ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 1 2022

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЦЕЛЕВЫМ МНОЖЕСТВОМ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

А. Р. Данилин, О. О. Коврижных

В настоящей работе исследована задача оптимального быстродействия для сингулярно возмущенной линейной автономной системы с гладкими геометрическими ограничениями на управление в виде шара и неограниченным целевым множеством:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x,\, y \in \mathbb{R}^{2m}, \quad u \in \mathbb{R}^{2m}, \\ \varepsilon^2 \dot{y} = Jy + u, & \|u\| \leqslant 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ x(0) = x^0 \neq 0, \quad y(0) = y^0, & \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad T_\varepsilon \longrightarrow \min, & \end{cases}$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Основное отличие от ранее рассмотренных систем с быстрыми и медленными переменными заключается в том, что в данном случае матрица при быстрых переменных представляет собой многомерный аналог жордановой клетки второго порядка с нулевым собственным числом и, следовательно, не удовлетворяет стандартному условию асимптотической устойчивости. Доказана разрешимость задачи. Выписана основная система уравнений для нахождения решения. В случае $m = 1$ получена и обоснована полная асимптотика в смысле Пуанкаре по асимптотической последовательности $\varepsilon^q \ln^p \varepsilon$, $q \in \mathbb{N}$, $q - 1 \geqslant p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ времени быстродействия и вектора, порождающего оптимальное управление.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, неограниченное целевое множество, сингулярно возмущенная задача, асимптотическое разложение, малый параметр.

A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of a solution to a time-optimal control problem with an unbounded target set in the critical case.

We study a time-optimal control problem for a singularly perturbed linear autonomous system with smooth geometric constraints on the control in the form of a ball and an unbounded target set:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x,\, y \in \mathbb{R}^{2m}, \quad u \in \mathbb{R}^{2m}, \\ \varepsilon^2 \dot{y} = Jy + u, & \|u\| \leqslant 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ x(0) = x^0 \neq 0, \quad y(0) = y^0, & \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad T_\varepsilon \longrightarrow \min, & \end{cases}$$

where $J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. The main difference of this case from the systems with fast and slow variables studied earlier is that here the matrix at the fast variables is a multidimensional analog of the second-order Jordan cell with zero eigenvalue, and thus does not satisfy the standard condition of asymptotic stability. The solvability of the problem is proved. The main system of equations for finding a solution is written. In the case $m = 1$, we derive and justify a complete asymptotics in the sense of Poincaré with respect to the asymptotic sequence $\varepsilon^q \ln^p \varepsilon$, $q \in \mathbb{N}$, $q - 1 \geqslant p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, of the optimal time and of the vector generating the optimal control.

Keywords: optimal control, time-optimal control problem, unbounded target set, singularly perturbed problem, asymptotic expansion, small parameter.

MSC: 93C70, 49N05

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-58-73

1. Введение

В работе рассматривается одна из задач теории оптимального управления [1; 2] — задача о быстродействии для линейной автономной системы с быстрыми и медленными переменными (см. обзоры [3; 4]) в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x,\, y \in \mathbb{R}^{2m}, \quad u \in \mathbb{R}^{2m}, \\ \varepsilon^2 \dot{y} = Jy + u, & \|u\| \leqslant 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ x(0) = x^0 \neq 0, \quad y(0) = y^0, \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad T_\varepsilon \longrightarrow \min, \end{cases} \tag{1.1}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

I_m — матрица тождественного отображения $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Отметим, что малый параметр ε входит в уравнения системы (1.1) во второй степени для удобства, чтобы избежать в дальнейшем дробных степеней параметра в асимптотиках.

Задача (1.1) есть задача наискорейшего перевода точки (x^0, y^0) на целевое множество $G := \{\, (0, y) \colon y \in \mathbb{R}^{2m} \,\}$.

Среди близких по тематике работ отметим статью [5], в которой получены основные соотношения для линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами и многоугольником в качестве ограничивающего множества. Работы [6; 7] посвящены исследованию поведения областей достижимости при стремлении малого параметра к нулю. Отметим ряд современных исследований задач оптимального управления с малым параметром. Линейно-квадратичные задачи оптимального управления для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и неограниченным многомерным управлением изучаются в статьях [8–10]. В [11] получена полная асимптотика решения задачи оптимального управления для линейных систем с быстрыми и медленными переменными, ограничивающим множеством в виде шара в евклидовом пространстве и с интегральным выпуклым критерием качества.

Одна из отличительных особенностей рассматриваемой задачи (1.1) состоит в том, что собственные значения матрицы при быстрых переменных равны нулю и тем самым нарушено стандартное условие (см. [12, условие IV, формула (3.22)]) их отрицательности, т. е. реализуется критический случай в терминологии [13]. Отметим, что при наличии этого условия для многих типов задач оптимального управления с линейной сингулярно возмущенной системой найдены предельные задачи (см., например, [6, гл. 3]). Другой особенностью постановки задачи (1.1) является неограниченное целевое множество.

Цель настоящего исследования — доказать разрешимость задачи (1.1), в общем случае получить основную систему уравнений для нахождения оптимального времени и вектора, порождающего оптимальное управление. В случае $m = 1$ — вывести асимптотику решения относительно малого параметра ε.

Настоящая работа развивает результаты авторов, опубликованные ранее в журнале[1,2].

2. Разрешимость задачи

Обозначим

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & I_{2m} \\ 0 & \varepsilon^{-2} J \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-2} I_{2m} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad z^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4m}, \tag{2.1}$$

[1] Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи быстродействия с двумя малыми параметрами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 88–101.

[2] Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи быстродействия перевода объекта на множество // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 132–146; пер. *Proc. Steklov Instit. Math.*, 2021, vol. 313, suppl. 1, pp. 40–53.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad x_i, y_i, u_i \in \mathbb{R}^m, \quad i = 1, 2.$$

Вследствие критерия Калмана (см., например, [14, с. 91, теорема 5]) при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ система (1.1) с матрицами $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ из (2.1) вполне управляема.

Непосредственным вычислением из (1.2), (2.1) и равенства $J^2 = 0$ получаем, что

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} I_{2m} & tI_{2m} + \dfrac{t^2}{2\varepsilon^2} J \\ 0 & I_{2m} + \dfrac{t}{\varepsilon^2} J \end{pmatrix}, \quad e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{t}{\varepsilon^2} I_{2m} + \dfrac{t^2}{2\varepsilon^4} J \\ \frac{1}{\varepsilon^2} I_{2m} + \dfrac{t^2}{\varepsilon^4} J \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Утверждение 1. *Задача* (1.1) *разрешима при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для разрешимости задачи, как и в теореме 1 из работы [15], необходимо и достаточно показать, что $\exists T > 0$, $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\forall \psi \in \mathbb{R}^{2m}$ справедливо неравенство

$$-\Big\langle e^{\mathcal{A}_\varepsilon T} z^0, \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} \Big\rangle \leqslant \int_0^T \Big\| \mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* t} \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} \Big\| dt. \tag{2.3}$$

Здесь и далее $*$ — знак операции транспонирования матриц. Домножив неравенство (2.3) на ε^4, с учетом соотношения (2.2) имеем

$$-\varepsilon^2 \Big\langle \varepsilon^2 x^0 + \varepsilon^2 T y^0 + \frac{T^2}{2} J y^0, \psi \Big\rangle \leqslant \int_0^T \Big\| \varepsilon^2 t \psi + \frac{t^2}{2} J^* \psi \Big\| dt. \tag{2.4}$$

Отметим, что в силу определения (1.2) выполняются соотношения

$$J y^0 = \begin{pmatrix} y_2^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^2 t \psi + \frac{t^2}{2} J^* \psi = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 t \psi_1 \\ \varepsilon^2 t \psi_2 + \frac{t^2}{2} \psi_1 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда после введения обозначения $\widetilde{\psi}_2 := \varepsilon^2 \psi_2$ неравенство (2.4) можно записать в виде

$$-\varepsilon^2 \Big\langle \varepsilon^2 x_1^0 + \varepsilon^2 T y_1^0 + \frac{T^2}{2} y_2^0, \psi_1 \Big\rangle - \varepsilon^2 \Big\langle x_2^0 + T y_2^0, \widetilde{\psi}_2 \Big\rangle$$
$$\leqslant \int_0^T \Big(\varepsilon^4 t^2 \|\psi_1\|^2 + \Big\| t \widetilde{\psi}_2 + \frac{t^2}{2} \psi_1 \Big\|^2 \Big)^{1/2} dt. \tag{2.5}$$

Отметим, что неравенство (2.5) положительно однородно относительно вектора $(\psi_1^*, \widetilde{\psi}_2^*)^*$. Следовательно, можно считать, что

$$\|\psi_1\|^2 + \|\widetilde{\psi}_2\|^2 = 1. \tag{2.6}$$

Предположим, что неравенство (2.3) не выполняется ни при каком $T > 0$, т. е. $\forall T > 0$, $\forall \varepsilon_0 > 0$, $\exists \varepsilon(\varepsilon_0)$, $\exists \psi_\varepsilon \in \mathbb{R}^{2m}$, что неравенство (2.3) неверно. Зафиксируем $T > 0$, возьмем $\varepsilon_0 = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, и найдем такие $0 < \varepsilon_n < 1/n$, $\psi_{1,n} := \psi_{1,\varepsilon_n}$, $\psi_{2,n} := \psi_{2,\varepsilon_n}$, что

$$-\varepsilon_n^2 \Big\langle \varepsilon_n^2 x_1^0 + \varepsilon_n^2 T y_1^0 + \frac{T^2}{2} y_2^0, \psi_{1,n} \Big\rangle - \varepsilon_n^2 \Big\langle x_2^0 + T y_2^0, \widetilde{\psi}_{2,n} \Big\rangle$$
$$> \int_0^T \Big(\varepsilon_n^4 t^2 \|\psi_{1,n}\|^2 + \Big\| t \widetilde{\psi}_{2,n} + \frac{t^2}{2} \psi_{1,n} \Big\|^2 \Big)^{1/2} dt. \tag{2.7}$$

В силу (2.6), не ограничивая общности, можно считать, что

$$\psi_{1,n} \to \psi_{1,0}, \quad \widetilde{\psi}_{2,n} \to \widetilde{\psi}_{2,0} \ \text{ при } \ n \to \infty, \quad \|\psi_{1,0}\|^2 + \|\widetilde{\psi}_{2,0}\|^2 = 1. \tag{2.8}$$

Перейдя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве (2.7), имеем

$$0 \geqslant \int\limits_0^T \Big\| t\widetilde{\psi}_{2,0} + \frac{t^2}{2}\psi_{1,0} \Big\| dt.$$

Отсюда следует, что $t\widetilde{\psi}_{2,0} + \dfrac{t^2}{2}\psi_{1,0} \equiv 0$, это эквивалентно тому, что $\psi_{1,0} = 0$ и $\widetilde{\psi}_{2,0} = 0$; противоречие с (2.8). □

Итак, задача (1.1) разрешима; обозначим через T_ε — оптимальное время в этой задаче.

Утверждение 2. $T_\varepsilon \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T_0 > 0$ — предельная точка для T_ε, т. е. для некоторой последовательности $\varepsilon_n \to +0$ выполняется $T_{\varepsilon_n} \to T_0$. Тогда для $T = T_0/2$ условие (2.5), начиная с некоторого n_0, не выполняется. Следовательно, найдутся такие последовательности $\psi_{1,n}$ и $\widetilde{\psi}_{2,n}$, что для $T = T_0/2$ неравенство (2.5) не выполнено. После перехода к пределу при $n \to \infty$ получаем равенство $0 = \int_0^{T_0/2} \Big\| t\widetilde{\psi}_{2,0} + \dfrac{t^2}{2}\psi_{1,0} \Big\| dt$, которое при $T_0 > 0$ влечет $\psi_{1,0} = 0$ и $\widetilde{\psi}_{2,0} = 0$, что, в свою очередь, противоречит (2.8). □

3. Основная система уравнений

Пусть $u_\varepsilon(t)$ — оптимальное управление в задаче (1.1). Тогда в силу принципа максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи (см., например, теорему 18 из [14, п. 2.5]) существует такой вектор $L_\varepsilon \perp G$, т. е. $L_\varepsilon = (l_\varepsilon^*, 0^*)^*$, $l_\varepsilon \in \mathbb{R}^{2m}$, $l_\varepsilon \neq 0$, что для решения сопряженной задачи

$$\dot{\psi}_\varepsilon = -\mathcal{A}_\varepsilon^* \psi, \quad \psi_\varepsilon(T_\varepsilon) = L_\varepsilon$$

выполняется соотношение $\langle \psi_\varepsilon(t), \mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon(t) \rangle = \max_{\|u\| \leqslant 1} \langle \psi_\varepsilon(t), B_\varepsilon u \rangle = \|B_\varepsilon^* \psi_\varepsilon(t)\|$. Поскольку $\psi_\varepsilon(t) = e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon - t)} L_\varepsilon$, то при t таких, что $\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon - t)} L_\varepsilon \neq 0$, оптимальное управление $u_\varepsilon(t)$ имеет вид

$$u_\varepsilon(t) = \frac{\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon - t)} L_\varepsilon}{\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon - t)} L_\varepsilon\|}. \tag{3.1}$$

С учетом условия $x(T_\varepsilon) = 0$ в силу формулы Коши и определения $u_\varepsilon(t)$ (3.1) выводим

$$0 = R\left(e^{\mathcal{A}_\varepsilon T_\varepsilon} z^0 + \int\limits_0^{T_\varepsilon} \frac{e^{\mathcal{A}_\varepsilon(T_\varepsilon - t)} \mathcal{B}_\varepsilon \, \mathcal{B}_\varepsilon^* \, e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon - t)} \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}}{\Big\| \mathcal{B}_\varepsilon^* \, e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon - t)} \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \Big\|} \, dt \right), \quad R = (I_{2m}, 0). \tag{3.2}$$

После замены переменной интегрирования по формуле $\tau = T_\varepsilon - t$, используя соотношения (2.2), приходим к уравнению

$$0 = x^0 + T_\varepsilon y^0 + \frac{T_\varepsilon^2}{2\varepsilon^2} J y^0 + \int\limits_0^{T_\varepsilon} \Big(\frac{\tau}{\varepsilon^2} I_{2m} + \frac{\tau^2}{2\varepsilon^4} J \Big) \frac{\dfrac{\tau}{\varepsilon^2} l_\varepsilon + \dfrac{\tau^2}{2\varepsilon^4} J^* l_\varepsilon}{\Big\| \dfrac{\tau}{\varepsilon^2} l_\varepsilon + \dfrac{\tau^2}{2\varepsilon^4} J^* l_\varepsilon \Big\|} \, d\tau, \tag{3.3}$$

эквивалентному (3.2). Отметим, что подынтегральная функция в уравнении (3.3) положительно однородна относительно вектора l_ε, *определяющего* оптимальное управление, поэтому в дальнейшем уравнение (3.3) необходимо дополнить каким-либо условием нормировки этого вектора.

Введя обозначение $l_\varepsilon = (l^*_{1,\varepsilon}, l^*_{2,\varepsilon})^*$, $l_{1,\varepsilon}, l_{2,\varepsilon} \in \mathbb{R}^m$, запишем систему (3.3) в "координатном" виде:

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= x_1^0 + T_\varepsilon y_1^0 + \frac{T_\varepsilon^2}{2\varepsilon^2} y_2^0 + \frac{1}{\varepsilon^4}\int\limits_0^{T_\varepsilon} \frac{\tau^2 l_{1,\varepsilon} + \dfrac{\tau^3}{2\varepsilon^2} l_{2,\varepsilon} + \dfrac{\tau^4}{4\varepsilon^4} l_{1,\varepsilon}}{\left(\dfrac{\tau^2}{\varepsilon^4}\|l_{1,\varepsilon}\|^2 + \dfrac{\tau^2}{\varepsilon^8}\left\|\varepsilon^2 l_{2,\varepsilon} + \dfrac{\tau}{2} l_{1,\varepsilon}\right\|^2\right)^{1/2}}\, d\tau, \\ 0 &= x_2^0 + T_\varepsilon y_2^0 + \frac{1}{\varepsilon^4}\int\limits_0^{T_\varepsilon} \frac{\tau^2 l_{2,\varepsilon} + \dfrac{\tau^3}{2\varepsilon^2} l_{1,\varepsilon}}{\left(\dfrac{\tau^2}{\varepsilon^4}\|l_{1,\varepsilon}\|^2 + \dfrac{\tau^2}{\varepsilon^8}\left\|\varepsilon^2 l_{2,\varepsilon} + \dfrac{\tau}{2} l_{1,\varepsilon}\right\|^2\right)^{1/2}}\, d\tau, \end{aligned}\right.$$

или

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= x_1^0 + T_\varepsilon y_1^0 + \frac{T_\varepsilon^2}{2\varepsilon^2} y_2^0 + \frac{1}{\varepsilon^4}\int\limits_0^{T_\varepsilon} \frac{\tau\varepsilon^4 l_{1,\varepsilon} + \dfrac{\tau^2\varepsilon^2}{2} l_{2,\varepsilon} + \dfrac{\tau^3}{4} l_{1,\varepsilon}}{\left(\varepsilon^4\|l_{1,\varepsilon}\|^2 + \left\|\varepsilon^2 l_{2,\varepsilon} + \dfrac{\tau}{2} l_{1,\varepsilon}\right\|^2\right)^{1/2}}\, d\tau, \\ 0 &= x_2^0 + T_\varepsilon y_2^0 + \frac{1}{\varepsilon^4}\int\limits_0^{T_\varepsilon} \frac{\tau\varepsilon^4 l_{2,\varepsilon} + \dfrac{\tau^2\varepsilon^2}{2} l_{1,\varepsilon}}{\left(\varepsilon^4\|l_{1,\varepsilon}\|^2 + \left\|\varepsilon^2 l_{2,\varepsilon} + \dfrac{\tau}{2} l_{1,\varepsilon}\right\|^2\right)^{1/2}}\, d\tau. \end{aligned}\right. \tag{3.4}$$

После замены переменной интегрирования по формуле $\tau = T_\varepsilon \eta$ приходим к следующей системе, эквивалентной (3.4):

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= x_1^0 + T_\varepsilon y_1^0 + \frac{T_\varepsilon^2}{2\varepsilon^2} y_2^0 + \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^4}\int\limits_0^{1} \frac{\eta\varepsilon^4 l_{1,\varepsilon} + \dfrac{\eta^2 T_\varepsilon\varepsilon^2}{2} l_{2,\varepsilon} + \dfrac{\eta^3 T_\varepsilon^2}{4} l_{1,\varepsilon}}{\left(\varepsilon^4\|l_{1,\varepsilon}\|^2 + \left\|\varepsilon^2 l_{2,\varepsilon} + \dfrac{\eta T_\varepsilon}{2} l_{1,\varepsilon}\right\|^2\right)^{1/2}}\, d\eta, \\ 0 &= x_2^0 + T_\varepsilon y_2^0 + \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^4}\int\limits_0^{1} \frac{\eta\varepsilon^4 l_{2,\varepsilon} + \dfrac{\eta^2 T_\varepsilon\varepsilon^2}{2} l_{1,\varepsilon}}{\left(\varepsilon^4\|l_{1,\varepsilon}\|^2 + \left\|\varepsilon^2 l_{2,\varepsilon} + \dfrac{\eta T_\varepsilon}{2} l_{1,\varepsilon}\right\|^2\right)^{1/2}}\, d\eta. \end{aligned}\right. \tag{3.5}$$

Рассмотрим новые неизвестные величины

$$\vartheta_\varepsilon := \frac{\varepsilon^2}{T_\varepsilon}, \qquad \widehat{l}_{2,\varepsilon} := \vartheta_\varepsilon l_{2,\varepsilon}. \tag{3.6}$$

Тогда система (3.5) после умножения первого уравнения на $\vartheta_\varepsilon^3/\varepsilon^2$ и второго уравнения — на $\vartheta_\varepsilon^2/\varepsilon^2 = \varepsilon^2/T_\varepsilon^2$ и перехода к новым неизвестным примет вид

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{\vartheta_\varepsilon^3}{\varepsilon^2} x_1^0 + \vartheta_\varepsilon^2 y_1^0 + \frac{\vartheta_\varepsilon}{2} y_2^0 + \int\limits_0^{1} \frac{\eta\vartheta_\varepsilon^2 l_{1,\varepsilon} + \dfrac{\eta^2}{2}\widehat{l}_{2,\varepsilon} + \dfrac{\eta^3}{4} l_{1,\varepsilon}}{\left(\vartheta_\varepsilon^2\|l_{1,\varepsilon}\|^2 + \left\|\widehat{l}_{2,\varepsilon} + \dfrac{\eta}{2} l_{1,\varepsilon}\right\|^2\right)^{1/2}}\, d\eta, \\ 0 &= \frac{\vartheta_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} x_2^0 + \vartheta_\varepsilon y_2^0 + \int\limits_0^{1} \frac{\eta\widehat{l}_{2,\varepsilon} + \dfrac{\eta^2}{2} l_{1,\varepsilon}}{\left(\vartheta_\varepsilon^2\|l_{1,\varepsilon}\|^2 + \left\|\widehat{l}_{2,\varepsilon} + \dfrac{\eta}{2} l_{1,\varepsilon}\right\|^2\right)^{1/2}}\, d\eta. \end{aligned}\right. \tag{3.7}$$

Поскольку подынтегральная функция в (3.7) положительно однородна относительно координат вектора $(l^*_{1,\varepsilon}, \widehat{l}^*_{2,\varepsilon})^*$, дополним систему (3.7) условием для нормы этого неизвестного вектора:

$$\|l_{1,\varepsilon}\|^2 + \|\widehat{l}_{2,\varepsilon}\|^2 = 1. \tag{3.8}$$

Утверждение 3. $\vartheta_\varepsilon \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Обозначим $\theta_\varepsilon := \vartheta_\varepsilon^{-1}$, тогда $T_\varepsilon = \varepsilon^2\theta_\varepsilon$. В этих обозначениях условие (2.5) после замены переменной интегрирования в правой части неравенства по формуле $t = \varepsilon^2\tau$ примет вид

$$-\Big\langle x_1^0 + \varepsilon^2\theta_\varepsilon y_1^0 + \varepsilon^2\frac{\theta_\varepsilon^2}{2}y_2^0,\, \varepsilon^2\psi_1\Big\rangle - \Big\langle x_2^0 + \varepsilon^2\theta_\varepsilon y_2^0,\, \widetilde{\psi}_2\Big\rangle$$

$$\leqslant \varepsilon^2\int_0^{\theta_\varepsilon}\Big(\varepsilon^4\tau^2\|\psi_1\|^2 + \Big\|\tau\widetilde{\psi}_2 + \varepsilon^2\frac{\tau^2}{2}\psi_1\Big\|^2\Big)^{1/2}d\tau. \tag{3.9}$$

Покажем, что у θ_ε нет конечных предельных точек. Предположим, что $\theta_{\varepsilon_n} \to \theta_0 \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$. Возьмем $\psi_{1,n} := -\varepsilon_n^{-2}x_1^0$, $\widetilde{\psi}_{2,n} := -x_2^0$. Отметим, что при таких $\psi_{1,n}$ и $\widetilde{\psi}_{2,n}$ подынтегральная функция в правой части (3.9) ограничена. Перейдя в (3.9) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\|x_1^0\|^2 + \|x_2^0\|^2 \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что $x^0 = 0$, а это противоречит исходному предположению в постановке задачи (1.1). □

4. Предельные соотношения

Интегралы в правых частях (3.7) конечны, поэтому из (3.7) следует, что $\dfrac{\vartheta_\varepsilon^3}{\varepsilon^2}$ и $\dfrac{\vartheta_\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$ ограничены при $\varepsilon \to 0$. Но если $\dfrac{\vartheta_\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$ ограничено, то в силу утверждения 3 выполняется $\dfrac{\vartheta_\varepsilon^3}{\varepsilon^2} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому для предельной точки $\begin{pmatrix} l_{1,0} \\ \widehat{l}_{2,0}\end{pmatrix}$ вектора $\begin{pmatrix} l_{1,\varepsilon} \\ \widehat{l}_{2,\varepsilon}\end{pmatrix}$ получим из первого уравнения системы (3.7)

$$0 = \int_0^1 \eta^2\frac{\widehat{l}_{2,0} + \frac{\eta}{2}l_{1,0}}{\Big\|\widehat{l}_{2,0} + \frac{\eta}{2}l_{1,0}\Big\|}\,d\eta.$$

Отсюда

$$\widehat{l}_{2,0} = -\lambda_0 l_{1,0} \tag{4.1}$$

для некоторой постоянной $\lambda_0 > 0$. Тогда выполняется равенство

$$0 = \int_0^1 \eta^2\frac{\eta - 2\lambda_0}{|\eta - 2\lambda_0|}\,d\eta.$$

Тем самым $2\lambda_0 \in (0,1)$. Далее,

$$0 = -\int_0^{2\lambda_0}\eta^2 d\eta + \int_{2\lambda_0}^1 \eta^2 d\eta = -\frac{8\lambda_0^3}{3} + \frac{1}{3} - \frac{8\lambda_0^3}{3}.$$

Соответственно

$$\lambda_0 = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}. \tag{4.2}$$

При таком значении λ_0 имеем

$$\int_0^1 \eta\frac{\eta - 2\lambda_0}{|\eta - 2\lambda_0|}\,d\eta = \frac{1 - \sqrt[3]{2}}{2} =: A_0 < 0.$$

Тогда из второго уравнения системы (3.7) при условии

$$x_2^0 \neq 0 \tag{4.3}$$

получаем, что

$$\frac{\vartheta_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} x_2^0 \to A_1 x_2^0 = -A_0 \frac{l_{1,0}}{\|l_{1,0}\|}, \quad \text{где} \quad A_1 > 0. \tag{4.4}$$

Отсюда

$$A_1 = \frac{|A_0|}{\|x_2^0\|}. \tag{4.5}$$

При этом в силу условия (3.8) выполняется $\|l_{1,0}\|^2 + \lambda_0^2 \|l_{1,0}\|^2 = 1$. Значит,

$$\|l_{1,0}\|^2 = \frac{1}{1+\lambda_0^2}, \quad l_{1,0} = \frac{x_2^0}{\|x_2^0\|} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_0^2}}$$

задает единственную предельную точку. При выполнении условия (4.3) имеем $l_{1,0} \neq 0$, $\widehat{l}_{2,0} \neq 0$. В дальнейшем для удобства вместо (3.8) введем новые условия нормировки

$$\|l_{1,\varepsilon}\| = 1, \quad \|l_{1,0}\| = 1. \tag{4.6}$$

Следовательно, с учетом (4.1)

$$l_{1,0} = \frac{x_2^0}{\|x_2^0\|}, \quad \widehat{l}_{2,0} = -\lambda_0 l_{1,0}. \tag{4.7}$$

5. Асимптотика решения задачи в случае $m = 1$

Нахождение асимптотики решения системы уравнений (3.7), (4.6) для произвольного натурального m требует применения метода вспомогательного параметра [16; 17, § 30, п. II]. В случае $m = 1$ можно обойтись без него, поскольку интегралы в правых частях уравнений (3.7) вычисляются в явном виде. Поэтому рассмотрим систему (3.7), (4.6) в случае $m = 1$:

$$|l_{1,\varepsilon}| = 1, \quad |l_{1,0}| = 1, \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\vartheta_\varepsilon^3}{\varepsilon^2} x_1^0 + \vartheta_\varepsilon^2 y_1^0 + \frac{\vartheta_\varepsilon}{2} y_2^0 + \int_0^1 \frac{\eta \vartheta_\varepsilon^2 l_{1,\varepsilon} + \dfrac{\eta^2}{2}\widehat{l}_{2,\varepsilon} + \dfrac{\eta^3}{4} l_{1,\varepsilon}}{\left(\vartheta_\varepsilon^2 + \left(\widehat{l}_{2,\varepsilon} + \dfrac{\eta}{2} l_{1,\varepsilon}\right)^2\right)^{1/2}}\, d\eta, \\ 0 &= \frac{\vartheta_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} x_2^0 + \vartheta_\varepsilon y_2^0 + \int_0^1 \frac{\eta \widehat{l}_{2,\varepsilon} + \dfrac{\eta^2}{2} l_{1,\varepsilon}}{\left(\vartheta_\varepsilon^2 + \left(\widehat{l}_{2,\varepsilon} + \dfrac{\eta}{2} l_{1,\varepsilon}\right)^2\right)^{1/2}}\, d\eta. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Пусть для определенности $x_2^0 > 0$, тогда в силу (4.7) имеем $l_{1,0} = 1$, $\widehat{l}_{2,0} = -\lambda_0$. Из условия (5.1) следует, что $l_{1,\varepsilon} \equiv l_{1,0} = 1$. Выпишем систему уравнений для нахождения двух неизвестных $\widehat{l}_{2,\varepsilon}$ и ϑ_ε:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\vartheta_\varepsilon^3}{\varepsilon^2} x_1^0 + \vartheta_\varepsilon^2 y_1^0 + \frac{\vartheta_\varepsilon}{2} y_2^0 + \int_0^1 \frac{\eta \vartheta_\varepsilon^2 + \dfrac{\eta^2}{2}\widehat{l}_{2,\varepsilon} + \dfrac{\eta^3}{4}}{\left(\vartheta_\varepsilon^2 + \left(\widehat{l}_{2,\varepsilon} + \dfrac{\eta}{2}\right)^2\right)^{1/2}}\, d\eta, \\ 0 &= \frac{\vartheta_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} x_2^0 + \vartheta_\varepsilon y_2^0 + \int_0^1 \frac{\eta \widehat{l}_{2,\varepsilon} + \dfrac{\eta^2}{2}}{\left(\vartheta_\varepsilon^2 + \left(\widehat{l}_{2,\varepsilon} + \dfrac{\eta}{2}\right)^2\right)^{1/2}}\, d\eta. \end{aligned}$$

После замены в интегралах в (5.2) переменной интегрирования по формуле $\xi = \widehat{l}_{2,\varepsilon} + \dfrac{\eta}{2}$ приходим к уравнениям

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\vartheta_\varepsilon^3}{\varepsilon^2}x_1^0 + \vartheta_\varepsilon^2 y_1^0 + \frac{\vartheta_\varepsilon}{2}y_2^0 + 4\int\limits_{\widehat{l}_{2,\varepsilon}}^{\widehat{l}_{2,\varepsilon}+1/2} \frac{\vartheta_\varepsilon^2(\xi-\widehat{l}_{2,\varepsilon}) + \xi(\xi-\widehat{l}_{2,\varepsilon})^2}{\sqrt{\xi^2+\vartheta_\varepsilon^2}}\,d\xi,\\
0 &= \frac{\vartheta_\varepsilon^2}{\varepsilon^2}x_2^0 + \vartheta_\varepsilon y_2^0 + 4\int\limits_{\widehat{l}_{2,\varepsilon}}^{\widehat{l}_{2,\varepsilon}+1/2} \frac{\xi(\xi-\widehat{l}_{2,\varepsilon})}{\sqrt{\xi^2+\vartheta_\varepsilon^2}}\,d\xi.
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Далее, вычислим отдельно интегралы в правых частях уравнений (5.3):

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \int\limits_{\widehat{l}_{2,\varepsilon}}^{\widehat{l}_{2,\varepsilon}+1/2} \frac{\vartheta_\varepsilon^2(\xi-\widehat{l}_{2,\varepsilon}) + \xi(\xi-\widehat{l}_{2,\varepsilon})^2}{\sqrt{\xi^2+\vartheta_\varepsilon^2}}\,d\xi\\
&= \int\limits_{\widehat{l}_{2,\varepsilon}}^{\widehat{l}_{2,\varepsilon}+1/2} \frac{\xi^3 - 2\widehat{l}_{2,\varepsilon}\xi^2 + \xi(\vartheta_\varepsilon^2+\widehat{l}_{2,\varepsilon}^2) - \widehat{l}_{2,\varepsilon}\vartheta_\varepsilon^2}{\sqrt{\xi^2+\vartheta_\varepsilon^2}}\,d\xi\\
&= \Big[\frac{1}{3}\sqrt{\xi^2+\vartheta_\varepsilon^2}(\xi^2-2\vartheta_\varepsilon^2) - \widehat{l}_{2,\varepsilon}\Big(\xi\sqrt{\xi^2+\vartheta_\varepsilon^2} - \vartheta_\varepsilon^2\ln\Big|\xi+\sqrt{\xi^2+\vartheta_\varepsilon^2}\Big|\Big)\\
&\qquad + (\vartheta_\varepsilon^2+\widehat{l}_{2,\varepsilon}^2)\sqrt{\xi^2+\vartheta_\varepsilon^2} - \widehat{l}_{2,\varepsilon}\vartheta_\varepsilon^2\ln\Big|\xi+\sqrt{\xi^2+\vartheta_\varepsilon^2}\Big|\Big]\Big|_{\widehat{l}_{2,\varepsilon}}^{\widehat{l}_{2,\varepsilon}+1/2}\\
&= \sqrt{\xi^2+\vartheta_\varepsilon^2}\Big(\frac{\xi^2}{3} - \widehat{l}_{2,\varepsilon}\xi + \widehat{l}_{2,\varepsilon}^2 + \frac{\vartheta_\varepsilon^2}{3}\Big)\Big|_{\widehat{l}_{2,\varepsilon}}^{\widehat{l}_{2,\varepsilon}+1/2}\\
&= \frac{1}{3}\sqrt{\widehat{l}_{2,\varepsilon}^2 + \widehat{l}_{2,\varepsilon} + \frac{1}{4} + \vartheta_\varepsilon^2}\Big(\widehat{l}_{2,\varepsilon}^2 - \frac{1}{2}\widehat{l}_{2,\varepsilon} + \frac{1}{4} + \vartheta_\varepsilon^2\Big) - \frac{1}{3}\sqrt{\widehat{l}_{2,\varepsilon}^2+\vartheta_\varepsilon^2}\,\Big(\widehat{l}_{2,\varepsilon}^2+\vartheta_\varepsilon^2\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_2 &= \int\limits_{\widehat{l}_{2,\varepsilon}}^{\widehat{l}_{2,\varepsilon}+1/2} \frac{\xi^2 - \widehat{l}_{2,\varepsilon}\xi}{\sqrt{\xi^2+\vartheta_\varepsilon^2}}\,d\xi\\
&= \Big[\frac{1}{2}\Big(\xi\sqrt{\xi^2+\vartheta_\varepsilon^2} - \vartheta_\varepsilon^2\ln\Big|\xi+\sqrt{\xi^2+\vartheta_\varepsilon^2}\Big|\Big) - \widehat{l}_{2,\varepsilon}\sqrt{\xi^2+\vartheta_\varepsilon^2}\Big]\Big|_{\widehat{l}_{2,\varepsilon}}^{\widehat{l}_{2,\varepsilon}+1/2}\\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} - \widehat{l}_{2,\varepsilon}\Big)\sqrt{\widehat{l}_{2,\varepsilon}^2 + \widehat{l}_{2,\varepsilon} + \frac{1}{4} + \vartheta_\varepsilon^2} + \frac{\widehat{l}_{2,\varepsilon}}{2}\sqrt{\widehat{l}_{2,\varepsilon}^2+\vartheta_\varepsilon^2}\\
&\quad - \frac{\vartheta_\varepsilon^2}{2}\ln\Big|\widehat{l}_{2,\varepsilon} + \frac{1}{2} + \sqrt{\widehat{l}_{2,\varepsilon}^2 + \widehat{l}_{2,\varepsilon} + \frac{1}{4} + \vartheta_\varepsilon^2}\Big| + \frac{\vartheta_\varepsilon^2}{2}\ln\Big|\widehat{l}_{2,\varepsilon} + \sqrt{\widehat{l}_{2,\varepsilon}^2+\vartheta_\varepsilon^2}\Big|\\
&:= Y_{2,1} - \frac{\vartheta_\varepsilon^2}{2}Y_{2,2} + \frac{\vartheta_\varepsilon^2}{2}Y_{2,3}.
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Введем новый неизвестный вектор $r_\varepsilon = (\Delta l_\varepsilon, \Delta\vartheta_\varepsilon)^*$ с малыми скалярными компонентами Δl_ε и $\Delta\vartheta_\varepsilon$, задаваемыми формулами

$$
\widehat{l}_{2,\varepsilon} = -\lambda_0 + \Delta l_\varepsilon, \quad \vartheta_\varepsilon = \varepsilon(\vartheta_0 + \Delta\vartheta_\varepsilon), \quad \Delta l_\varepsilon, \Delta\vartheta_\varepsilon = o(1), \quad \varepsilon \to +0, \tag{5.5}
$$

для λ_0 из (4.2) и $\vartheta_0=\sqrt{A_1}>0$ (4.5). Обозначим

$$A_2:=\lambda_0^2+\frac{\lambda_0}{2}+\frac{1}{4}. \tag{5.6}$$

Тогда

$$\begin{aligned}Y_1&=\frac{1}{6}(1-2\lambda_0)\Big(1+\frac{4\Delta l_\varepsilon}{1-2\lambda_0}+\frac{4(\Delta l_\varepsilon^2+\vartheta_\varepsilon^2)}{(1-2\lambda_0)^2}\Big)^{1/2}\Big(A_2-\Big(2\lambda_0+\frac{1}{2}\Big)\Delta l_\varepsilon+\Delta l_\varepsilon^2+\vartheta_\varepsilon^2\Big)\\&\quad-\frac{1}{3}\lambda_0\Big(1-\frac{2\Delta l_\varepsilon}{\lambda_0}+\frac{\Delta l_\varepsilon^2+\vartheta_\varepsilon^2}{\lambda_0^2}\Big)^{1/2}(\lambda_0^2-2\lambda_0\Delta l_\varepsilon+\Delta l_\varepsilon^2+\vartheta_\varepsilon^2)\\&=\frac{1}{6}\big((1-2\lambda_0)A_2-2\lambda_0^3\big)+\frac{1}{6}(1-2\lambda_0)\Big(\frac{2A_2}{1-2\lambda_0}-2\lambda_0-\frac{1}{2}\Big)\Delta l_\varepsilon+\lambda_0^2\Delta l_\varepsilon+\sum_{k=2}^{\infty}\overset{1}{\mathcal{H}}_k\,(\varepsilon,\Delta l_\varepsilon,\Delta\vartheta_\varepsilon).\end{aligned}$$

С учетом формул (4.2), (5.6) получаем, что первое слагаемое здесь обращается в нуль, а $\dfrac{1}{6}(1-2\lambda_0)\Big[\dfrac{2A_2}{1-2\lambda_0}-2\lambda_0-\dfrac{1}{2}\Big]+\lambda_0^2=\sqrt[3]{2}/4$. Кроме того, здесь и далее $\overset{l}{\mathcal{H}}_k\,(\varepsilon,\Delta l_\varepsilon,\Delta\vartheta_\varepsilon)$ — однородные многочлены степени k относительно аргументов. В этом случае

$$Y_1=\frac{\sqrt[3]{2}}{4}\Delta l_\varepsilon+\sum_{k=2}^{\infty}\overset{1}{\mathcal{H}}_k\,(\varepsilon,\Delta l_\varepsilon,\Delta\vartheta_\varepsilon).$$

Теперь преобразуем отдельно слагаемые в (5.4):

$$\begin{aligned}Y_{2,1}&=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}-\widehat{l}_{2,\varepsilon}\Big)\sqrt{\widehat{l}_{2,\varepsilon}^2+\widehat{l}_{2,\varepsilon}+\frac{1}{4}+\vartheta_\varepsilon^2}+\frac{\widehat{l}_{2,\varepsilon}}{2}\sqrt{\widehat{l}_{2,\varepsilon}^2+\vartheta_\varepsilon^2}\\&=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}+\lambda_0-\Delta l_\varepsilon\Big)\Big(\Big(\frac{1}{2}-\lambda_0\Big)^2+(1-2\lambda_0)\Delta l_\varepsilon+\Delta l_\varepsilon^2+\vartheta_\varepsilon^2\Big)^{1/2}\\&\quad+\frac{-\lambda_0+\Delta l_\varepsilon}{2}(\lambda_0^2-2\lambda_0\Delta l_\varepsilon+\Delta l_\varepsilon^2+\vartheta_\varepsilon^2)^{1/2}\\&=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}+\lambda_0-\Delta l_\varepsilon\Big)\Big(\frac{1}{2}-\lambda_0\Big)\Big(1+\frac{4\Delta l_\varepsilon}{1-2\lambda_0}+\frac{\Delta l_\varepsilon^2+\vartheta_\varepsilon^2}{\Big(\frac{1}{2}-\lambda_0\Big)^2}\Big)^{1/2}\\&\quad+\frac{-\lambda_0+\Delta l_\varepsilon}{2}\lambda_0\Big(1-2\frac{\Delta l_\varepsilon}{\lambda_0}+\frac{\Delta l_\varepsilon^2+\vartheta_\varepsilon^2}{\lambda_0^2}\Big)^{1/2}\\&=\frac{1}{8}-\lambda_0^2+2\lambda_0\Delta l_\varepsilon+\sum_{k=2}^{\infty}\overset{2}{\mathcal{H}}_k\,(\varepsilon,\Delta l_\varepsilon,\Delta\vartheta_\varepsilon),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y_{2,2}&=\ln\Big|\widehat{l}_{2,\varepsilon}+\frac{1}{2}+\sqrt{\widehat{l}_{2,\varepsilon}^2+\widehat{l}_{2,\varepsilon}+\frac{1}{4}+\vartheta_\varepsilon^2}\Big|\\&=\ln\Big|\frac{1}{2}-\lambda_0+\Delta l_\varepsilon+\Big(\Big(\frac{1}{2}-\lambda_0\Big)^2+(1-2\lambda_0)\Delta l_\varepsilon+\Delta l_\varepsilon^2+\vartheta_\varepsilon^2\Big)^{1/2}\Big|\\&=\ln\Big|\frac{1}{2}-\lambda_0+\Delta l_\varepsilon+\Big(\frac{1}{2}-\lambda_0\Big)\Big(1+\frac{4\Delta l_\varepsilon}{1-2\lambda_0}+\frac{\Delta l_\varepsilon^2+\vartheta_\varepsilon^2}{\Big(\frac{1}{2}-\lambda_0\Big)^2}\Big)^{1/2}\Big|\\&=\ln(1-2\lambda_0)+\frac{2\Delta l_\varepsilon}{1-2\lambda_0}+\sum_{k=2}^{\infty}\overset{3}{\mathcal{H}}_k\,(\varepsilon,\Delta l_\varepsilon,\Delta\vartheta_\varepsilon),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Y_{2,3} &= \ln\left|\widehat{l}_{2,\varepsilon} + \sqrt{\widehat{l}_{2,\varepsilon}^2 + \vartheta_\varepsilon^2}\right| = \ln\left|\sqrt{(-\lambda_0 + \Delta l_\varepsilon)^2 + \vartheta_\varepsilon^2} - (\lambda_0 - \Delta l_\varepsilon)\right| \\
&= 2\ln\vartheta_\varepsilon - \ln\left|\lambda_0 - \Delta l_\varepsilon + (\lambda_0^2 - 2\lambda_0\Delta l_\varepsilon + \Delta l_\varepsilon^2 + \vartheta_\varepsilon^2)^{1/2}\right| \\
&= 2\ln\varepsilon + 2\ln(\vartheta_0 + \Delta\vartheta_\varepsilon) - \ln\left|\lambda_0 - \Delta l_\varepsilon + \lambda_0\Big(1 - \frac{2\Delta l_\varepsilon}{\lambda_0} + \frac{\Delta l_\varepsilon^2 + \vartheta_\varepsilon^2}{\lambda_0^2}\Big)^{1/2}\right| \\
&= 2\ln\vartheta_0 - \ln(2\lambda_0) + 2\ln\varepsilon + \frac{\Delta l_\varepsilon}{\lambda_0} + 2\frac{\Delta\vartheta_\varepsilon}{\vartheta_0} + \sum_{k=2}^{\infty}\overset{4}{\mathcal{H}}_k\,(\varepsilon, \Delta l_\varepsilon, \Delta\vartheta_\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Тогда систему уравнений (5.3) относительно Δl_ε и $\Delta\vartheta_\varepsilon$ можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
0 &= \varepsilon\Big(\vartheta_0^3 x_1^0 + \frac{\vartheta_0}{2}y_2^0\Big) + \sqrt[3]{2}\Delta l_\varepsilon + \sum_{k=2}^{\infty}\overset{5}{\mathcal{H}}_k\,(\varepsilon, \Delta l_\varepsilon, \Delta\vartheta_\varepsilon), \\
0 &= \vartheta_0^2 x_2^0 + 4\Big(\frac{1}{8} - \lambda_0^2\Big) + \varepsilon\vartheta_0 y_2^0 + 2\vartheta_0 x_2^0\Delta\vartheta_\varepsilon + 8\lambda_0\Delta l_\varepsilon \\
&\quad - 2\varepsilon^2(\vartheta_0 + \Delta\vartheta_\varepsilon)^2 Y_{2,2} + 2\varepsilon^2(\vartheta_0 + \Delta\vartheta_\varepsilon)^2 Y_{2,3} + \sum_{k=2}^{\infty}\overset{6}{\mathcal{H}}_k\,(\varepsilon, \Delta l_\varepsilon, \Delta\vartheta_\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Принимая во внимание предельное соотношение (4.4), приходим к системе вида

$$
\begin{aligned}
0 &= \varepsilon\left(\vartheta_0^3 x_1^0 + \frac{\vartheta_0}{2}y_2^0\right) + \sqrt[3]{2}\Delta l_\varepsilon + \sum_{k=2}^{\infty}\overset{7}{\mathcal{H}}_k\,(\varepsilon, \Delta l_\varepsilon, \Delta\vartheta_\varepsilon), \\
0 &= \varepsilon\vartheta_0 y_2^0 + 2\vartheta_0 x_2^0\Delta\vartheta_\varepsilon + 8\lambda_0\Delta l_\varepsilon + \sum_{k=2}^{\infty}\overset{8}{\mathcal{H}}_k\,(\varepsilon, \Delta l_\varepsilon, \Delta\vartheta_\varepsilon) \\
&\quad + \varepsilon\ln\varepsilon\cdot 4(\varepsilon\vartheta_0^2 + 2\vartheta_0\varepsilon\Delta\vartheta_\varepsilon + \varepsilon\Delta\vartheta_\varepsilon^2).
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

Отметим, что все указанные в формулах выше ряды $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\overset{l}{\mathcal{H}}_k\,(\varepsilon, \Delta l_\varepsilon, \Delta\vartheta_\varepsilon)$ являются сходящимися при $\varepsilon + |\Delta l_\varepsilon| + |\Delta\vartheta_\varepsilon| \to +0$.

6. Асимптотический аналог теоремы о функции, заданной неявно, и обоснование асимптотики

Теорема 1. *Пусть функция $F\colon (0,\varepsilon_0)\times\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ непрерывна и $F(\varepsilon, r)$ при $\varepsilon + \|r\| \to +0$ раскладывается в асимптотический ряд вида*

$$
F(\varepsilon, r) \overset{as}{=} \varepsilon\widetilde{f} + \mathcal{F}r + \sum_{k=2}^{\infty}\widetilde{H}_{1,k}(\varepsilon, r) + \varepsilon\ln\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{H}_{2,k}(\varepsilon, r),
\tag{6.1}
$$

где каждая компонента $\widetilde{H}_{j,k}$, $j = 1,2$, является однородным многочленом степени k относительно ε и $r_1,\dots,r_p$ — компонент вектора r. Если линейный оператор $\mathcal{F}$ обратим, то у уравнения $F(\varepsilon, r) = 0$ есть решение $r_\varepsilon = o(1)$ и при $\varepsilon \to +0$ оно раскладывается в асимптотический ряд вида

$$
r_\varepsilon \overset{as}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k P_{k-1}(\ln\varepsilon) =: \sum_{k=1}^{\infty} r_{\varepsilon,k},
\tag{6.2}
$$

где $P_{k-1}(\ln\varepsilon)$ — многочлен от $\ln\varepsilon$ степени не выше, чем $k-1$, с векторными коэффициентами. При этом все такие решения уравнения $F(\varepsilon, r) = 0$ имеют эквивалентные асимптотические ряды вида (6.2). (*В частности, если в* (6.1) *ряд при $\varepsilon\ln\varepsilon$ — тождественный нуль, то решения r_ε раскладываются в ряд по степеням ε*).

Если $F(\varepsilon, r)$ дифференцируема по r и имеет разложение (6.1), *которое допускает почленное дифференцирование по r, то указанное решение единственно.*

Доказательство. **1**. Далее будем использовать обозначение $\varphi(\varepsilon) = O^*\left(\varepsilon^\delta\right)$, $\varepsilon \to +0$, которое подразумевает, что $\forall\,\gamma < \delta\;\; \varphi(\varepsilon) = o(\varepsilon^\gamma)$ [16]. В частности, $\varepsilon \ln^q(\varepsilon)$, $q > 0$, есть $O^*(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$, но не $O(\varepsilon)$.

Уравнение $F(\varepsilon, r) = 0$ эквивалентно уравнению $\mathcal{F}^{-1}F(\varepsilon, r) = 0$, которое имеет вид

$$r - \varepsilon f = F_1(\varepsilon, r), \tag{6.3}$$

где $f = -\mathcal{F}^{-1}\widetilde{f}$, вектор-функция F_1 непрерывна и раскладывается при $\varepsilon + \|r\| \to +0$ в следующий асимптотический ряд:

$$F_1(\varepsilon, r) \stackrel{as}{=} \sum_{k=2}^{\infty} H_{1,k}(\varepsilon, r) + \varepsilon \ln \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} H_{2,k}(\varepsilon, r), \tag{6.4}$$

где $H_{j,k} = -\mathcal{F}^{-1}\widetilde{H}_{j,k}$, $j = 1, 2$, и тем самым каждая компонента $H_{j,k}$ является однородным многочленом степени k относительно ε и $r_1, \dots, r_p$.

В силу определения асимптотического разложения из (6.4) получим, что для $F_1(\varepsilon, r)$ для некоторой константы $K > 0$ при всех достаточно малых $\|r\|$, $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|F_1(\varepsilon, r)\| \leqslant K\bigl(\|r\|^2 + \varepsilon^2|\ln \varepsilon| + \varepsilon|\ln \varepsilon| \cdot \|r\|\bigr). \tag{6.5}$$

Далее, поскольку при $q \geqslant 1$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $|\varepsilon^q \ln \varepsilon| \leqslant \varepsilon^{q-1/2}$, то из (6.5) следует, что

$$\|F_1(\varepsilon, r)\| \leqslant K\bigl(\|r\|^2 + \varepsilon^{3/2} + \varepsilon^{1/2}\|r\|\bigr). \tag{6.6}$$

Пусть $w := r - \varepsilon f$, а $F_1(\varepsilon, w + \varepsilon f) =: \widetilde{F}_1(\varepsilon, w)$. Тогда в силу (6.6) для некоторого $K_1 > 0$ при всех достаточно малых $\|w\|$, $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\|\widetilde{F}_1(\varepsilon, w)\| \leqslant K_1\bigl(\|w\|^2 + \varepsilon^{3/2} + \varepsilon^{1/2}\|w\|\bigr), \tag{6.7}$$

а уравнение (6.3) примет вид

$$w = \widetilde{F}_1(\varepsilon, w). \tag{6.8}$$

Покажем, что уравнение (6.8) при всех малых $\varepsilon > 0$ имеет решение в замкнутом шаре $B[0, \varepsilon]$. Пусть $\|w\| \leqslant \varepsilon$. Тогда в силу (6.7) $\|\widetilde{F}_1(\varepsilon, w)\| \leqslant 3K_1\varepsilon^{3/2}$. Тем самым найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $3K_1\varepsilon^{3/2} \leqslant \varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1)$. Поэтому по теореме Шаудера — Тихонова (см., например, [18, гл. 16, § 3, теорема 1]) в $B[0, \varepsilon]$ есть неподвижная точка отображения $\widetilde{F}_1(\varepsilon, w)$. Таким образом, при всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1)$ существует w_ε — решение уравнения (6.8).

Возвращаясь к переменной r, получим, что $r_\varepsilon = w_\varepsilon + \varepsilon f = O(\varepsilon)$ — решение уравнения $0 = F(\varepsilon, r)$.

2. Покажем, что любое решение r_ε уравнения $0 = F(\varepsilon, r)$ такое, что $r_\varepsilon = o(1)$, имеет асимптотический порядок $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$. Действительно, в силу (6.3) и (6.6) выполняется неравенство

$$\|r_\varepsilon\|(1 - K\|r_\varepsilon\| - K\varepsilon^{1/2}) \leqslant \varepsilon\|f\| + K\varepsilon^{3/2}$$

и, далее,

$$\|r_\varepsilon\| \leqslant \frac{\varepsilon\|f\| + K\varepsilon^{3/2}}{1 - K\|r_\varepsilon\| - K\varepsilon^{1/2}}.$$

Знаменатель в правой части стремится к 1 при $\varepsilon \to +0$, откуда и следует асимптотическая оценка $\|r_\varepsilon\| = O(\varepsilon)$.

Отметим, что

$$r_{\varepsilon,1} = \varepsilon f \tag{6.9}$$

является первым приближением для r_ε.

3. Далее процесс построения членов разложения $r_{\varepsilon,k} = O^*(\varepsilon^k)$ проходит стандартно — путем подстановки ряда (6.2) в асимптотическое равенство (6.3) и приравнивания слагаемых одного порядка малости в асимптотических разложениях левой и правой частей, начиная с $k = 1$. Так, для $r_{\varepsilon,1}$ получим равенство (6.9). Для $r_{\varepsilon,2}$ покоординатно имеем

$$r_{2,i} = \varepsilon^2 f_{2,i} + \varepsilon Q_{1,i}(r_{\varepsilon,1}) + Q_{2,i}(r_{\varepsilon,1}) + \varepsilon^2 \ln\varepsilon \widetilde{f}_{2,i} + \varepsilon \ln\varepsilon \widetilde{Q}_{1,i}(r_{\varepsilon,1}),$$

где $Q_{j,i}$ и $\widetilde{Q}_{j,i}$ — однородные многочлены степени j от координат вектора $r_{\varepsilon,1}$.

Далее по индукции. Если уже найдены слагаемые $r_{\varepsilon,1}, \ldots, r_{\varepsilon,N}$ и $r_{\varepsilon,k} = \varepsilon^k P_{k-1}(\ln\varepsilon)$, то i-я координата вектора $r_{\varepsilon,N+1}$ есть сумма слагаемых вида

$$a\varepsilon^{\alpha_0} r^{\alpha_1}_{1,j_1} \cdot \ldots \cdot r^{\alpha_N}_{N,j_N} \quad \text{и} \quad (\varepsilon\ln\varepsilon) b\varepsilon^{\beta_0} r^{\beta_1}_{1,p_1} \cdot \ldots \cdot r^{\beta_{N-1}}_{N-1,p_{N-1}},$$

где

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + N\alpha_N & = N+1, \\ 1 + \beta_0 + \beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (N-1)\beta_{N-1} & = N+1, \end{cases} \qquad \alpha_q, \beta_q \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{6.10}$$

В силу предположения индукции слагаемые первого вида суть $\varepsilon^{N+1} P_{m_1}(\ln\varepsilon)$, а второго — $\varepsilon^{N+1} P_{m_2}(\ln\varepsilon)$, где

$$m_1 = 1 \cdot \alpha_2 + 2 \cdot \alpha_3 + \ldots + (N-1)\alpha_N, \quad m_2 = 1 \cdot \beta_2 + 2 \cdot \beta_3 + \ldots + (N-2)\beta_{N-1} + 1.$$

Согласно (6.10) справедливы неравенства

$$\begin{gathered} N+1 = m_1 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N \geqslant m_1 + 1, \\ N+1 = m_2 + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{N-1} \geqslant m_2 + 1. \end{gathered}$$

Тем самым $m_1 \leqslant N$ и $m_2 \leqslant N$.

Для

$$\rho := r_\varepsilon - \sum_{k=1}^{N} r_{\varepsilon,k} =: r_\varepsilon - r_N, \quad \rho = o(1), \quad \varepsilon \to +0,$$

с учетом соотношений (6.3), (6.4) получаем уравнение

$$\begin{multline} r_N + \rho = \varepsilon f + \sum_{k=2}^{N} H_{1,k}(\varepsilon, r_N + \rho) + \varepsilon\ln\varepsilon \sum_{k=1}^{N} H_{2,k}(\varepsilon, r_N + \rho) + O\big(\varepsilon^{N+1} + \|r_N + \rho\|^{N+1}\big) \\ + \varepsilon\ln\varepsilon \cdot O\big(\varepsilon^N + \|r_N + \rho\|^N\big). \end{multline} \tag{6.11}$$

В силу определения слагаемых $r_{\varepsilon,1}, \ldots, r_{\varepsilon,N}$ из (6.11) следует, что

$$\|\rho\| = O(\varepsilon^{N+1} + \|\rho\|^2) + \varepsilon|\ln\varepsilon| \cdot O(\varepsilon^N + \|\rho\|) + O(\varepsilon^{N+1}|\ln^q\varepsilon|),$$

где $q \geqslant 1$ зависит от N. Тогда для некоторой постоянной $K_2 > 0$ выполняется

$$\|\rho\| \leqslant K_2\big(\varepsilon^{N+1} + \|\rho\|^2 + \|\rho\|\varepsilon|\ln\varepsilon| + \varepsilon^{N+1}|\ln^q\varepsilon|\big).$$

Отсюда вытекает, что

$$\|\rho\|\big(1 - K_2\|\rho\| - K_2\varepsilon|\ln\varepsilon|\big) \leqslant K_2\big(\varepsilon^{N+1} + \varepsilon^{N+1}|\ln^q\varepsilon|\big). \tag{6.12}$$

Пусть $\gamma < N+1$, тогда из (6.12) и из того, что $\|\rho\| \to 0$, имеем

$$\frac{\|\rho\|}{\varepsilon^\gamma} \leqslant \frac{K_2\varepsilon^{N+1-\gamma} + K_2\varepsilon^{N+1-\gamma}|\ln^q\varepsilon|}{1 - K_2\|\rho\| - K_2\varepsilon\ln\varepsilon}. \tag{6.13}$$

Числитель в (6.13) стремится к 0 при $\varepsilon \to +0$, а знаменатель — к 1, поэтому $\|\rho\| = o(\varepsilon^\gamma)$. Следовательно, $\|\rho\| = O^*\left(\varepsilon^{N+1}\right)$ и построенный ряд (6.2) есть асимптотическое разложение малого решения r_ε уравнения (6.3).

4. Поскольку коэффициенты ряда (6.2), являющегося разложением в смысле Пуанкаре для r_ε по асимптотической последовательности $\varepsilon^q \ln^p \varepsilon$, $q \in \mathbb{N}$, $q-1 \geqslant p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, строятся однозначно по членам разложения функции $F_1(\varepsilon, r)$, то все малые решения уравнения (6.3) асимптотически равны.

5. Пусть асимптотическое равенство (6.4) допускает почленное дифференцирование по r, тогда при произвольном фиксированном ε для градиента функции $F_1(\varepsilon, r)$ выполняется

$$\frac{\partial F_1(\varepsilon, r)}{\partial r} \stackrel{as}{=} \sum_{k=1}^{\infty} G_{1,k}(\varepsilon, r) + \varepsilon \ln \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} G_{2,k}(\varepsilon, r),$$

где $G_{i,k}$, $i = 1, 2$ — однородные многочлены степени k относительно ε и компонент вектора r с векторными коэффициентами. Тогда для некоторой постоянной $K > 0$ справедливо неравенство $\left\|\dfrac{\partial F_1(\varepsilon, r)}{\partial r}\right\| \leqslant K(\varepsilon + \|r\| + \varepsilon|\ln\varepsilon|)$. Для векторов r из шара $B[\varepsilon f, \varepsilon] = \{r \in \mathbb{R}^p \colon \|r - \varepsilon f\| \leqslant \varepsilon\}$ выполняется $\|r\| \leqslant \varepsilon + \varepsilon\|f\|$, тогда

$$\left\|\frac{\partial F_1(\varepsilon, r)}{\partial r}\right\| \leqslant K(2 + \|f\|)\varepsilon + K\varepsilon|\ln\varepsilon| \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Поэтому для некоторой постоянной $0 < \alpha < 1$ при всех достаточно малых ε справедлива оценка

$$\sup_{r \in B[\varepsilon f, \varepsilon]} \left\|\frac{\partial F_1(\varepsilon, r)}{\partial r}\right\| \leqslant \alpha < 1.$$

Поскольку для $F_1(\varepsilon, w + \varepsilon f) = \widetilde{F}_1(\varepsilon, w)$, где $w = r - \varepsilon f$, имеем $\dfrac{\partial \widetilde{F}_1(\varepsilon, w)}{\partial w} = \dfrac{\partial F_1(\varepsilon, r)}{\partial r} \cdot I_p$, а также в силу оценки конечных приращений $\forall w_1, w_2 \in B[0, \varepsilon]$

$$\|\widetilde{F}_1(\varepsilon, w_1) - \widetilde{F}_1(\varepsilon, w_2)\| \leqslant \sup_{w \in B[0,\varepsilon]} \left\|\frac{\partial \widetilde{F}_1(\varepsilon, w)}{\partial w}\right\| \cdot \|w_1 - w_2\| \leqslant \alpha\|w_1 - w_2\|$$

получаем, что $\widetilde{F}_1(\varepsilon, w)$ есть сжимающее отображение шара $B[0, \varepsilon]$ в себя. Следовательно, уравнение (6.8) имеет единственное решение, что, в свою очередь, справедливо и для уравнения (6.3). □

Запишем матрицу оператора первого приближения $\mathcal{F}$ в системе (5.7) и убедимся, что он обратим. Имеем

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{2} & 0 \\ 8\lambda_0 & 2\vartheta_0 x_2^0 \end{pmatrix}.$$

С учетом условия (4.3) получаем, что $\det \mathcal{F} \neq 0$.

Итак, функции, стоящие в правых частях уравнения (5.7), непрерывны, оператор первого приближения обратим, следовательно, к системе уравнений (5.7) применима теорема 1. Зная асимптотику Δl_ε и $\Delta\vartheta_\varepsilon$, с учетом соотношения $\vartheta_0 \neq 0$ по формулам (3.6), (5.5) можно найти асимптотику оптимального времени T_ε и вектора l_ε, определяющего оптимальное управление, в исходной задаче (1.1). В свою очередь, асимптотика оптимального управления получается путем подстановки в формулу (3.1) соответствующих рядов для T_ε и вектора $L_\varepsilon = (l_\varepsilon^*, 0^*)^*$.

Из приведенных рассуждений вытекает справедливость следующей итоговой теоремы.

Теорема 2. *В задаче* (1.1) *в случае* $m = 1$ *при выполнении условия* (4.3) *оптимальное время* T_ε *раскладывается в асимптотический ряд вида* (6.2) *при* $\varepsilon \to +0$. □

В частности, компоненты вектора $r_{\varepsilon,1} = (\Delta l_1, \Delta\vartheta_1)^*$ определяются из системы

$$\begin{cases} 0 = \varepsilon\vartheta_0^3 x_1^0 + \varepsilon\dfrac{\vartheta_0}{2} y_2^0 + \sqrt[3]{2}\Delta l_1, \\ 0 = \varepsilon\vartheta_0 y_2^0 + 8\lambda_0 \Delta l_1 + 2\vartheta_0 x_2^0 \Delta\vartheta_1. \end{cases}$$

и $\widehat{l}_{2,\varepsilon}$, ϑ_ε (5.5) при $\varepsilon \to +0$ имеют вид

$$\widehat{l}_{2,\varepsilon} = -\lambda_0 - \frac{\varepsilon\vartheta_0}{\sqrt[3]{2}}\Big(\vartheta_0^2 x_1^0 + \frac{y_2^0}{2}\Big) + O^*(\varepsilon^2),$$
$$\vartheta_\varepsilon = \varepsilon\left(\vartheta_0 - \frac{1}{2x_2^0}\Big(\varepsilon(1-\sqrt[3]{2})y_2^0 - 2\sqrt[3]{2}\varepsilon\vartheta_0^2 x_1^0\Big)\right) + O^*(\varepsilon^3).$$

Заключение

Отметим еще раз, что ряд (6.2) является разложением в смысле Пуанкаре для r_ε по асимптотической последовательности $\varepsilon^q \ln^p \varepsilon$, $q \in \mathbb{N}$, $q - 1 \geqslant p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В этом смысле задача (1.1) о быстродействии перевода точки на множество оказалась более регулярной по сравнению с аналогичной задачей для системы (1.1) и началом координат в качестве целевого множества, исследованной в работе авторов, ранее опубликованной в журнале (см. разд. 2).

С учетом замечания в скобках в формулировке теоремы 1, указанная теорема обобщает теорему 4 из упомянутой выше работы авторов[3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Дмитриев М.Г., Курина Г.А.** Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. №. 1. С. 3–51.
4. **Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., and Zou Y.** Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012 // Inter. Journal of Informaton and Systems Sciences. 2014. vol. 9, no. 1. pp. 1–36.
5. **Kokotovic P.V., Haddad A.H.** Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, no. 1. P. 111–113. doi: 10.1109/TAC.1975.1100852 .
6. **Дончев А.** Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
7. **Donchev A.L., Veliev V.M.** Singular Perturbation in Mayer's Problem for Linear Systems // SIAM J. Control Optim. 1983. vol. 21, no. 4. pp. 566–581.
8. **Курина Г.А., Нгуен Т.Х.** Асимптотическое решение сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления с разрывными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 4. С. 628–652.
9. **Kurina G.A., Hoai N.T.** Projector approach for constructing the zero order asymptotic solution for the singularly perturbed linear-quadratic control problem in a critical case // AIP Conference Proc. 2018. vol. 1997. Art. no. 020073. doi: 10.1063/1.5049067 .
10. **Nguyen T.H.** Asymptotic solution of a singularly perturbed optimal problem with integral constraint // J. Optim. Theory Appl. 2021. Vol. 190, no. 3. P. 931–950. doi: 10.1007/s10957-021-01916-w .
11. **Шабуров А.А.** Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и гладкими геометрическими ограничениями на управление // Вест. Тамбов. ун-та. Сер.: естествен. и техн. науки. 2019. Т. 24, № 125. С. 119–614. doi: 10.20310/1810-0198-2019-24-125-119-136 .

[3]Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2.

12. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
13. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ, 1978. 106 с.
14. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
15. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Асимптотика оптимального времени перевода линейной управляемой системы с нулевыми вещественными частями собственных значений матрицы при быстрых переменных на неограниченное целевое множество // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 1. С. 48–61. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-48-61 .
16. **Данилин А.Р.** Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстростабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 12. С. 2166–2177.
17. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с. ISBN: 978-5-9221-1056-3 .
18. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 752 с.

Поступила 11.08.2021
После доработки 22.11.2021
Принята к публикации 29.11.2021

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: dar@imm.uran.ru

Коврижных Ольга Олеговна, канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: koo@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt, NY; London: Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. ISBN: 0470693819 . Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
2. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineinye sistemy.* [Theory of motion control. Linear systems]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 476 p.
3. Dmitriev M.G., Kurina G.A. Singular perturbations in control problems. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 1–43. doi: 10.1134/S0005117906010012 .
4. Zhang Y., Naidu D.S., Chenxiao Cai and Yun Zou. Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002-2012. *Inter. J. Informaton and Systems Sciences*, 2014, vol. 9, no. 1, pp. 1–36.
5. Kokotovic P.V., Haddad A.H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes. *IEEE Trans. Automat. Control.*, 1975, vol. 20, no. 1, pp. 111–113. doi: 10.1109/TAC.1975.1100852 .
6. Dontchev A.L. *Perturbations, approximations and sensitivity analysis of optimal control systems.* Berlin; Heidelberg; NY; Tokio: Springer-Verlag, 1983, 161 p. doi: 10.1007/BFb0043612. Translated to Russian under the title *Sistemy optimal'nogo upravleniya: Vozmushcheniya, priblizheniya i analiz chuvstvitel'nosti*, Moscow: Mir Publ., 1987, 156 p.
7. Donchev A.L., Veliev V.M. Singular perturbation in Mayer's problem for linear systems. *SIAM J. Control Optim.*, 1983, vol. 21, no. 4, pp. 566–581. doi: 10.1137/0321034 .

8. Kurina G.A., Nguyen T.H. Asymptotic solution of singularly perturbed linear-quadratic optimal control problems with discontinuous coefficients. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, no. 4, pp. 524–547. doi: 10.1134/S0965542512040100 .
9. Kurina G.A., Hoai N.T. Projector approach for constructing the zero order asymptotic solution for the singularly perturbed linear-quadratic control problem in a critical case. *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1997, art. no. 020073. doi: 10.1063/1.5049067 .
10. Nguyen T.H. Asymptotic solution of a singularly perturbed optimal problem with integral constraint. *J. Optim. Theory Appl.*, 2021, vol. 190, no. 3, pp. 931–950. doi: 10.1007/s10957-021-01916-w .
11. Shaburov A.A. Asymptotic expansion of the solution to a singularly perturbed optimal control problem with an integral convex quality criterion and smooth geometric control constraints. *Vestn. of Tambov. Univ. Ser: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 119–136 (in Russian). doi: 10.20310/1810-0198-2019-24-125-119-136 .
12. Vasileva A.B., Butuzov V.F. *Asimptoticheskie razlozheniya reshenij singulyarno vozmushchennyh uravnenij* [Asymptotic expansions of the solutions of singularly perturbed equations]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 272 p.
13. Vasileva A.B., Butuzov V.F. *Singularly perturbed equations in the critical case.* Madison, Mathematics Research Center University of Wisconsin-Madison, 1980, 156 p. Original Russian text published in Vasileva A.B., Butuzov V.F. *Singulyarno vozmushchennye uravneniya v kriticheskikh sluchayakh*, Moscow, MGU Publ., 1978, 106 c.
14. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* NY; London; Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1967, 576 p. Translated to Russian under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow: Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635 .
15. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Asymptotics of the optimal time of transferring a linear control system with zero real parts of the eigenvalues of the matrix at the fast variables to an unbounded target set, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 48–61 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-48-61 .
16. Danilin A.R. Asymptotic behavior of the optimal cost functional for a rapidly stabilizing indirect control in the singular case. *Comput. Math. Math. Physics*, 2006, vol. 46, no. 12, pp. 2068–2079. doi: 10.1134/S0965542506120062 .
17. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* [Asymptotic methods in analysis]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2009, 248 p. ISBN: 978-5-9221-1056-3 .
18. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional analysis.* NY: Pergamon Press Ltd, 1982, 589 p. ISBN: 0-08-023036-9 . Original Russian text published in Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz*, Moscow: Nauka Publ., 1959, 684 p.

Received August 11, 2021
Revised November 22, 2021
Accepted November 29, 2021

Aleksei Rufimovich Danilin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; e-mail: dar@imm.uran.ru .

Ol'ga Olegovna Kovrizhnykh, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: koo@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of a solution to a time-optimal control problem with an unbounded target set in the critical case, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 58–73 .