ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 2 2022

УДК 512.542

$\bar{\omega}$-СПУТНИКИ $\bar{\omega}$-ВЕЕРНЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А. А. Горепекина, М. М. Сорокина

Рассматриваются только конечные группы. Понятие ω-локальной формации групп, где ω — непустое множество простых чисел, является известным обобщением понятия локальной формации. Для произвольного разбиения σ множества всех простых чисел А. Н. Скиба разработал σ-теорию конечных групп и применил ее методы для построения σ-локальных формаций. Введенная в рассмотрение В. А. Ведерниковым концепция ω-веерности для классов групп позволила построить бесконечную серию ω-веерных формаций, при этом ω-локальные формации составили один из видов данной серии. В настоящей работе рассматриваются $\bar{\omega}$-веерные формации групп, где $\bar{\omega}$ — произвольное разбиение множества ω, построенные на основе σ-подхода А. Н. Скибы, примененного к ω-веерным формациям. Пусть $f\colon \bar{\omega} \cup \{\bar{\omega}'\} \to$ {формации групп} и $\gamma\colon \bar{\omega} \to$ {непустые формации Фиттинга групп} — функции, причем $f(\bar{\omega}') \neq \varnothing$, а класс групп $\gamma(\omega_i)$ содержит все $\omega_i{}'$-группы для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Формация $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(\bar{\omega}')$ и $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G))$ называется $\bar{\omega}$-веерной формацией с направлением γ и $\bar{\omega}$-спутником f. В работе изучаются внутренние $\bar{\omega}$-спутники $\bar{\omega}$-веерных формаций, т. е. $\bar{\omega}$-спутники, все значения которых содержатся в рассматриваемой формации. Решены следующие задачи: доказано существование канонического $\bar{\omega}$-спутника $\bar{\omega}$-веерной формации; получено описание строения максимального внутреннего $\bar{\omega}$-спутника $\bar{\omega}$-веерной формации.

Ключевые слова: конечная группа, класс групп, формация, $\bar{\omega}$-веерная формация, направление $\bar{\omega}$-веерной формации, $\bar{\omega}$-спутник $\bar{\omega}$-веерной формации.

A. A. Gorepekina, M. M. Sorokina. $\bar{\omega}$-Satellites of $\bar{\omega}$-fibered formations of finite groups.

Only finite groups are considered. The notion of ω-local formation of groups, where ω is a nonempty set of primes, is a well-known generalization of the notion of local formation. For an arbitrary partition σ of the set of all primes, A. N. Skiba developed the σ-theory of finite groups and applied its methods for constructing σ-local formations. The concept of ω-fiberedness introduced by V. A. Vedernikov for classes of groups made it possible to construct an infinite series of ω-fibered formations, while ω-local formations formed one of the types of this series. In this paper, we study $\bar{\omega}$-fibered formations of groups, where $\bar{\omega}$ is an arbitrary partition of the set ω, constructed on the basis of Skiba's σ-approach applied to ω-fibered formations. Consider functions $f\colon \bar{\omega} \cup \{\bar{\omega}'\} \to$ {formations of groups} and $\gamma\colon \bar{\omega} \to$ {nonempty Fitting formations of groups}, where $f(\bar{\omega}') \neq \varnothing$ and the class of groups $\gamma(\omega_i)$ contains all $\omega_i{}'$-groups for any $\omega_i \in \bar{\omega}$. A formation $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} | G/O_\omega(G) \in f(\bar{\omega}')$ and $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$ for any $\omega_i \in \bar{\omega} \cap \pi(G))$ is called an $\bar{\omega}$-fibered formation with direction γ and $\bar{\omega}$-satellite f. In this paper we study inner $\bar{\omega}$-satellites of $\bar{\omega}$-fibered formations, i.e., $\bar{\omega}$-satellites whose values are contained in the considered formation. The following problems are solved: the existence of a canonical $\bar{\omega}$-satellite of an $\bar{\omega}$-fibered formation is proved, and the structure of a maximal inner $\bar{\omega}$-satellite of an $\bar{\omega}$-fibered formation is described.

Keywords: finite group, class of groups, formation, $\bar{\omega}$-fibered formation, direction of an $\bar{\omega}$-fibered formation, $\bar{\omega}$-satellite of an $\bar{\omega}$-fibered formation.

MSC: 20D10, 20F17

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-2-106-113

Введение

Рассматриваются только конечные группы. При построении и исследовании классов групп широко применяются функциональные методы. Так, теория формаций групп начала свое развитие с работы В. Гашюца [13], в которой с помощью функциональных методов были построены локальные формации. Развивая данный функциональный подход, Л. А. Шеметков ввел в рассмотрение ω-локальные формации [9], где ω — непустое множество простых чисел. В 1999 г. В. А. Ведерников предложил новый функциональный подход к изучению классов групп, при реализации которого была построена бесконечная серия ω-веерных формаций [1], один из видов которой составили ω-локальные формации.

Развивая фундаментальный π-метод изучения конечных групп, разработанный С. А. Чунихиным [7], А. Н. Скиба для произвольного разбиения σ множества всех простых чисел разработал σ-теорию конечных групп (см., например, [15–17]) и применил ее для построения σ-локальных формаций [18], являющихся естественным обобщением локальных формаций.

В результате применения методов σ-теории А. Н. Скибы к ω-веерным формациям в работе [6] были построены $\bar{\omega}$-веерные формации, где $\bar{\omega}$ — произвольное разбиение множества ω. В [6] установлена взаимосвязь $\bar{\omega}$-веерных формаций с ω-веерными формациями, в частности доказано, что в случае, когда множество ω_i одноэлементно для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$ (в терминологии [15], $\bar{\omega}$ — наименьшее разбиение множества ω), формация $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$-веерной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является ω-веерной с соответствующим направлением [6, утверждение 1]. В настоящей работе авторы продолжают исследование $\bar{\omega}$-веерных формаций.

Как следует из [3, гл. 1, 2, 4], при изучении локальных и ω-локальных формаций большую роль играют внутренние спутники, т. е. спутники, все значения которых содержатся в рассматриваемой формации. В [8, теорема 3.4] установлено, что всякая локальная формация имеет единственный минимальный спутник (в терминологии [8] — экран), который является внутренним. В [10, теорема 8.3] получено описание единственного минимального (внутреннего) Θ-значного спутника локальной формации, порожденной множеством групп, где Θ — некоторая совокупность формаций. Существование единственного максимального внутреннего спутника локальной формации и описание его строения получено в [11; 14] (см. также [8, теорема 3.3]). В работе [5] получены ключевые результаты о ω-локальных формациях, в частности теоремы о существовании и строении единственного минимального, а также канонического (внутреннего) ω-спутников ω-локальной формации. Существование и описание строения минимального и максимального внутреннего ω-спутников ω-веерной формации установлено в [2, теорема 5] и [1, теорема 6] соответственно. В [6, теорема 1] доказано существование и получено описание строения единственного минимального $\bar{\omega}$-спутника $\bar{\omega}$-веерной формации. В настоящей работе решаются следующие задачи: доказано существование канонического $\bar{\omega}$-спутника $\bar{\omega}$-веерной формации — внутреннего $\bar{\omega}$-спутника, строение которого зависит от строения минимального $\bar{\omega}$-спутника данной формации (теорема 1); получено описание строения максимального внутреннего $\bar{\omega}$-спутника $\bar{\omega}$-веерной формации (теорема 2).

1. Используемые определения и обозначения

В работе используется терминология, принятая в [4]. Символ $:=$ означает равенство по определению. Запись $N \le G$ ($N < G$, $N \triangleleft G$) означает, что N — подгруппа (соответственно собственная, нормальная подгруппа) группы G; $\pi(G)$ — совокупность всех простых делителей порядка группы G. *Монолитической* называется группа, обладающая единственной минимальной нормальной подгруппой (*монолитом*).

Классом групп называется всякая совокупность групп, содержащая с каждой своей группой все группы, ей изоморфные. *Формация* — класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно фактор-групп (т. е. из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$ следует $G/N \in \mathfrak{F}$) и подпрямых произведений (т. е. из $G/A \in \mathfrak{F}$ и $G/B \in \mathfrak{F}$ следует $G/(A \cap B) \in \mathfrak{F}$); *класс Фиттинга* — класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп (т. е. из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$ следует $N \in \mathfrak{F}$) и произведений нормальных подгрупп, принадлежащих $\mathfrak{F}$ (т. е. из $G = AB$, $A, B \in \mathfrak{F}$, $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$ следует $G \in \mathfrak{F}$); *формация Фиттинга* — класс групп, являющийся формацией и классом Фиттинга. Для непустой формации $\mathfrak{F}$ через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-*корадикал* группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Для непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-*радикал* группы G, т. е. наибольшая нормальная подгруппа группы G, принадлежащая классу $\mathfrak{F}$ (см., например, [8, гл. I, § 1, 2]).

Пусть $\mathfrak{G}$ — класс всех конечных групп; $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Для произвольного непустого подмножества π множества $\mathbb{P}$ полагают $\pi' := \mathbb{P} \setminus \pi$; $\mathfrak{G}_\pi$ — класс всех π-групп; $O_\pi(G) := G_{\mathfrak{G}_\pi}$ (см., например, [8, гл. I, § 2]). В частности, если $\pi = \omega$, то получаем соответственно обозначения ω', $\mathfrak{G}_\omega$, $O_\omega(G)$. Для непустого множества групп $\mathfrak{X}$ через $(\mathfrak{X})$ обозначается класс групп, порожденный множеством $\mathfrak{X}$, т. е. $(\mathfrak{X})$ — пересечение всех классов групп, содержащих $\mathfrak{X}$; $\pi(\mathfrak{X}) := \cup_{G\in\mathfrak{X}}\pi(G)$. Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — непустые классы групп. *Произведением* классов $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ называется класс

$$\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{G} \mid \text{существует } N \lhd G \text{ такая, что } N \in \mathfrak{F}_1 \text{ и } G/N \in \mathfrak{F}_2).$$

Если $\mathfrak{F}_1$ — непустой класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}_1 \diamond \mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\mathfrak{F}_1} \in \mathfrak{F}_2)$ — *радикальное произведение* классов $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Если $\mathfrak{F}_2$ — непустая формация, то $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1)$ — *корадикальное произведение* классов $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ (см., например, [12, гл. II, (1.3); гл. IV, (1.7); гл. IX, (1.10)]).

Пусть ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$, $\bar{\omega} = \{\omega_i \mid i \in I\}$ — произвольное разбиение множества ω, т. е. $\omega = \cup_{i\in I}\omega_i$, $\omega_i \neq \varnothing$ для любого $i \in I$, и $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$ для любых $i, j \in I$, $i \neq j$. Функция вида

$$f \;:\; \bar{\omega} \cup \{\bar{\omega}'\} \to \{\text{формации групп}\},$$

где $f(\bar{\omega}') \neq \varnothing$, называется *$\bar{\omega}F$-функцией* (иначе, формационной $\bar{\omega}$-функцией); функция вида

$$\gamma : \bar{\omega} \to \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\},$$

удовлетворяющая условию $\mathfrak{G}_{\omega_i'} \subseteq \gamma(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$, называется *$\bar{\omega}FR$-функцией* (иначе, формационно-радикальной $\bar{\omega}$-функцией) [6]. Для любой группы G полагаем

$$\bar{\omega}(G) := \{\omega_i \;\in\; \bar{\omega} \mid \omega_i \cap \pi(G) \neq \varnothing\}.$$

Формация

$$\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(\bar{\omega}') \text{ и } G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i) \text{ для любого } \omega_i \in \bar{\omega}(G))$$

называется *$\bar{\omega}$-веерной формацией с направлением γ и $\bar{\omega}$-спутником f* и обозначается $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(f, \gamma)$ [6]. Формацию будем называть *$\bar{\omega}$-веерной*, если она совпадает с формацией $\bar{\omega}F(f, \gamma)$ для некоторой $\bar{\omega}F$-функции f и некоторой $\bar{\omega}FR$-функции γ. Следуя [1], направление γ $\bar{\omega}$-веерной формации назовем

a-направлением, если $\mathfrak{G}_{\omega_i} \subseteq \gamma(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$;

b-направлением, если $\gamma(\omega_i)\mathfrak{G}_{\omega_i} = \gamma(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$;

b_{ω_k}-направлением, где $\omega_k \in \bar{\omega}$, если $\gamma(\omega_k)\mathfrak{G}_{\omega_k} = \gamma(\omega_k)$;

p-направлением, если $\gamma(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i'}\gamma(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.

Направление γ $\bar{\omega}$-веерной формации назовем *$x_1x_2\ldots x_n$-направлением*, если γ является x_j-направлением для любого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество групп. Тогда $\bar{\omega}(\mathfrak{X}) := \{\omega_i \;\in\; \bar{\omega} \mid \omega_i \cap \pi(\mathfrak{X}) \neq \varnothing\}$ [6]. Через $\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначается формация, порожденная множеством $\mathfrak{X}$ (см., например, [8, гл. I, § 2]); $\bar{\omega}F(\mathfrak{X}, \gamma)$ — $\bar{\omega}$-веерная формация с направлением γ, порожденная множеством $\mathfrak{X}$ [6].

Для $\bar{\omega}F$-функций f_1 и f_2 полагаем $f_1 \leq f_2$, если $f_1(x) \subseteq f_2(x)$ для любого $x \in \bar{\omega} \cup \{\bar{\omega}'\}$. Следуя [8], $\bar{\omega}$-спутник f $\bar{\omega}$-веерной формации $\mathfrak{F}$ назовем *внутренним*, если $f(x) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $x \in \bar{\omega} \cup \{\bar{\omega}'\}$. *Максимальным* внутренним $\bar{\omega}$-спутником $\bar{\omega}$-веерной формации $\mathfrak{F}$ называется максимальный элемент множества всех внутренних $\bar{\omega}$-спутников формации $\mathfrak{F}$.

2. Предварительные результаты

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\bar{\omega}$-веерная формация с $\bar{\omega}$-спутником f и ар-направлением γ, $\omega_i \in \bar{\omega}$. Если $f(\omega_i) \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{G}_{\omega_i} f(\omega_i) \subseteq \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $f(\omega_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Согласно [12, гл. IV, (1.7)] $\mathfrak{G}_{\omega_i} f(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i} \circ f(\omega_i)$, и поэтому ввиду [12, гл. IV, (1.8)] класс $\mathfrak{G}_{\omega_i} f(\omega_i)$ является формацией. Предположим, что $\mathfrak{G}_{\omega_i} f(\omega_i) \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{G}_{\omega_i} f(\omega_i) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда $G \neq 1$. Если группа G имеет две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2, то из $G/N_i \in \mathfrak{G}_{\omega_i} f(\omega_i)$ и $|G/N_i| < |G|$ получаем $G/N_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$, и, значит, $G \cong G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}$, что в силу выбора группы G невозможно. Следовательно, G — монолитическая группа с монолитом $N = G^{\mathfrak{F}}$.

Установим, что $G/O_{\omega_i}(G) \in \mathfrak{F}$. Так как $G \in \mathfrak{G}_{\omega_i} f(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i} \circ f(\omega_i)$, то по определению корадикального произведения классов групп имеет место $G^{f(\omega_i)} \in \mathfrak{G}_{\omega_i}$. Поскольку $G \notin \mathfrak{F}$ и $f(\omega_i) \subseteq \mathfrak{F}$, то $G \notin f(\omega_i)$, и поэтому $G^{f(\omega_i)} \neq 1$. Это в силу монолитичности группы G означает, что $N \subseteq G^{f(\omega_i)}$. Так как $G^{f(\omega_i)} \in \mathfrak{G}_{\omega_i}$ и класс $\mathfrak{G}_{\omega_i}$ замкнут относительно подгрупп, то $N \in \mathfrak{G}_{\omega_i}$. Следовательно, $N \subseteq O_{\omega_i}(G)$ и ввиду равенства $N = G^{\mathfrak{F}}$ получаем

$$G/O_{\omega_i}(G) \cong (G/N)/(O_{\omega_i}(G)/N) \in \mathfrak{F}.$$

Проверим, что $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$. Так как γ — a-направление $\bar{\omega}$-веерной формации, то $O_{\omega_i}(G) \subseteq G_{\gamma(\omega_i)}$. Согласно [12, гл. IX, (1.11)] имеет место равенство $\mathfrak{G}_{\omega_i} f(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i} \diamond f(\omega_i)$. Это по определению радикального произведения классов групп означает, что $G/O_{\omega_i}(G) \in f(\omega_i)$. Отсюда следует

$$G/G_{\gamma(\omega_i)} \cong (G/O_{\omega_i}(G))/(G_{\gamma(\omega_i)}/O_{\omega_i}(G)) \in f(\omega_i).$$

Так как γ является p-направлением $\bar{\omega}$-веерной формации, то из $\omega_i \in \bar{\omega}$, $G/O_{\omega_i}(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/G_{\gamma(\omega_i)} \in f(\omega_i)$ по [6, теорема 2 (1)] заключаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором группы G. Следовательно, $\mathfrak{G}_{\omega_i} f(\omega_i) \subseteq \mathfrak{F}$.

Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\bar{\omega}$-веерная формация с $\bar{\omega}$-спутником f и ар-направлением γ. Если f — внутренний $\bar{\omega}$-спутник формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{G}_{\omega_i} f(\omega_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.*

Лемма 2. *Пусть $\omega_i \in \bar{\omega}$, $\mathfrak{F}$ — $\bar{\omega}$-веерная формация с b_{ω_i}-направлением γ. Тогда $O_{\omega_i}(G/G_{\gamma(\omega_i)}) = 1$ для любой группы G.*

Доказательство. Пусть G — произвольная группа и $O_{\omega_i}(G/G_{\gamma(\omega_i)}) := X/G_{\gamma(\omega_i)}$. Так как $\gamma(\omega_i)$ — класс Фиттинга, то $G_{\gamma(\omega_i)} \in \gamma(\omega_i)$. Поскольку $X/G_{\gamma(\omega_i)} \in \mathfrak{G}_{\omega_i}$ и γ — b_{ω_i}-направление, то по определению произведения классов групп $X \in \gamma(\omega_i)\mathfrak{G}_{\omega_i} = \gamma(\omega_i)$. Следовательно, $G_{\gamma(\omega_i)} = X$ и, значит, $O_{\omega_i}(G/G_{\gamma(\omega_i)}) = 1$.

Лемма доказана.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\bar{\omega}$-веерная формация с b-направлением γ. Тогда для любой группы G имеет место равенство $O_{\omega_i}(G/G_{\gamma(\omega_i)}) = 1$, для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.*

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\bar{\omega}$-веерная формация с $\bar{\omega}$-спутником f и b-направлением γ. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает $\bar{\omega}$-спутником h таким, что $h(\bar{\omega}') = f(\bar{\omega}')$ и $h(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i} f(\omega_i)$ для всех $\omega_i \in \bar{\omega}$.*

Доказательство. Пусть h — $\bar{\omega}F$-функция такая, что $h(\bar{\omega}') = f(\bar{\omega}')$, $h(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i} f(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$, и $\mathfrak{H} := \bar{\omega}F(h, \gamma)$. Тогда $f \leq h$, и ввиду определения $\bar{\omega}$-веерной формации справедливо включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $H \in \mathfrak{H}$. Тогда $H/O_\omega(H) \in h(\bar{\omega}') = f(\bar{\omega}')$, и для всех $\omega_t \in \bar{\omega}(H)$ имеет место $H/H_{\gamma(\omega_t)} \in h(\omega_t)$. Рассмотрим произвольный элемент $\omega_t \in \bar{\omega}(H)$. Так как

$$H/H_{\gamma(\omega_t)} \in h(\omega_t) = \mathfrak{G}_{\omega_t} f(\omega_t) = \mathfrak{G}_{\omega_t} \diamond f(\omega_t),$$

то по определению радикального произведения классов групп получаем

$$(H/H_{\gamma(\omega_t)})/O_{\omega_t}(H/H_{\gamma(\omega_t)}) \in f(\omega_t).$$

Поскольку γ является b-направлением $\bar{\omega}$-веерной формации, то по следствию 2 справедливо равенство $O_{\omega_t}(H/H_{\gamma(\omega_t)}) = 1$. Отсюда заключаем, что $H/H_{\gamma(\omega_t)} \in f(\omega_t)$.

Таким образом, $H/O_\omega(H) \in f(\bar{\omega}')$ и $H/H_{\gamma(\omega_t)} \in f(\omega_t)$ для всех $\omega_t \in \bar{\omega}(H)$. Следовательно, по определению $\bar{\omega}$-веерной формации $H \in \mathfrak{F}$, и, значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Тем самым установлено равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Лемма доказана.

3. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\bar{\omega}$-веерная формация с bp-направлением γ. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает таким внутренним $\bar{\omega}$-спутником k, что $k(\bar{\omega}') = \mathfrak{F}$, $k(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i}\mathrm{form}(G/G_{\gamma(\omega_i)} \mid G \in \mathfrak{F})$ для всех $\omega_i \in \bar{\omega}(\mathfrak{F})$ и $k(\omega_i) = \varnothing$, если $\omega_i \in \bar{\omega} \setminus \bar{\omega}(\mathfrak{F})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\mathfrak{F} = \bar{\omega}F(\mathfrak{F}, \gamma)$, то согласно [6, теорема 1] формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным $\bar{\omega}$-спутником f таким, что

$f(\bar{\omega}') = \mathrm{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F})$,
$f(\omega_i) = \mathrm{form}(G/G_{\gamma(\omega_i)} \mid G \in \mathfrak{F})$ для всех $\omega_i \in \bar{\omega}(\mathfrak{F})$ и
$f(\omega_i) = \varnothing$, если $\omega_i \in \bar{\omega} \setminus \bar{\omega}(\mathfrak{F})$.

Согласно [6, лемма 3 (2)] формация $\mathfrak{F}$ имеет такой $\bar{\omega}$-спутник f_1, что $f_1(\bar{\omega}') = \mathfrak{F}$ и $f_1(\omega_i) = f(\omega_i)$ для всех $\omega_i \in \bar{\omega}$. Так как γ является b-направлением $\bar{\omega}$-веерной формации, то по лемме 3 формация $\mathfrak{F}$ обладает $\bar{\omega}$-спутником k со следующим строением: $k(\bar{\omega}') = f_1(\bar{\omega}')$ и $k(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i} f_1(\omega_i)$ для всех $\omega_i \in \bar{\omega}$. Таким образом, имеют место следующие равенства:

$k(\bar{\omega}') = \mathfrak{F}$;
$k(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i}\mathrm{form}(G/G_{\gamma(\omega_i)} \mid G \in \mathfrak{F})$ для всех $\omega_i \in \bar{\omega}(\mathfrak{F})$;
$k(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i}\varnothing = \varnothing$, если $\omega_i \in \bar{\omega} \setminus \bar{\omega}(\mathfrak{F})$.

Поскольку $\bar{\omega}$-спутник f формации $\mathfrak{F}$ является внутренним в силу своего строения и всякое b-направление $\bar{\omega}$-веерной формации является a-направлением, то по следствию 1 для всех $\omega_i \in \bar{\omega}(\mathfrak{F})$ справедливо включение $k(\omega_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\bar{\omega}$-спутник k является внутренним $\bar{\omega}$-спутником формации $\mathfrak{F}$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Следуя терминологии [5], $\bar{\omega}$-спутник k $\bar{\omega}$-веерной формации $\mathfrak{F}$, построенный в теореме 1, будем называть *каноническим.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\bar{\omega}$-веерная формация с bp-направлением γ. Если h — максимальный внутренний $\bar{\omega}$-спутник формации $\mathfrak{F}$, то $h(\bar{\omega}') = \mathfrak{F}$ и $h(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i} h(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть h — максимальный внутренний $\bar{\omega}$-спутник формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что h имеет строение, описанное в заключении теоремы. Поскольку h — внутренний $\bar{\omega}$-спутник формации $\mathfrak{F}$, то по [6, лемма 3 (2)] $h(\bar{\omega}') = \mathfrak{F}$. Так как γ является b-направлением $\bar{\omega}$-веерной формации, то по лемме 3 формация $\mathfrak{F}$ обладает $\bar{\omega}$-спутником h_1 таким, что $h_1(\bar{\omega}') = h(\bar{\omega}')$ и $h_1(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i} h(\omega_i)$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Отсюда следует, что $h \leq h_1$. Поскольку всякое b-направление $\bar{\omega}$-веерной формации является a-направлением, то ввиду следствия 1

$\mathfrak{G}_{\omega_i} h(\omega_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$. Поэтому h_1 является внутренним $\bar{\omega}$-спутником формации $\mathfrak{F}$. Тогда из $h \leq h_1$ в силу максимальности внутреннего $\bar{\omega}$-спутника h получаем, что $h = h_1$. Следовательно, для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$ справедливо

$$h(\omega_i) = h_1(\omega_i) = \mathfrak{G}_{\omega_i} h(\omega_i).$$

Тем самым установлено, что $\bar{\omega}$-спутник h формации $\mathfrak{F}$ имеет требуемое строение.

Теорема доказана.

4. Заключительные замечания, следствия, вопросы

Замечание 2. Пусть $\bar{\omega}$ — наименьшее разбиение множества ω, т. е. для любого $\omega_i \in \bar{\omega}$ множество ω_i одноэлементно. Тогда ввиду [6, утверждение 1] непустая формация $\mathfrak{F}$ является $\bar{\omega}$-веерной с направлением γ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — ω-веерная формация с направлением δ, где γ и δ — $\bar{\omega}FR$-функция и $\mathbb{P}FR$-функция соответственно такие, что $\gamma(\{p\}) = \delta(p)$ для любого $\{p\} \in \bar{\omega}$. В этой связи из теоремы 1 вытекает следующий результат для ω-веерных формаций.

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-веерная формация с $\mathfrak{b}p$-направлением δ. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает таким внутренним ω-спутником k, что $k(\omega') = \mathfrak{F}$, $k(p) = \mathfrak{N}_p \mathrm{form}(G/G_{\delta(p)} \mid G \in \mathfrak{F})$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$ и $k(p) = \varnothing$, если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{F})$.*

Ввиду теоремы 1 интерес представляет следующий вопрос.

Вопрос 1. Каковы условия, при которых канонический $\bar{\omega}$-спутник $\bar{\omega}$-веерной формации $\mathfrak{F}$ является максимальным внутренним $\bar{\omega}$-спутником формации $\mathfrak{F}$?

Замечание 3. В случае, когда $\bar{\omega}$ — наименьшее разбиение множества ω, из теоремы 2 вытекает следующий известный результат для ω-веерных формаций.

Следствие 4 [1, теорема 5]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-веерная формация с $\mathfrak{b}p$-направлением δ. Если h — максимальный внутренний ω-спутник формации $\mathfrak{F}$, то $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p)$ для любого $p \in \omega$.*

В связи с теоремой 2 возникает следующий вопрос.

Вопрос 2. Каковы условия, при которых $\bar{\omega}$-веерная формация $\mathfrak{F}$ обладает (единственным) максимальным внутренним $\bar{\omega}$-спутником?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ведерников В.А.** О новых типах ω-веерных формаций конечных групп // Український математичний конгресс – 2001. Секція 1 (Київ, 2002): Праці. С. 36–45.
2. **Ведерников В.А., Сорокина М.М.** ω-Веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 43–60.
3. **Воробьев Н.Н.** Алгебра классов конечных групп. Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2012. 322 с.
4. **Скиба А.Н.** Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997. 240 с.
5. **Скиба А.Н., Шеметков Л.А.** Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
6. **Сорокина М.М., Горепекина А.А.** $\bar{\omega}$-Веерные формации конечных групп // Чебышевский сб. 2021. Т. 22, № 3. С. 232–244. doi: 10.22405/2226-8383-2021-22-3-232-244 .
7. **Чунихин С.А.** Подгруппы конечных групп. Минск: Наука и техника, 1964. 158 с.
8. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
9. **Шеметков Л.А.** О произведении формаций // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28, № 2. С. 101–103.
10. **Шеметков Л.А., Скиба А.Н.** Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. 256 с.
11. **Carter R., Hawkes T.** The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group // J. Algebra. 1967. Vol. 5, no. 2. P. 175–202. doi: 10.1016/0021-8693(67)90034-8 .

12. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. Berlin; NY: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
13. **Gaschütz W.** Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1963. Vol. 80, no. 4. P. 300–305. doi: 10.1007/BF01162386.
14. **Schmid P.** Formationen und Automorphismengruppen // J. London Math. Soc. 1973. Vol. 7, no. 1. P. 83–94. doi: 10.1112/jlms/s2-7.1.83.
15. **Skiba A.N.** On σ-properties of finite groups I // Проблемы физики, математики и техники. 2014. № 4 (21). С. 89–96.
16. **Skiba A.N.** On σ-properties of finite groups II // Проблемы физики, математики и техники. 2015. № 3 (24). С. 70–83.
17. **Skiba A.N.** On σ-properties of finite groups III // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 1 (26). С. 52–62.
18. **Skiba A.N.** On one generalization of the local formations // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 1 (34). С. 79–82.

Поступила 27.03.2022
После доработки 21.04.2022
Принята к публикации 25.04.2022

Горепекина Анастасия Андреевна
аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии
Брянский государственный университет им. академика И. Г. Петровского
г. Брянск
e-mail: nastya3296@mail.ru

Сорокина Марина Михайловна
д-р физ.-мат. наук
профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии
Брянский государственный университет им. академика И. Г. Петровского
г. Брянск
e-mail: mmsorokina@yandex.ru

REFERENCES

1. Vedernikov V.A. On new types of ω-fibered formations of finite groups. In: *Abstr. Ukr. Math. Congress – 2001. Section 1*, Kiev, 2002, pp. 36–45.
2. Vedernikov V.A., Sorokina M.M. ω-fibered formations and fitting classes of finite groups. *Math. Notes*, 2002, vol. 71, no. 1, pp. 39–55. doi: 10.1023/A:1013922206539.
3. Vorob'ov N.N. *Algebra klassov konechnykh grupp* [Algebra of classes of finite groups]. Vitebsk: BSU named after P.M. Masherov Publ., 2012, 322 p. ISBN: 978-985-517-393-0.
4. Skiba A.N. *Algebra formatsii* [Algebra of formations]. Minsk: Belaruskaya Nauka Publ., 1997, 240 p. ISBN: 985-08-0078-x.
5. Skiba A.N., Shemetkov L.A. Multiple ω-local formations and fitting classes of finite groups. *Siberian Adv. Math.*, 2000, vol. 10, no. 2, pp. 112–141.
6. Sorokina M.M., Gorepekina A.A. $\bar{\omega}$-fibered formations of finite groups. *Chebyshevskii Sbornik*, 2021, vol. 22, no. 3, pp. 232–244 (in Russian). doi: 10.22405/2226-8383-2021-22-3-232-244.
7. Chunikhin S.A. *Subgroups of finite groups*. Groningen: Wolters-Noordhoff, 1969, 142 p. Original Russian text published in Chunikhin S.A. *Podgruppy konechnykh grupp*, Minsk: Nauka i Tekhnika Publ., 1964, 158 p.
8. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Moscow: Nauka Publ., 1978, 272 p.
9. Shemetkov L.A. On the product of formations. *Dokl. AN BSSR*, 1984. vol. 28, no. 2, pp. 101–103 (in Russian).
10. Shemetkov L.A., Skiba A.N. *Formatsii algebraicheskikh sistem* [Formations of algebraic systems]. Moscow: Nauka Publ., 1989, 256 p. ISBN: 5-02-013918-1.
11. Carter R., Hawkes T. The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group. *J. Algebra*, 1967, vol. 5, pp. 175–202. doi: 10.1016/0021-8693(67)90034-8.

12. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups.* Berlin; NY: Walter de Gruyter, 1992, 891 p. ISBN: 978-3-11-087013-8 .
13. Gaschütz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen. *Math. Z.*, 1962, vol. 80, pp. 300–305. doi: 10.1007/BF01162386 .
14. Schmid P. Formationen und Automorphismengruppen. *J. London Math. Soc.*, 1973, vol. s2-7, no. 1, pp. 83–94. doi: 10.1112/jlms/s2-7.1.83 .
15. Skiba A.N. On σ-properties of finite groups I. *PFMT*, 2014, no. 4(21), pp. 89–96.
16. Skiba A.N. On σ-properties of finite groups II. *PFMT*, 2015, no. 3(24), pp. 70–83.
17. Skiba A.N. On σ-properties of finite groups III. *PFMT*, 2016, no. 1(26), pp. 52–62.
18. Skiba A.N. On one generalization of the local formations. *PFMT*, 2018, no. 1(34), pp. 79–82.

Received March 27, 2022
Revised April 21, 2022
Accepted April 25, 2022

Anastasiya Andreevna Gorepekina, doctoral student, Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, Bryansk, 241036 Russia, e-mail: nastya3296@mail.ru .

Marina Mikhaylovna Sorokina, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, Bryansk, 241036 Russia, e-mail: mmsorokina@yandex.ru .

Cite this article as: A. A. Gorepekina, M. M. Sorokina. $\bar{\omega}$-Satellites of $\bar{\omega}$-fibered formations of finite groups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 106–113.