T \int_\Omega \langle \mathbf{v}, \nabla q \rangle d\mathbf{x}dt = 0. \quad (16)$$

Сложим равенства (14), (15), (16) и перегруппируем слагаемые:

$$\int_T \int_\Omega \left[\left\langle \mathbf{v}, \left\{ -\rho_1 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \nabla(\rho_1 \mathbf{u}_1)^T \mathbf{w} - \langle \rho_1 \mathbf{u}_1, \nabla \rangle \mathbf{w} - \nabla \cdot (\mu_1 (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T)) - \alpha_1 \nabla \xi + \nabla q \right\} \right\rangle \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + z \left\{ -\frac{\partial \xi}{\partial t} - \langle \mathbf{u}_1, \nabla \xi \rangle - \rho^* \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \mathbf{u}_1 \right\rangle - \rho^* \langle \mathbf{u}_1, \langle \mathbf{u}_1, \nabla \rangle \mathbf{w} \rangle + \rho^* \langle \mathbf{g}, \mathbf{w} \rangle \right\} \\
 & + 2^{-1} h \langle (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1^T), (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T) \rangle \Big] dx dt + \int_{\Omega} z(\vartheta, \mathbf{x}) 2(\alpha[\vartheta, \cdot; \mu] - \bar{\alpha}(\vartheta, \cdot; S(\vartheta))) d\mathbf{x} \\
 & = o_4(\|h\|_{L_2(T \times \Omega)}). \tag{17}
 \end{aligned}$$

Пусть пробные функции (\mathbf{w}, ξ, q) (множители Лагранжа) удовлетворяют финально-краевой задаче (сопряженной системе), которую получим, приравняв выражения в фигурных скобках в (17) нулю и использовав финальные и граничные условия для множителей Лагранжа,

$$\begin{aligned}
 & \rho_1 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \nabla(\rho_1 \mathbf{u}_1)^T \mathbf{w} + \langle \rho_1 \mathbf{u}_1, \nabla \rangle \mathbf{w} + \nabla \cdot (\mu_1 (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T)) = \nabla q - \alpha_1 \nabla \xi, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T; \\
 & \mathbf{w}(\vartheta, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \\
 & \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T; \\
 & \frac{\partial \xi}{\partial t} + \langle \mathbf{u}_1, \nabla \xi \rangle + \rho^* \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \mathbf{u}_1 \right\rangle + \rho^* \langle \mathbf{u}_1, \langle \mathbf{u}_1, \nabla \rangle \mathbf{w} \rangle - \rho^* \langle \mathbf{g}, \mathbf{w} \rangle = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T; \\
 & \xi(\vartheta, \mathbf{x}) = 2(\alpha[\vartheta, \cdot; \mu] - \bar{\alpha}(\vartheta, S(\vartheta))), \quad \mathbf{x} \in \Omega; \\
 & \Gamma_1 \cup \Gamma_3 : \mathbf{w} = 0, \xi = 0, \quad t \in T; \\
 & \Gamma_2 : \mathbf{w} = 0, \quad t \in T.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Финально-краевая сопряженная задача (18) линейна по искомому решению (\mathbf{w}, q, ξ) . Соответствующее допустимой вязкости $\mu \in U$ решение сопряженной задачи обозначим символом $(\mathbf{w}[\mu], q[\mu], \xi[\mu])$ или $(\mathbf{w}[t, \mathbf{x}; \mu], q[t, \mathbf{x}; \mu], \xi[t, \mathbf{x}; \mu])$, $t \in T$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Решение сопряженной задачи понимается в обобщенном смысле и вводится аналогично понятию обобщенного решения прямой задачи. Из (18) получим

$$\int_{\Omega} [z(\vartheta, \mathbf{x}) 2(\alpha(\vartheta, \mathbf{x}; \eta) - \bar{\alpha}(\vartheta, \mathbf{x}))] d\mathbf{x} = -2^{-1} \int_T \int_{\Omega} h \langle (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1^T), (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T) \rangle dx dt.$$

Учитывая это равенство, из (8) получим

$$\begin{aligned}
 J(\mu + h) - J(\mu) & = -2^{-1} \int_T \int_{\Omega} h \langle (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1^T), (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T) \rangle dx dt + o_5(\|h\|_{L_2(T \times \Omega)}), \\
 \nabla J(\mu) & = -2^{-1} \int_T \langle (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1^T), (\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T) \rangle dt. \tag{19}
 \end{aligned}$$

Подробнее

$$\nabla J(\mu)(\mathbf{x}) = -2^{-1} \int_T \left\langle \left(\nabla \mathbf{u}_1[t, \mathbf{x}; \mu] + \nabla \mathbf{u}_1[t, \mathbf{x}; \mu]^T \right), \left(\nabla \mathbf{w}[t, \mathbf{x}; \mu] + \nabla \mathbf{w}[t, \mathbf{x}; \mu]^T \right) \right\rangle dt, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Опишем *процедуру* вычисления градиента в точке $\mu \in U$ по шагам.

Шаг 1. При заданном $\mu \in U$ находится решение $(\mathbf{u}_1, p_1, \alpha_1) = (\mathbf{u}[\mu], p[\mu], \alpha[\mu])$ прямой начально-краевой задачи (1)–(4) с соответствующими начальными и граничными условиями.

Шаг 2. При заданном $\mu \in U$ и найденном решении $(\mathbf{u}_1, p_1, \alpha_1)$ прямой начально-краевой задачи находится решение $(\mathbf{w}[\mu], q[\mu], \xi[\mu])$ сопряженной финально-краевой задачи (18).

Шаг 3. При найденных решениях прямой $(\mathbf{u}[\mu], p[\mu], \alpha[\mu])$ и сопряженной $(\mathbf{w}[\mu], q[\mu], \xi[\mu])$ задач по формуле (19) находится градиент функционала J в точке μ .

Таким образом, последовательное решение прямой и сопряженной задач позволяет аппроксимировать решение обратной задачи. При этом градиент функционала определяется аналитически. Затраты ресурсов ЭВМ практически полностью состоят в качественном решении двух однотипных задач для систем дифференциальных уравнений. Отметим, что при выводе градиента некоторые промежуточные выкладки были выполнены формально, однако они являются вполне законными, если исходные данные задачи и решения обладают определенной гладкостью.

5. Нахождение шага спуска в градиентном методе

Шаг спуска в градиентном методе (7) может вычисляться разными способами [21; 22; 27]. Один из способов нахождения шага спуска состоит в минимизации скалярной (одномерной) нелинейной задачи (метод наискорейшего спуска)

$$\gamma^{(n)} \in \arg \min \{ J(\mu^{(n)} - \gamma \nabla J(\mu^{(n)})) : \gamma > 0 \}. \quad (20)$$

Классическая реализация этого метода довольно сложна, особенно если J нелинейный функционал. Для практической реализации этой алгоритмически сложной процедуры обычно применяется метод Вольфа [22; 27–29]

$$J(\mu^{(n)} - \gamma^{(n)} \nabla J(\mu^{(n)})) \leq J(\mu^{(n)}) + \sigma_1 \gamma^{(n)} \langle \nabla J(\mu^{(n)}), \nabla J(\mu^{(n)}) \rangle_{L_2(\Omega)},$$

$$\left| \langle \nabla J(\mu^{(n)} - \gamma^{(n)} \nabla J(\mu^{(n)})), \nabla J(\mu^{(n)}) \rangle_{L_2(\Omega)} \right| \leq \sigma_2 \langle \nabla J(\mu^{(n)}), \nabla J(\mu^{(n)}) \rangle_{L_2(\Omega)},$$

$$0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \frac{1}{2},$$

который устойчив при численной реализации, но приводит к необходимости многократно последовательно решать прямую задачу (1)–(4) и сопряженную ей задачу (18). Учитывая вычислительную сложность прямой и сопряженной задач, следует отметить, что реализация этой процедуры может оказаться затратной, кроме того, она требует подбора регулирующих параметров σ_1 и σ_2 .

Модифицируем процесс минимизации следующим образом. Воспользуемся идеей линеаризации градиентных методов [22; 30]. Она состоит в том, что нелинейный оператор решения прямой задачи заменяется линейной аппроксимацией. В таком случае минимум квадратичного функционала невязки можно будет найти по явной формуле. Пусть \mathbf{A} обозначает оператор решения прямой задачи:

$$\mathbf{A}: L_2(T \times \Omega) \supset U \ni \mu \rightarrow \alpha[\vartheta, \cdot; \mu] \in L_2(\Omega),$$

который ставит в соответствие заданной вязкости $\mu \in U$, определенной в области $T \times \Omega$, объемное содержание жидкости $\alpha[\vartheta, \cdot; \mu]$ в области Ω в момент времени ϑ . Линеаризуем оператор \mathbf{A} в точке μ , удержав первые два члена в разложении оператора в ряд Тейлора в точке μ :

$$\mathbf{A}(\mu + h) \approx \mathbf{A}(\mu) + \nabla \mathbf{A}(\mu)h.$$

Найдем производную Фреше $\nabla \mathbf{A}(\mu)$ оператора \mathbf{A} в точке μ

$$\mathbf{A}(\mu + h) - \mathbf{A}(\mu) = z[\cdot, \cdot; \mu, h] = \tilde{z}[\cdot, \cdot; \mu, h] + o(\|h\|_{L_2(T \times \Omega)}),$$

где $z = z[\cdot, \cdot; \mu, h]$ — компонента разности (\mathbf{v}, P, z) , удовлетворяющей начально-краевой задаче (12)–(15); $\tilde{z} = \tilde{z}[\cdot, \cdot; \mu, h]$ — компонента решения $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{P}, \tilde{z})$ специальной линейной начально-краевой задачи, которая аналогична задаче (9)–(12), где в уравнениях (9) и (11) удалены нелинейные слагаемые выше первого порядка малости по отношению к $\|h\|_{L_2(T \times \Omega)}$, и где

$(\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}[\mu], p_1 = p[\mu], \alpha_1 = \alpha[\mu])$ — известное решение прямой задачи (1)–(4), ρ_1 — соответствует $\alpha = \alpha_1$. Точнее, $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{P}, \tilde{z})$ — решение линейной начально-краевой задачи

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial(\rho_1 \tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho^* \tilde{z} \mathbf{u}_1)}{\partial t} + \langle \tilde{\mathbf{v}}, \nabla \rangle (\rho_1 \mathbf{u}_1) + \langle \mathbf{u}_1, \nabla \rangle (\rho_1 \tilde{\mathbf{v}}) + \langle \mathbf{u}_1, \nabla \rangle (\rho^* \tilde{z} \mathbf{u}_1) \\
 & - \nabla \cdot (h (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1^T)) - \nabla \cdot (\mu (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + \nabla \tilde{\mathbf{v}}^T)) = -\nabla \tilde{P} - \rho^* \tilde{z} \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T; \\
 & \tilde{\mathbf{v}}(t_0, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \\
 & \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T; \\
 & \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{z} \mathbf{u}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \tilde{\mathbf{v}}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in T; \\
 & \tilde{z}(t_0, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \\
 & \Gamma_1 : \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad \tilde{z} = 0, \quad t \in T; \\
 & \Gamma_2 \cup \Gamma_3 : \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad t \in T.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Элемент $\tilde{z} = \tilde{z}[\cdot, \cdot; \mu, h] \in L_2(T \times \Omega)$ можно рассматривать как значение некоторого линейного непрерывного оператора, действующего из $L_2(T \times \Omega)$ в $L_2(T \times \Omega)$, на элементе $h \in L_2(T \times \Omega)$. В силу единственности производной Фреше от оператора, имеем

$$\nabla \mathbf{A}(\mu)h = \tilde{z}[\cdot, \cdot; \mu, h], \quad \nabla \mathbf{A}(\mu)(\cdot) = \tilde{z}[\cdot, \cdot; \mu, \cdot].$$

Решение линеаризованной задачи (20) имеет вид

$$\gamma^{(n)} = \|\nabla J(\mu^{(n)})\|_{L_2(\Omega)}^2 / 2 \|\nabla \mathbf{A}(\mu^{(n)}) (\nabla J(\mu^{(n)}))\|_{L_2(\Omega)}^2. \tag{22}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 & J(\mu^{(n)} - \gamma \nabla J(\mu^{(n)})) = \|\mathbf{A}(\mu^{(n)} - \gamma \nabla J(\mu^{(n)})) - \bar{\alpha}(\vartheta, \cdot; S(\vartheta))\|_{L_2(\Omega)}^2 \\
 & \approx \|\mathbf{A}(\mu^{(n)}) - \nabla \mathbf{A}(\mu^{(n)}) (\gamma \nabla J(\mu^{(n)})) - \bar{\alpha}(\vartheta, \cdot; S(\vartheta))\|_{L_2(\Omega)}^2; \\
 & \|\mathbf{A}(\mu^{(n)}) - \nabla \mathbf{A}(\mu^{(n)}) (\gamma \nabla J(\mu^{(n)})) - \bar{\alpha}(\vartheta, \cdot; S(\vartheta))\|_{L_2(\Omega)}^2 \\
 & = \|\mathbf{A}(\mu^{(n)}) - \bar{\alpha}(\vartheta, \cdot; S(\vartheta))\|_{L_2(\Omega)}^2 - 2 \left\langle \mathbf{A}(\mu^{(n)}) - \bar{\alpha}(\vartheta, \cdot; S(\vartheta)), \nabla \mathbf{A}(\mu^{(n)}) (\gamma \nabla J(\mu^{(n)})) \right\rangle_{L_2(\Omega)} \\
 & + \|\nabla \mathbf{A}(\mu^{(n)}) (\gamma \nabla J(\mu^{(n)}))\|_{L_2(\Omega)}^2 = J(\mu^{(n)}) + \gamma^2 \|\nabla \mathbf{A}(\mu^{(n)}) (\nabla J(\mu^{(n)}))\|_{L_2(\Omega)}^2 \\
 & - 2\gamma \left\langle \mathbf{A}(\mu^{(n)}) - \bar{\alpha}(\vartheta, \cdot; S(\vartheta)), \nabla \mathbf{A}(\mu^{(n)}) (\nabla J(\mu^{(n)})) \right\rangle_{L_2(\Omega)} \\
 & = J(\mu^{(n)}) + \gamma^2 \|\nabla \mathbf{A}(\mu^{(n)}) (\nabla J(\mu^{(n)}))\|_{L_2(\Omega)}^2 \\
 & - \gamma \left\langle 2(\nabla \mathbf{A}(\mu^{(n)}))^* (\mathbf{A}(\mu^{(n)}) - \bar{\alpha}(\vartheta, \cdot; S(\vartheta))), \nabla J(\mu^{(n)}) \right\rangle_{L_2(\Omega)} \\
 & = J(\mu^{(n)}) + \gamma^2 \|\nabla \mathbf{A}(\mu^{(n)}) (\nabla J(\mu^{(n)}))\|_{L_2(\Omega)}^2 - \gamma \|\nabla J(\mu^{(n)})\|_{L_2(\Omega)}^2.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Минимум выражения (23) достигается в точке (22).

6. Метод сопряженных градиентов

Для решения вариационной задачи хорошо зарекомендовал себя устойчивый итерационный метод сопряженных градиентов Полака — Рибьера [22; 30]. Линеаризованный метод сопряженных градиентов является одним из эффективных градиентных методов при принятии во внимание такие критерии, как точность, затраты компьютерных ресурсов и реализацию его на современных ЭВМ.

Последовательность аппроксимаций задачи (23) строится по правилу

$$\begin{aligned}\mu^{(n+1)} &= \mu^{(n)} + \gamma^{(n)} d^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ d^{(0)} &= -\nabla J(\mu^{(0)}), \quad d^{(n)} = -\nabla J(\mu^{(n)}) + \lambda^{(n)} d^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \lambda^{(n)} &= \langle \nabla J(\mu^{(n)}), \nabla J(\mu^{(n-1)}) - \nabla J(\mu^{(n)}) \rangle_{L_2(\Omega)} \|\nabla J(\mu^{(n-1)})\|_{L_2(\Omega)}^{-2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \gamma^{(n)} &\in \arg \min \{ J(\mu^{(n)} + \gamma d^{(n)}) : \gamma \geq 0 \}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ \gamma^{(n)} &= -\frac{1}{2} \langle \nabla J(\mu^{(n)}), d^{(n)} \rangle_{L_2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{A}(\mu^{(n)}) d^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}^{-2}.\end{aligned}$$

Для его реализации на ЭВМ необходимо на каждой итерации последовательно решить задачи (1)–(4), (18) и (21).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Jacobs C.T., Collins G.S., Piggott M.D., Kramer S.C., Wilson C.R.G.** Multiphase flow modelling of volcanic ash particle settling in water using adaptive unstructured meshes // *Geophysical J. Intern.* 2013. Vol. 192, iss. 2. P. 647–665. doi: 10.1093/gji/ggs059.
2. **Tsepelev I., Ismail-Zadeh A., Melnik O.** 3D numerical modelling of the Summit Lake lava flow, Yellowstone, USA // *Izv. Phys. Solid Earth.* 2021. Vol. 57, no. 2. P. 257–265. doi: 10.1134/S1069351321020129.
3. **Zeinalova N., Ismail-Zadeh A., Melnik O., Tsepelev I., Zobin V.** Lava dome morphology and viscosity inferred from data-driven numerical modeling of dome growth at Volcán de Colima, Mexico during 2007–2009 // *Front. Earth Sci.* 2021. Vol. 9, article no. 735914. doi: 10.3389/feart.2021.735914.
4. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 652 p.
5. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
6. **Prosperetti A., Tryggvason G.** Computational methods for multiphase flow. Cambridge; NY; Melbourne; Madrid; Cape Town; Singapore; Sao Paulo: Cambridge Univ. Press, 2007. 470 p.
7. **Kolev N.I.** Multiphase flow dynamics. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 781 p.
8. **Нигматулин Р.И.** Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
9. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. 204 с.
10. **Темам Р.** Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.
11. **Лионс Ж.Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
12. **Фурсиков А.В.** Оптимальное управление распределенными системами. Теория и практика. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352 с.
13. **Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.** Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 320 с.
14. **Кажихов А.В.** Избранные труды. Математическая гидродинамика. Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2008. 420 с.
15. **Алексеев Г.В., Терешко Д.А.** Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 364 с.
16. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
17. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и их приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
18. **Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с.

19. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: УРСС, 2004. 480 с.
20. Ismail-Zadeh A., Tackley P. Computational methods for geodynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010. 313 p.
21. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
22. Nocedal J., Wright S.J. Numerical optimization. NY: Springer, 1999. 664 p.
23. Ismail-Zadeh A., Korotkii A., Tsepelev I. Data-driven numerical modelling in geodynamics: Methods and applications. Berlin: Springer Intern. Publ., 2016. 105 p.
doi: 10.1007/978-3-319-27801-8.
24. Korotkii A., Kovtunov D., Ismail-Zadeh A., Tsepelev I., Melnik O. Quantitative reconstruction of thermal and dynamic characteristics of volcanic lava from surface thermal measurements // Geophysical J. Intern. 2016. Vol. 205, iss. 3. P. 1767–1779. doi:10.1093/gji/ggw117.
25. Короткий А.И. Обратные задачи о восстановлении параметров системы Навье — Стокса // Современная математика и ее приложения, 2005. Т. 26 (Нелинейная динамика). С. 54–77.
26. Tsepelev I., Ismail-Zadeh A., Melnik O. Lava dome morphology inferred from numerical modelling // Geoph. J. Intern. 2020. Vol. 223, iss. 3. P. 1597–1609. doi: 10.1093/gji/ggaa395.
27. Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O. Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems. Berlin: Walter de Gruyter, 2008. Vol. 6. 202 p.
28. Wolfe P. Convergence conditions for ascent methods II: Some corrections // SIAM Review. 1971. Vol. 13. P. 185–188.
29. Gilbert J.Ch., Nocedal J. Global convergence properties of conjugate gradient methods for optimization // SIAM J. Optimization. 1992. Vol. 2, no. 1. P. 21–42.
30. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973. 244 с.

Поступила 2.02.2022

После доработки 10.03.2022

Принята к публикации 14.03.2022

Короткий Александр Илларионович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: korotkii@imm.uran.ru

Цепелев Игорь Анатольевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: tsepelev@imm.uran.ru

Алик Исмаил-Заде
д-р физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН
г. Москва;

старший науч. сотрудник
Институт прикладных наук о Земле
Технологический институт Карлсруэ
Карлсруэ. Германия
e-mail: aismail@mitp.ru

REFERENCES

1. Jacobs C.T., Collins G.S., Piggott M.D., Kramer S.C., Wilson C.R.G. Multiphase flow modelling of volcanic ash particle settling in water using adaptive unstructured meshes. *Geophysical J. Intern.*, 2013, vol. 192, iss. 2, pp. 647–665. doi: 10.1093/gji/ggs059.
2. Tsepelev I., Ismail-Zadeh A., Melnik O. 3D numerical modelling of the Summit Lake lava flow, Yellowstone, USA. *Izv. Phys. Solid Earth.*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 257–265. doi: 10.1134/S1069351321020129.
3. Zeinalova N., Ismail-Zadeh A., Melnik O., Tsepelev I., Zobin V. Lava dome morphology and viscosity inferred from data-driven numerical modeling of dome growth at Volcán de Colima, Mexico during 2007–2009. *Front. Earth Sci.*, 2021, vol. 9, article no. 735914. doi: 10.3389/feart.2021.735914.
4. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford: Clarendon Press, 1961, 652 p. ISBN: 048664071X.
5. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid mechanics*. Oxford: Pergamon Press, 1987, 539 p. ISBN: 9781483161044. Original Russian text published in Landau L.D., Lifshits E.M. *Gidrodinamika*, Moscow: Nauka Publ., 1986, 736 p.
6. Prosperetti A., Tryggvason G. *Computational methods for multiphase flow*. Cambridge, NY, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, Sao Paulo: Cambridge Univ. Press, 2007, 470 p. ISBN: 0521847648.
7. Kolev N.I. *Multiphase flow dynamics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011, 781 p. ISBN: 3540698329.
8. Nigmatulin R.I. *Dynamics of multiphase media*. Part 1. NY: Hemisphere Pub. Corp., 1991, 532 p. ISBN: 0891163166. Original Russian text published in Nigmatulin R.I. *Dinamika mnogofaznykh sred*, Part 1, Moscow: Nauka Publ., 1987, 464 p.
9. Ladyzhenskaya O.A. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. NY: Gordon and Breach, 1987, 224 p. ISBN: 0677207603. Original Russian text published in Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoi neshhimaemoi zhidkosti*, Moscow: Nauka Publ., 1970, 288 p.
10. Temam R. *Navier-Stokes equations: Theory and numerical analysis*. Amsterdam: North-Holland, 1979, 529 p. ISBN: 0444853073. Translated to Russian under the title *Uravneniya Nav'e-Stoksa: Teoriya i chislennyyi analiz*, Moscow: Mir Publ., 1981, 408 p.
11. Lions J.-L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* [Some methods of solving non-linear boundary value problems]. Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969, 554 p. Translated to Russian under the title *Nekotorye metody resheniya nelineinykh kraevykh zadach*, Moscow: Mir Publ., 1972, 587 p.
12. Fursikov A.V. *Optimal control of distributed systems. Theory and applications*. Providence: American Math. Soc., 1999, 305 p. ISBN: 082189790X. Original Russian text published in Fursikov A.V. *Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya*, Novosibirsk: Nauchnaya Kniga Publ., 1999, 360 p.
13. Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*. Amsterdam: North-Holland, 1990, 309 p. doi: 10.1016/s0168-2024(08)x7006-7. Original Russian text published in Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. *Kraevye zadachi mekhaniki neodnorodnykh zhidkosti*, Novosibirsk: Nauka Publ., 1983, 320 p.
14. Kazhikhov A.V. *Izbrannye trudy: Matematicheskaya gidrodinamika* [Selected works: Mathematical hydrodynamics]. Novosibirsk: Izdatel'stvo Instituta Gidrodinamiki im. M.A. Lavrentjeva SO RAN, 2008, 420 p. ISBN: 978-5-94671-007-7.
15. Alekseev G.V., Tereshko D.A. *Analiz i optimizatsiya v gidrodinamike vyazkoi zhidkosti* [Analysis and optimization in viscous fluid dynamics]. Vladivostok: Dal'nauka Publ., 2008, 365 p.
16. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. *Solutions of ill-posed problems*. Washington DC: Winston and Sons, 1977, 137 p. ISBN: 0470991240. Original Russian text published in Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*, Moscow: Nauka Publ., 1979, 288 p.
17. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications*. Utrecht: VSP, 2002, 281 p. ISBN 10: 906764367X. Original Russian text published in Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ih prilozheniya*, Moscow: Nauka Publ., 1978, 206 p.
18. Kabanikhin S.I. *Inverse and ill-posed problems. Theory and applications*. Berlin, Walter de Gruyter, 2011, 459 p. ISBN: 9783110224016. Original Russian text published in Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi*, Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009, 457 p.

19. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. *Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics*. Berlin, Walter de Gruyter, 2007, 438 p. doi: 10.1515/9783110205794. Original Russian text published in Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. *Chislennyye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoi fiziki*, Moscow: URSS, 2004, 480 p.
20. Ismail-Zadeh A., Tackley P. *Computational methods for geodynamics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010, 313 p. ISBN: 9780511780820.
21. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii*. Moscow: Faktorial Press, 2002, 824 p. ISBN: 5-88688-056-9.
22. Nocedal J., Wright S.J. *Numerical optimization*. NY: Springer, 1999, 664 p. ISBN: 0-387-30303-0.
23. Ismail-Zadeh A., Korotkii A., Tsepelev I. *Data-driven numerical modelling in geodynamics: methods and applications*. Berlin: Springer Intern. Publ., 2016, 105 p. doi: 10.1007/978-3-319-27801-8.
24. Korotkii A., Kovtunov D., Ismail-Zadeh A., Tsepelev I., Melnik O. Quantitative reconstruction of thermal and dynamic characteristics of volcanic lava from surface thermal measurements. *Geophys. J. Int.*, 2016, vol. 205, no. 3, pp. 1767–1779. doi: 10.1093/gji/ggw117.
25. Korotkii A.I. Inverse problems of reconstructing parameters of the Navier–Stokes system. *J. Math. Sci.*, 2007, vol. 140, no. 6, pp. 808–831. doi: 10.1007/s10958-007-0019-3.
26. Tsepelev I., Ismail-Zadeh A., Melnik O. Lava dome morphology inferred from numerical modelling. *Geophys. J. Int.*, 2020, vol. 223, no. 3, pp. 1597–1609. doi: 10.1093/gji/ggaa395.
27. Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O. *Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems*. Berlin: Walter de Gruyter, 2008, vol. 6, 202 p. ISBN: 9783110208276.
28. Wolfe P. Convergence conditions for ascent methods II: Some corrections. *SIAM Rev.*, 1971, vol. 13, no. 2, pp. 185–188. doi: 10.1137/1013035.
29. Gilbert J.C., Nocedal J. Global convergence properties of conjugate gradient methods for optimization. *SIAM J. Optim.*, 1992, vol. 2, no. 1, pp. 21–42. doi: 10.1137/0802003.
30. Cea J. *Optimisation: Théorie et algorithmes* [Optimization: Theory and algorithms]. Paris: Dunod, 1971, 236 p. Translated to Russian under the title *Optimizatsiya: Teoriya i algoritmy*. Moscow: Mir Publ., 1973, 244 p.

Received February 2, 2022

Revised March 10, 2022

Accepted March 14, 2022

Funding Agency: This work was supported jointly by the Russian Foundation for Basic Research and the German Research Society (project RFBR no. 20-51-12002, project DFG no. IZ203/14-1).

Alexander Illarionovich Korotkii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: korotkii@imm.uran.ru .

Igor Anatolievich Tsepelev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: tsepelev@imm.uran.ru .

Alik Ismail-Zadeh, Dr. Phys.-Math. Sci., Chief Scientist, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia, e-mail: aismail@mitp.ru. Also: Senior Scientist, Institute of Applied Geosciences (AGW) Karlsruhe Institute of Technology (KIT), Karlsruhe, Germany.

Cite this article as: Korotkii A.I., Tsepelev I.A., Ismail-zadeh A.T. Assimilating data on the free surface of a fluid flow to constrain its viscosity. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 143–157.