

УДК 517.977

## О ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ С РАЗДЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА НАЧАЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ВОЗМУЩЕНИЯ

**Б. И. Ананьев, П. А. Юровских**

Рассмотрены вопросы аппроксимации задачи гарантированного оценивания с геометрически ограниченными начальными состояниями и интегрально ограниченными в пространстве  $L_2$  возмущениями в системе и в уравнении измерения. Проблема сведена к задаче оптимального управления без фазовых ограничений и применению принципа максимума Л. С. Понтрягина. Указана дискретная многошаговая система, для которой информационное множество сходится в метрике Хаусдорфа к соответствующему информационному множеству непрерывной системы при измельчении разбиения отрезка наблюдения. В отличие от общего случая при указанных условиях информационное множество может быть построено как область достижимости специальной системы. Приведен численный пример.

Ключевые слова: гарантированное оценивание, фильтрация, принцип максимума, информационное множество, область достижимости.

**V. I. Ananyev, P. A. Yurovskikh. An estimation problem with separate constraints on initial states and disturbances.**

Questions of approximation of a guaranteed estimation problem with geometrically bounded initial states and integrally bounded in the space  $L_2$  disturbances in the system and in the measurement equation are considered. The problem is reduced to an optimal control problem without state constraints and to the application of Pontryagin's maximum principle. A discrete multistep system is indicated for which the information set converges in the Hausdorff metric to the corresponding information set of a continuous system as the partition step converges to zero. In contrast to the general case, under the specified conditions, the information set can be constructed as a reachable set of a special system. A numerical example is given.

Keywords: guaranteed estimation, filtering, maximum principle, information set, reachable set.

MSC: 93E10, 62L12, 34G25

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-27-39

### 1. Введение и постановка задачи

Задачи гарантированного оценивания имеют достаточно давнюю историю (см. [1; 2]). В монографиях [3; 4] разработана более общая теория оценивания без статистики возмущений, основанная на результатах выпуклого и функционального анализа. Эллипсоидальные и численные методы были рассмотрены в [5; 6]. Настоящая статья является продолжением работ [7; 8]. Однако здесь мы изучаем частный случай ограничений для систем из работы [8], который позволяет строить информационное множество как область достижимости специальной системы. А именно в настоящей работе, так же как и в [8], исследуем линейную нестационарную систему с наблюдением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)v(t), \quad y(t) = G(t)x(t) + cv(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.1)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — фазовый вектор;  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  — выход;  $v(t) \in \mathbb{R}^l$  — неопределенное возмущение;  $A(\cdot)$ ,  $G(\cdot)$ ,  $b(\cdot)$  — ограниченные непрерывные матрицы;  $c \in \mathbb{R}^{m \times l}$ . Предположим, что неопределенные функции  $v(\cdot)$  в (1.1) и начальное состояние  $x_0$  подчинены интегральным и мгновенным ограничениям

$$\int_0^T (|v(t)|^2 + 2s'(t)x(t) - 2r'(t)v(t)) dt \leq 1, \quad x_0 \in X_0, \quad (1.2)$$

где  $|\cdot|$  — евклидова норма;  $X_0 \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклое и замкнутое множество; элементы векторов  $s(\cdot)$ ,  $r(\cdot)$  принадлежат пространству  $\mathbb{L}_2(0, T)$ . Здесь и далее  $|x|_P^2$  есть квадратичная форма  $x'Px$ , где знак  $'$  означает транспонирование, а матрица  $P$  удовлетворяет условию  $P' = P \geq 0$ . В случае  $P = I$  (единичная матрица) считаем, что  $|x|_I^2 = |x|^2$ . Кроме того, матрица  $c \in \mathbb{R}^{m \times l}$  должна иметь  $\text{rank } c = m$ , что влечет условие

$$cc' > 0. \quad (1.3)$$

Подчеркнем, что ограничения типа (1.2), (1.3) для задач оценивания впервые рассмотрены в работе [8], но там не была построена точная опорная функция информационного множества для них и не доказана формула аппроксимации эллипсоидами.

**О п р е д е л е н и е.** Семейство  $\mathcal{X}_T(y) = \{x_T\}$  фазовых векторов называется *информационным множеством* (ИМ), если для любого  $x_T \in \mathcal{X}_T(y)$  найдутся функция  $v(\cdot)$  и начальное состояние  $x_0$ , удовлетворяющие ограничениям (1.2) и такие, что равенства (1.1) выполняются почти всюду с  $x(T) = x_T$ .

В настоящей работе будет построена точная опорная функция (см. [3]) множества  $\mathcal{X}_T(y)$  как области достижимости специальной системы и по схеме из [8] найдена такая система с дискретным временем и наблюдением, что ее ИМ сходится к  $\mathcal{X}_T(y)$  в метрике Хаусдорфа при измельчении разбиения отрезка времени. Результаты предлагаемого исследования могут использоваться в задачах восстановления входных воздействий и задачах коррекции движения механических систем при наличии коммуникационных ограничений в виде неточных цифровых каналов связи (см. [9]). Они также весьма полезны для решения новых задач, связанных с понятиями усредненной управляемости и наблюдаемости (см. [10; 11]).

## 2. Построение точной опорной функции для ИМ

Обозначим через  $C$  матрицу  $(cc')^{-1}$ . Записываем ортогональное разложение  $v(t) = c'\zeta(t) + C_1v(t)$  в пространстве  $\mathbb{L}_2^l[0, T]$  и из уравнения измерения находим непрерывное равенство  $\zeta(t) = Ccv(t) = C(y(t) - Gx(t))$ , где  $C_1 = I_l - c'Cc$  — ортогональная проекция на подпространство  $\ker c$ . Используя (1.1), перепишем неравенство в (1.2) как

$$J(T, x_0, v, y) = \int_0^T \left( |y(t) - G(t)x(t)|_C^2 + |v(t)|_{C_1}^2 + 2s'(t)x(t) - 2r'(t)(c'C(y(t) - G(t)x(t)) + C_1v(t)) \right) dt \leq 1. \quad (2.1)$$

Поскольку геометрических ограничений на функцию  $v(t)$  не накладывается, то нетрудно видеть, что  $x_T \in \mathcal{X}_T(y)$  тогда и только тогда, когда существует функция  $v(t)$ , которая удовлетворяет ограничению (2.1) и входит в уравнение

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)(C_1v(t) + c'C(y(t) - G(t)x(t))) \quad (2.2)$$

с условием  $x(T) = x_T$  на правом конце и условием  $x(0) = x_0 \in X_0$  на левом конце траектории. С другой стороны, такая функция существует тогда и только тогда, когда минимум левой части неравенства (2.1) по  $v(\cdot)$  согласно уравнению (2.2) при фазовых ограничениях  $x_0 \in X_0$  на левом конце будет меньше единицы. При этом определится некоторый вектор  $x(T) = x_T$  на правом конце траектории. Введем обозначения:

$$\mathbf{b}(t) = b(t)c'C, \quad \mathbf{A}(t) = A(t) - \mathbf{b}(t)G(t). \quad (2.3)$$

Тогда можем записать

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}(t)x(t) + \mathbf{b}(t)y(t) + b(t)C_1v(t), \\ x(t) &= \mathbf{X}(t, 0)x_0 + \int_0^t \mathbf{X}(t, s) (\mathbf{b}(s)y(s) + b(s)C_1v(s)) ds \end{aligned} \quad (2.4)$$

вместо (2.2), где  $\mathbf{X}(t, s)$  — фундаментальная матрица уравнения  $\dot{x}(t) = \mathbf{A}(t)x(t)$ . В силу ограничений (2.1) получаем следующее утверждение.

**Лемма 1.** *ИМ  $\mathcal{X}_T(y)$  совпадает с областью достижимости в момент  $T$  для системы (2.4) при ограничениях (2.1) по  $v(\cdot)$  и (1.2) по  $x_0$ .*

**З а м е ч а н и е 1.** В системе (2.4) и ограничении (2.1) уместно понизить размерность неопределенных функций  $v(t)$  следующим образом. Поскольку  $\ker c \oplus \text{im } c' = \mathbb{R}^l$ ,  $\text{im } C_1 = \ker c$  и  $\dim(\text{im } c') = m$ , то  $\text{rank } C_1 = l - m$ . По известной теореме из линейной алгебры представим  $C_1$  в виде  $C_1 = T\tilde{C}_1T'$ , где  $T$  — ортогональная матрица,  $TT' = T'T = I$ , а  $\tilde{C}_1$  — диагональная матрица с нулями и единицами, так как  $C_1$  — проекционная матрица,  $C_1^2 = C_1$ . Уберем из  $\tilde{C}_1$   $m$  нулевых столбцов и обозначим полученную матрицу через  $\tilde{D}_1$ . Тогда  $\tilde{C}_1 = \tilde{D}_1\tilde{D}_1'$  и  $C_1 = D_1D_1'$ , где  $D_1 = T\tilde{D}_1$ . Далее определяем вектор-функции  $z(t) = D_1'v(t) \in \mathbb{R}^{l-m}$ , откуда получаем равенство

$$C_1v(t) = D_1z(t), \quad D_1 \in \mathbb{R}^{l \times (l-m)}, \quad \text{rank } D_1 = l - m.$$

Следовательно, в соотношениях (2.1), (2.2), (2.4) можем использовать функцию  $D_1z(t)$  вместо  $C_1v(t)$ . Соответствующие изменения необходимо иметь в виду и в лемме 1. Отметим, что  $D_1'D_1 = I_{l-m}$  — единичная матрица размера  $(l - m) \times (l - m)$ .

Представим решение как сумму  $x(t) = \bar{x}(t) + \mathbf{x}(t)$ , где  $\dot{\bar{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\bar{x} + \mathbf{b}(t)y(t)$ ;  $x_0 \in X_0$ ;  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + b(t)D_1z(t)$ ;  $\mathbf{x}(0) = 0$ . Полагаем  $\bar{y}(t) = y(t) - G(t)\bar{x}(t)$  на  $[0, T]$ . Тогда вместо (2.1) имеем неравенство

$$\begin{aligned} J(T, x_0, z, y) &= \bar{J}(T, x_0, y) + \int_0^T \left( |G(t)\mathbf{x}(t)|_C^2 + |z(t)|^2 \right. \\ &\quad \left. - 2(-s(t) + G'(t)C(\bar{y}(t) - cr(t)))' \mathbf{x}(t) - 2r'(t)D_1z(t) \right) dt \leq 1, \quad (2.5) \\ \bar{J}(T, x_0, y) &= \int_0^T \left( |\bar{y}(t)|_C^2 + 2(s'(t)\bar{x}(t) - r'(t)c' C \bar{y}(t)) \right) dt. \end{aligned}$$

Начальный вектор пока зафиксируем. Выделим в (2.5) полный квадрат, для чего введем оператор  $\mathcal{K}$  согласно соотношению

$$\int_0^T \left( |G(t)\mathbf{x}(t)|_C^2 + |z(t)|^2 \right) dt = \langle z(\cdot), \mathcal{K}z(\cdot) \rangle,$$

где  $z(\cdot) \in \mathbb{L}_2^{l-m}[0, T]$  — произвольная функция. Для нахождения обратного оператора решаем задачу минимизации:  $-2\langle f(\cdot), z(\cdot) \rangle + \langle z(\cdot), \mathcal{K}z(\cdot) \rangle \rightarrow \min_{z(\cdot)}$ . С этой целью воспользуемся методом динамического программирования, вводя функционал

$$V(t, \mathbf{x}(t)) = \min_{z(\cdot)} \int_t^T \left( |G(s)\mathbf{x}(s)|_C^2 + |z(s)|^2 - 2f'(s)z(s) \right) ds.$$

Для этого функционала получаем уравнение Беллмана

$$\min_z \{ V_t + V_x(\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + b(t)D_1z) + |G(t)\mathbf{x}|_C^2 + |z|^2 - 2f'(t)z \} = 0,$$

которое решаем подстановкой  $V(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}'P(t)\mathbf{x} - 2\mathbf{x}'\gamma(t) + \beta(t)$ . Для параметров подстановки имеем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{P} + P\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}'(t)P + G'(t)CG(t) - Pb(t)C_1b'(t)P &= 0, \quad P(T) = 0; \\ \dot{\gamma} + \mathbf{A}'(t)\gamma - Pb(t)D_1(f(t) + D_1'b'(t)\gamma) &= 0, \quad \gamma(T) = 0; \\ \dot{\beta} - |f(t) + D_1'b'(t)\gamma|^2 &= 0, \quad \beta(T) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Величина  $\beta(0) = V(0, 0) = -\langle f(\cdot), \mathcal{K}^{-1}f(\cdot) \rangle$  является минимумом в рассматриваемой задаче, а функция

$$z_{op}(t) = f(t) - D_1'b'(t)(P(t)\mathbf{x} - \gamma(t))$$

доставляет этот минимум. Здесь  $z_{op}(t) = \mathcal{K}^{-1}f$ . При выделении полного квадрата в (2.5) выводим

$$\bar{f}(t) = D_1' \left( r(t) + b'(t) \int_t^T \mathbf{X}'(u, t) (-s(u) + G'(u)C(\bar{y}(u) - cr(u))) du \right). \quad (2.7)$$

Следовательно, неравенство (2.5) получает вид

$$\bar{J}(T, x_0, y) + \langle z(\cdot) - \mathcal{K}^{-1}\bar{f}, \mathcal{K}(z(\cdot) - \mathcal{K}^{-1}\bar{f}) \rangle + \bar{\beta}(0) \leq 1. \quad (2.8)$$

Для фиксированного вектора  $l \in \mathbb{R}^n$  и начального состояния  $x_0$  находим величину

$$\begin{aligned} R(T, x_0, l) = \max_{z(\cdot)} l'x(T) = l'\bar{x}(T) + \langle l_T(\cdot), \mathcal{K}^{-1}\bar{f} \rangle \\ + \sqrt{\langle l_T(\cdot), \mathcal{K}^{-1}l_T(\cdot) \rangle} \times \sqrt{1 - \bar{\beta}(0) - \bar{J}(T, x_0, y)}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$l_T(t) = D_1'b'(t)\mathbf{X}'(T, t)l.$$

Окончательно вычисляем опорную функцию для ИМ:

$$\rho(l | \mathcal{X}_T(y)) = \max_{x_0 \in X_0} R(T, x_0, l), \quad 1 - \bar{\beta}(0) - \bar{J}(T, x_0, y) \geq 0. \quad (2.10)$$

Напомним, что опорная функция (2.10) определяет выпуклое множество  $\mathcal{X}_T(y)$  с точностью до замыкания (см., например, [12]).

### 3. Некоторые способы аппроксимации ИМ

#### 3.1. Аппроксимация эллипсоидами

Введем обозначение для невырожденных эллипсоидов  $E(Q, c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - c|_Q \leq 1\}$ , где матрица  $Q = Q' > 0$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ . Здесь будем опираться на следующую лемму.

**Лемма 2.** Пусть заданы два выпуклых и замкнутых множества  $M \subset \mathbb{R}^n$  и  $A \subset \mathbb{R}^n$  таких, что  $M \cap A = \emptyset$ , причем  $M$  компактно. Тогда существует эллипсоид  $E(Q, c)$  такой, что  $E(Q, c) \supset M$  и  $E(Q, c) \cap A = \emptyset$ .

**Доказательство.** Из выпуклого анализа и теоремы отделимости известно (см., например, [12; 13]), что условие  $M \cap A = \emptyset$  влечет существование единичного вектора  $l_1$  и числа  $d$  таких, что  $\inf_{a \in A} l_1'a \geq d > \rho(l_1 | M)$ . Далее, поскольку множество  $M$  зафиксировано, будем писать сокращенно  $\rho(l)$ . Дополним вектор  $l_1$  векторами  $\{l_2, \dots, l_n\}$  до ортонормального базиса в  $\mathbb{R}^n$ . Вдоль осей  $l_i$  построим прямоугольный бокс  $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(-l_i) \leq l_i'x \leq \rho(l_i) \quad \forall i \in 1:n\}$  с центром в точке  $c = \sum_{i=1}^n l_i(\rho(l_i) - \rho(-l_i))/2$  и вершинами в точках  $A_k = \sum_{i=1}^n k_i l_i \rho(k_i l_i)$ . Здесь  $k \in K \subset \mathbb{R}^n$  — вектор, координаты которого  $k_i = \pm 1$ . Количество таких векторов и

вершин равно  $2^n$ ; множество  $K$  состоит из всех таких векторов  $k$ . Упорядочивая множество  $K = \{k^1, \dots, k^{2^n}\}$ , всегда полагаем  $k^1 = [1; \dots; 1]$ . Построенный бокс будет содержать исходный компакт, т. е.  $\Pi \supset M$ .

Введем ортогональную матрицу  $T = [l_1, \dots, l_n]$  и выполним ортогональное преобразование к новым координатам  $y = T'x$ . В новых координатах множество  $M$  перейдет в  $M^* = T'M$ , множество  $A$  перейдет в  $A^* = T'A$ , а бокс  $\Pi$  — в бокс  $\Pi^* = T'\Pi$  с центром  $c^* = T'c$  и ребрами, параллельными осям координат. В силу условия имеем  $-\rho(-l_1) = -\rho(-T'l_1|A^*) = \inf_{a^* \in A^*} [1, 0, \dots, 0]a^* \geq d > \rho(T'l_1|M^*)$ . Через вершины  $A_k^*$  бокса  $\Pi^*$  строим эллипсоид с центром  $c^*$  и осями, параллельными координатным осям, состоящий из векторов вида  $c^* + y$ , где координаты вектора  $y$  удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i=1}^n y_i^2/b_i^2 = 1. \quad (3.1)$$

Обозначим полуоси бокса через  $a_i = (\rho(l_i) + \rho(-l_i))/2$ . Подберем параметры  $b_i$  эллипсоида так, чтобы

$$\sum_{i=1}^n a_i^2/b_i^2 = 1, \quad \rho(l_1) < b_1 + c_1^*. \quad (3.2)$$

Поскольку  $\rho(l_1) - c_1^* = a_1 < b_1$ , то остальные  $b_i$  можно положить равными  $a_i + t$ ,  $i \in 2 : n$ , где число  $t$  находится из уравнения

$$\sum_{i=2}^n a_i^2/(a_i + t)^2 = 1 - a_1^2/b_1^2. \quad (3.3)$$

Построенный эллипсоид  $E^*$  с условиями (3.1)–(3.3) будет таким, что  $E^* \supset \Pi^* \supset M^*$  и  $A^* \cap E^* = \emptyset$ . Совершая обратное преобразование  $x = Ty$ , получаем искомым эллипсоид со свойствами  $E(Q, c) \supset \Pi \supset M$  и  $E(Q, c) \cap A = \emptyset$ . Здесь матрица  $Q = T\Lambda T'$  и  $\Lambda = \text{diag}(1/b_1, \dots, 1/b_n)$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е 2.** Если множество  $M$  центрально-симметрично относительно нуля, то  $c = 0$ .

Для начального множества  $X_0$  выберем произвольный эллипсоид  $E(P_0, \bar{x}_0) \supset X_0$ ,  $\bar{x}_0 \in X_0$  и рассмотрим квадратичное ограничение

$$(1 - \alpha)|x_0 - \bar{x}_0|_{P_0}^2 + \alpha \int_0^T (|v(t)|^2 + 2s'(t)x(t) - 2r'(t)v(t)) dt \leq 1, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (3.4)$$

ИМ для ограничений (3.4) обозначим через  $\mathcal{X}_T^{E, \alpha}(y)$ . По определению для произвольных указанных эллипсоидов имеем включение

$$\mathcal{X}_T^{E, \alpha}(y) \supset \mathcal{X}_T(y).$$

В [8] установлено, что ИМ  $\mathcal{X}_T^{E, \alpha}(y)$  является эллипсоидом и задается неравенством

$$\mathcal{X}_T^{E, \alpha}(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - \hat{x}(T)|_{P(T)}^2 + h(T) \leq 1\}, \quad (3.5)$$

где параметры  $P(T)$ ,  $\hat{x}(T)$ ,  $h(T)$  определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= -P(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}'(t)P(t) + \alpha G'(t)CG(t) - P(t)b(t)C_1b'(t)P(t)/\alpha, \quad P(0) = (1 - \alpha)P_0; \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + (b(t)c'C + \alpha P^{-1}(t)G'(t)C)(y(t) - G(t)\hat{x}(t) - cr(t)) \\ &\quad - \alpha P^{-1}(t)s(t) + b(t)r(t), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0; \\ \dot{h}(t) &= \alpha \left( |y(t) - G(t)\hat{x}(t) - cr(t)|_C^2 - |r(t)|^2 + 2s'(t)\hat{x}(t) \right), \quad h(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Обозначим через  $\mathcal{E}$  семейство эллипсоидов  $E(P_0, \bar{x}_0)$ , построенных, как в лемме 2, со свойством  $E(P_0, \bar{x}_0) \supset X_0$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** ИМ  $\mathcal{X}_T(y)$  равно пересечению эллипсоидов вида (3.5), т. е. имеет место равенство

$$\mathcal{X}_T(y) = \bigcap_{\alpha, E \in \mathcal{E}} \mathcal{X}_T^{E, \alpha}(y). \quad (3.7)$$

**Доказательство.** Рассуждаем от противного. Пусть существует состояние  $x_T \in \bigcap_{\alpha, E \in \mathcal{E}} \mathcal{X}_T^{E, \alpha}(y)$ , но  $x_T \notin \mathcal{X}_T(y)$ . Рассмотрим последовательность

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 - 1/(k+1), & \text{если } k \text{ — нечетное,} \\ 1/k, & \text{если } k \text{ — четное,} \end{cases}$$

и некоторый эллипсоид  $E \in \mathcal{E}$ . Вектор  $x_T$  реализуется при некотором  $v(\cdot) \in L_2^l[0, T]$ , принадлежащем в силу ограничений (1.2) слабо компактному множеству. Поскольку  $x_T$  зафиксировано, то для каждого  $\alpha_k$  найдется функция  $v_k(\cdot)$  из слабо компактного множества, определяемого интегральным ограничением (2.1) или (2.5) (а также функция  $z_k$ ) такая, что выполняется неравенство

$$(1 - \alpha_k)|x_0 - \bar{x}_0|_{P_0}^2 + \alpha_k J(T, x_0^k, z_k, y) \leq 1, \quad (3.8)$$

поскольку  $x_T \in \mathcal{X}_T^{E, \alpha_k}(y)$ . Не ограничивая общности, можем считать, что последовательность  $v_k(\cdot)$  (и  $z_k(\cdot)$ ) слабо сходится к функции  $v^*(\cdot)$  ( $z_k(\cdot) \rightarrow z^*(\cdot)$  слабо). Соответствующее начальное состояние  $x_0^k$  будет тогда сходиться к вектору  $x_0^*$ . Переходя к пределу по нечетным  $k$  в неравенстве (3.8), получим, что  $J(T, x_0^*, z^*, y) \leq 1$ . Аналогично, переходя к пределу по четным  $k$  в неравенстве (3.8), находим, что  $|x_0^* - \bar{x}_0|_{P_0}^2 \leq 1$ .

По предположению  $x_0^* \notin X_0$ , но в силу (2.7)–(2.9) имеем неравенство  $1 - \bar{\beta}(0) - \bar{J}(T, x_0^*, y) \geq 0$ . Введем множество  $\mathcal{A} = \{x_0 \mid 1 - \bar{\beta}(0) - \bar{J}(T, x_0, y) \geq 0\}$ . Если  $\mathcal{A} \cap M = \emptyset$ , то по лемме 2 найдется эллипсоид  $E \in \mathcal{E}$  такой, что  $E(P_0, \bar{x}_0) \cap \mathcal{A} = \emptyset$ . Но это противоречит тому, что  $x_0^* \in \mathcal{A}$ .  $\square$

### 3.2. Аппроксимация с помощью многошаговых систем

Точные и приближенные методы построения ИМ с помощью эллипсоидов требуют решения дифференциальных уравнений вида (2.6), (3.6). Предложим два способа аппроксимации ИМ посредством многошаговых систем.

Первый способ фактически повторяет то, что представлено в [8], но здесь — для рассматриваемого частного случая. Пусть  $\Delta = T/N$ ,  $t_k = k\Delta$ ,  $k \in 0 : N$ . Заменяем интегральное ограничение (1.2) на ограничение в виде суммы

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} (|v(t)|^2 + 2s'(t)x(t) - 2r'(t)v(t)) dt \leq 1 \quad (3.9)$$

и считаем, что вектор-функция  $v(t)$  кусочно-постоянна. При малом  $\Delta$  такое допущение возможно, поскольку кусочно-постоянные функции плотны в  $\mathbb{L}_2^l[0, T]$ . В силу формул (2.1)–(2.3) и в соответствии с разбиением заменяем непрерывную систему (2.4) дискретной, действуя справа налево:

$$x_{k-1} = a_k x_k + Y_k + B_k z_k, \quad a_k = \mathbf{X}(t_{k-1}, t_k), \quad k \in 1 : N, \quad x_N = x_T,$$

$$Y_k = - \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{X}(t_{k-1}, t) \mathbf{b}(t) y(t) dt, \quad B_k = - \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{X}(t_{k-1}, t) b(t) D_1 dt.$$

Здесь уже подставлены кусочно-постоянные функции  $z(t)$  вместо  $v(t)$ . В ограничениях (2.1), (3.9) полагаем, что не только возмущения, но и состояния  $x(t) = x_k$  сохраняют постоянные значения на полуинтервалах  $(t_{k-1}, t_k]$ . Ограничение (2.1) примет вид

$$J^N(x_T, y, z_{1:N}) = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( |y(t) - G(t)x_k|_C^2 + |z_k|^2 + 2s'(t)x_k - 2r'(t)(c'C(y(t) - G(t)x_k) + D_1z_k) \right) dt \leq 1, \quad x_0 \in X_0. \quad (3.10)$$

Введем ИМ  $\mathcal{X}_T^N(y)$  дискретной задачи по формуле

$$\mathcal{X}_T^N(y) = \{x_T \in \mathbb{R}^n \mid \min_{v_{1:N}} J^N(x_T, y, v_{1:N}) \leq 1\}.$$

Задачу минимизации функционала (3.10) решаем с помощью динамического программирования. Составляем уравнение Беллмана для определения ИМ:

$$V_k(x_k) = \min_{z_k} \left\{ V_{k-1}(a_k x_k + Y_k + B_k z_k) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( |y(t) - G(t)x_k|_C^2 + |z_k|^2 + 2s'(t)x_k - 2r'(t)(c'C(y(t) - G(t)x_k) + D_1z_k) \right) dt \right\}, \quad k \in 1:N, \quad V_0(x_0) = \delta_{X_0}(x_0),$$

где  $\delta_X(x)$  — индикаторная функция множества  $X$ , т.е.  $\delta_X(x) = 0$ , если  $x \in X$ , и  $\delta_X(x) = +\infty$  в противном случае. ИМ  $\mathcal{X}_T^k(y) = \{x_k \mid V_k(x_k) \leq 1\}$ ,  $k \in 1:N$ , на  $k$ -м шаге определяется здесь с помощью неравенства. В [8, теорема 6] установлено, что  $\mathcal{X}_T^N(y) \rightarrow \mathcal{X}_T(y)$  при  $N \rightarrow \infty$  в метрике Хаусдорфа. По построению ИМ  $\mathcal{X}_T^k(y)$  должны быть непусты. На каждом шаге требуется запоминать функцию  $V_k(x)$ , что приводит к трудностям в вычислениях.

Специфика ограничений позволяет находить ИМ как области достижимости посредством опорных функций. А именно во втором способе аппроксимации используем дискретизацию уравнения (2.4) слева направо:

$$x_k = \mathbf{a}_k x_{k-1} + \mathbf{Y}_k + \mathbf{B}_k z_k, \quad \mathbf{a}_k = \mathbf{X}(t_k, t_{k-1}), \quad k \in 1:N, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{Y}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{X}(t_k, t) \mathbf{b}(t) y(t) dt, \quad \mathbf{B}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{X}(t_k, t) \mathbf{b}(t) D_1 dt.$$

Ограничение (3.10) здесь — такое же, с тем исключением, что фиксируется начальное состояние  $x_0 \in X_0$ . Представим решение в виде суммы  $x_k = \bar{x}_k + \mathbf{x}_k$ , где

$$\bar{x}_k = \mathbf{a}_k \bar{x}_{k-1} + \mathbf{Y}_k, \quad x_0 \in X_0, \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{a}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k z_k, \quad \mathbf{x}_0 = 0.$$

Полагаем  $\bar{y}(t) = y(t) - G(t)\bar{x}_k$  на полуинтервале  $[t_{k-1}, t_k]$ . Тогда вместо (3.10) имеем неравенство

$$J^N(x_0, y, z_{1:N}) = \bar{J}^N(x_0, y) + \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( |G(t)\mathbf{x}_k|_C^2 + |z_k|^2 - 2(-s(t) + G'(t)C(\bar{y}(t) - cr(t)))' \mathbf{x}_k - 2r'(t)D_1z_k \right) dt \leq 1, \quad (3.12)$$

$$\bar{J}^N(x_0, y) = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( |\bar{y}(t)|_C^2 + 2s'(t)\bar{x}_k - 2r'(t)c'C\bar{y}(t) \right) dt.$$

Выделим в (3.12) полный квадрат, для чего введем матрицу  $\mathbf{K}$  согласно соотношению

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} (|G(t)\mathbf{x}_k|_C^2 + |z_k|^2) dt = z'_{1:N} \mathbf{K} z_{1:N},$$

где  $z_{1:N} \in \mathbb{R}^{N(l-m)}$  — вектор-столбец. Для нахождения обратной матрицы решаем задачу минимизации

$$-2 \sum_{k=1}^N f'_k z_k + z'_{1:N} \mathbf{K} z_{1:N} \rightarrow \min_{z_{1:N}}.$$

С этой целью воспользуемся методом динамического программирования, вводя функцию

$$v_i(\mathbf{x}_{i-1}) = \min_{z_{i:N}} \sum_{k=i}^N \left[ \int_{t_{k-1}}^{t_k} (|G(t)\mathbf{x}_k|_C^2 + |z_k|^2) dt - 2f'_k z_k \right].$$

Для этой функции получаем уравнение Беллмана

$$v_i(\mathbf{x}_{i-1}) = \min_{z_i} \left\{ v_{i+1}(\mathbf{x}_i) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} |G(t)\mathbf{x}_i|_C^2 dt + \Delta |z_i|^2 - 2f'_i z_i \right\}, \quad v_{N+1}(x) = 0,$$

которое решаем подстановкой  $v_i(x) = \mathbf{x}' p_i \mathbf{x} - 2\mathbf{x}' \gamma_i + \beta_i$ . Для параметров подстановки выводим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} p_i &= \mathbf{a}'_i \{ p_{i+1} + \bar{G}_i - (p_{i+1} + \bar{G}_i)' \mathbf{B}_i (\mathbf{B}'_i (p_{i+1} + \bar{G}_i) \mathbf{B}_i + \Delta I_{l-m})^{-1} \mathbf{B}'_i (p_{i+1} + \bar{G}_i) \} \mathbf{a}_i; \\ \gamma_i &= \mathbf{a}'_i \gamma_{i+1} - \mathbf{a}'_i (p_{i+1} + \bar{G}_i)' \mathbf{B}_i (\mathbf{B}'_i (p_{i+1} + \bar{G}_i) \mathbf{B}_i + \Delta I_{l-m})^{-1} (\mathbf{B}'_i \gamma_{i+1} + f_i); \\ \beta_i &= \beta_{i+1} - (\mathbf{B}'_i \gamma_{i+1} + f_i)' (\mathbf{B}'_i (p_{i+1} + \bar{G}_i) \mathbf{B}_i + \Delta I_{l-m})^{-1} (\mathbf{B}'_i \gamma_{i+1} + f_i); \\ \bar{G}_i &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} G'(t) C G(t) dt, \quad p_{N+1} = 0, \quad \gamma_{N+1} = 0, \quad \beta_{N+1} = 0, \quad i \in 1 : N. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Величина  $\beta_1 = v_1(0) = -f' \mathbf{K}^{-1} f$  является минимумом в рассматриваемой задаче, а величины

$$z_i^0 = (\mathbf{B}'_i (p_{i+1} + \bar{G}_i) \mathbf{B}_i + \Delta I_{l-m})^{-1} (\mathbf{B}'_i \gamma_{i+1} + f_i - \mathbf{B}'_i (p_{i+1} + \bar{G}_i) \mathbf{a}_i \mathbf{x}_{i-1}) \quad (3.14)$$

доставляют этот минимум. Здесь  $z^0_{1:N} = \mathbf{K}^{-1} f$ ,  $f = [f_1; \dots; f_N]$ . При выделении полного квадрата в (3.12) имеем

$$\bar{f}_i = D'_1 \int_{t_{i-1}}^{t_i} r(t) dt + \sum_{k=i}^N \mathbf{B}'_i \mathbf{X}'(t_k, t_i) \int_{t_{k-1}}^{t_k} (-s(t) + G'(t) C (\bar{y}(t) - cr(t))) dt. \quad (3.15)$$

Следовательно, неравенство (3.12) получает вид

$$\bar{J}^N(x_0, y) + (z_{1:N} - \mathbf{K}^{-1} \bar{f})' \mathbf{K} (z_{1:N} - \mathbf{K}^{-1} \bar{f}) + \bar{\beta}_1 \leq 1. \quad (3.16)$$

Для фиксированного вектора  $l$  и начального состояния  $x_0$  определяем величину

$$\begin{aligned} R(N, l, x_0) &= \max_{z_{1:N}} l' x_N = l' \bar{x}_N + l'_N \mathbf{K}^{-1} \bar{f} + \sqrt{l'_N \mathbf{K}^{-1} l_N} \sqrt{1 - \bar{\beta}_1 - \bar{J}^N(x_0, y)}, \\ l'_N &= [l' \mathbf{X}(T, t_1) \mathbf{B}_1; \dots; l' \mathbf{B}_N]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Окончательно находим опорную функцию для ИМ:

$$\rho(l | \mathcal{X}_T^N(y)) = \max_{x_0 \in X_0} R(N, l, x_0), \quad 1 - \bar{\beta}_1 - \bar{J}^N(x_0, y) \geq 0. \quad (3.18)$$

#### 4. Пример

Рассмотрим движение материальной точки по прямой (см. [8]), подверженное возмущению  $v^1(t)$ :

$$\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = v^1(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Пусть возмущение  $v^1$  влияет также и на уравнение наблюдения, где дополнительно присутствует шум измерения  $v^2$ :

$$y(t) = x^1(t) + v^1(t) + v^2(t).$$

Данные уравнения приводят к системе вида (2.4):

$$\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = (y - x^1 + z) / 2, \quad z(t) = v^1(t) - v^2(t). \quad (4.1)$$

Вектор-функция  $v(t)$  стеснена здесь интегральным ограничением (1.2), где  $r = 0$ ,  $s = 0$  и  $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_0^1| \leq 1, |x_0^2| \leq 1\}$ . Функционал из (2.1), (2.5) описывается как

$$J(T, x_0, v, y) = \int_0^T (|y(t) - x^1(t)|^2 + |z(t)|^2) dt / 2. \quad (4.2)$$

Для примера (4.1), (4.2) в работе [8] не было найдено точное ИМ  $\mathcal{X}_T(y)$  и не была доказана формула (3.7). Воспользуемся полученными выше результатами для точного и приближенного нахождения ИМ в нашем примере. В случае точного ИМ формулы типа (2.6) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{P} + PA + A'P + G'G - P\mathbf{b}\mathbf{b}'P &= 0, \quad P(T) = 0; \\ \dot{\gamma} + A'\gamma - P\mathbf{b}(f(t) + \mathbf{b}'\gamma) &= 0, \quad \gamma(T) = 0; \\ \dot{\beta} - |f(t) + \mathbf{b}'\gamma|^2 &= 0, \quad \beta(T) = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Они несколько отличаются от (2.6), поскольку функция  $z(t)$  выбрана с другим, более удобным, числовым множителем. Величина  $\beta(0) = V(0, 0) = -\langle f(\cdot), \mathcal{K}^{-1}f(\cdot) \rangle$  является минимумом в рассматриваемой задаче, а функция  $z_{op}(t) = f(t) - \mathbf{b}'(P(t)\mathbf{x}_{op}(t) - \gamma(t))$  доставляет этот минимум.

Здесь  $z_{op}(t) = \mathcal{K}^{-1}f$ . При выделении полного квадрата имеем  $\bar{f}(t) = \int_t^T \bar{y}(s)G\mathbf{X}(s-t)\mathbf{b} ds$ . Следовательно, получаем неравенство

$$\int_0^T \bar{y}^2(t) dt + \langle z(\cdot) - \mathcal{K}^{-1}\bar{f}, \mathcal{K}(z(\cdot) - \mathcal{K}^{-1}\bar{f}) \rangle + \bar{\beta}(0) \leq 2.$$

Для фиксированного вектора  $l$  и начального состояния  $x_0$  находим величину

$$\begin{aligned} R(T, l, x_0) &= \max_{z(\cdot)} l'x(T) = l'\bar{x}(T) + \langle l_T(\cdot), \mathcal{K}^{-1}\bar{f} \rangle + \sqrt{\langle l_T(\cdot), \mathcal{K}^{-1}l_T(\cdot) \rangle} \\ &\times \sqrt{2 - \bar{\beta}(0) - \int_0^T \bar{y}^2(t) dt}, \quad l'_T(t) = l'\mathbf{X}(T-t)\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Окончательно определяем опорную функцию для ИМ:

$$\rho(l \mid \mathcal{X}_T(y)) = \max_{x_0 \in X_0} R(T, l, x_0), \quad 2 - \bar{\beta}(0) - \int_0^T \bar{y}^2(t) dt \geq 0. \quad (4.4)$$

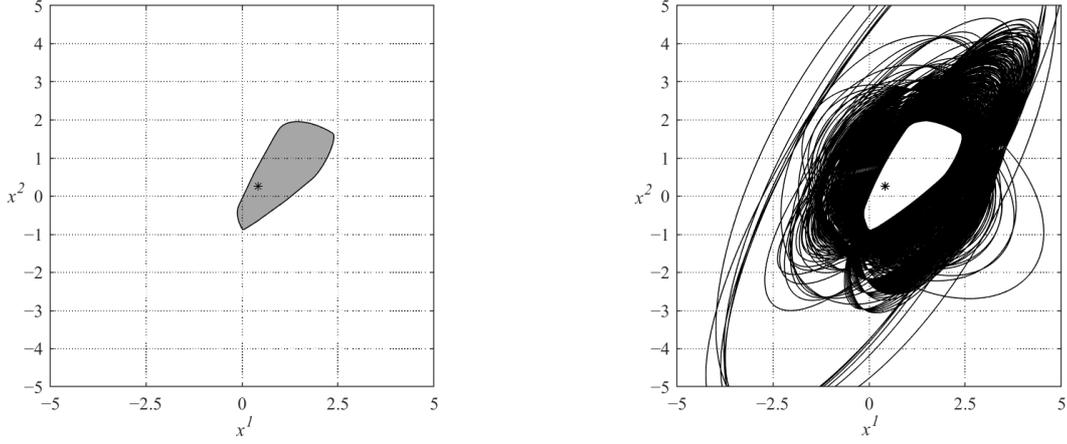


Рис. 1. Точное ИМ и аппроксимация ИМ пересечением эллипсов при  $T = 1$ .

Пусть сигнал реализовался при  $x_0 = [.5; -.5]$ ,  $v = .9[\cos(t); \sin(t)]/\sqrt{T}$  и  $T = 1$ . ИМ показано на рис. 1, где звездочка изображает истинное состояние при  $T = 1$ .

**З а м е ч а н и е 3.** Точным множеством на рис. 1 можно назвать лишь условно. Оно получено путем численного интегрирования уравнений (4.3) и путем пересечения 101 полупространства при вычислении опорных функций (4.4).

Проиллюстрируем теперь теорему на данном примере. Возьмем в качестве ограничения на начальные состояния однопараметрическое семейство эллипсов с диагональной матрицей  $P_0 = [a, 0; 0, 1 - a]$ , где  $a \in (0, 1)$ . Тогда любой эллипс  $\{x \mid x'P_0x \leq 1\}$  будет содержать квадрат начальных состояний  $X_0$ . Выберем еще один параметр  $\alpha \in (0, 1)$  и рассмотрим ограничение (3.4), где  $s(t) = 0$ ,  $r(t) = 0$ ,  $\bar{x}_0 = 0$ . ИМ  $\mathcal{X}_T^{E,\alpha}(y)$  для системы (2.4) с ограничением (3.4) будет содержать исходное ИМ  $\mathcal{X}_T(y)$  при всяком сигнале в исходной системе. Воспользуемся соотношениями (3.4). Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_T^{E,\alpha}(y) &= \{x_T \mid |x_T - \hat{x}(T)|_{P(T)}^2 + h(T) \leq 1\}, \\ \dot{P} &= -P(t)\mathbf{A} - \mathbf{A}'P(t) + \alpha G'G/2 - P(t)bC_1b'P(t)/\alpha, \quad P(0) = (1 - \alpha)P_0; \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + \alpha(bc' + P^{-1}(t)G')(y(t) - \hat{x}^1(t))/2, \quad \dot{h}(t) = \alpha |y(t) - \hat{x}^1(t)|^2/2. \end{aligned}$$

Напомним, что параметры имеют вид  $b = [0, 0; 1, 0]$ ,  $c = [1, 1]$ ,  $G = [1, 0]$ ,  $C = 1/2$ ,  $C_1 = [1, -1; -1, 1]/2$ ,  $\mathbf{A} = [0, 1; -1/2, 0]$ . Пусть данные реализации сигнала останутся прежними. Пересечение эллипсов в момент  $T = 1$  при разных параметрах показано справа на рис. 1. Визуально множества практически совпадают.

Рассмотрим дискретную аппроксимацию. Уравнения типа (3.11) примут вид

$$\begin{aligned} x_k &= \mathbf{a}x_{k-1} + \mathbf{Y}_k + \mathbf{B}z_k, \quad \mathbf{a} = \mathbf{X}(\Delta), \quad k \in 1 : N, \\ \mathbf{Y}_k &= \int_0^\Delta \begin{bmatrix} \sin(t/\sqrt{2})\sqrt{2} \\ \cos(t/\sqrt{2}) \end{bmatrix} y(k\Delta - t) dt/2, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 - \cos(\Delta/\sqrt{2}) \\ \sin(\Delta/\sqrt{2})/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где фундаментальная матрица равна  $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t/\sqrt{2}) & \sin(t/\sqrt{2})\sqrt{2} \\ -\sin(t/\sqrt{2})/\sqrt{2} & \cos(t/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$ . Неравенство

типа (3.12) может быть описано как

$$J^N(x_0, y, z_{1:N}) = \bar{J}^N(x_0, y) + \sum_{k=1}^N \left[ \Delta ((\mathbf{x}_k^1)^2 + |z_k|^2) - 2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{y}(t) dt \mathbf{x}_k^1 \right] \leq 2, \quad (4.5)$$

$$\bar{J}^N(x_0, y) = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{y}^2(t) dt.$$

Введем матрицу  $\mathbf{K}$  согласно соотношению  $\sum_{k=1}^N \Delta ((\mathbf{x}_k^1)^2 + |z_k|^2) = z'_{1:N} \mathbf{K} z_{1:N}$ , где  $z_{1:N} \in \mathbb{R}^N$  — вектор-столбец. В данном примере полагаем  $N = 20$  и матрицу  $\mathbf{K}$  вычисляем по формулам типа (3.13):

$$p_i = \mathbf{a}' \left( p_{i+1} + \Delta G'G - \frac{(p_{i+1} + \Delta G'G) \mathbf{B} \mathbf{B}' (p_{i+1} + \Delta G'G)}{\mathbf{B}' (p_{i+1} + \Delta G'G) \mathbf{B} + \Delta} \right) \mathbf{a}, \quad p_{N+1} = 0;$$

$$\gamma_i = \mathbf{a}' \left( \gamma_{i+1} - \frac{(p_{i+1} + \Delta G'G) \mathbf{B} (f_i + \mathbf{B}' \gamma_{i+1})}{\mathbf{B}' (p_{i+1} + \Delta G'G) \mathbf{B} + \Delta} \right), \quad \gamma_{N+1} = 0;$$

$$\beta_i = \beta_{i+1} - \frac{(f_i + \mathbf{B}' \gamma_{i+1})^2}{\mathbf{B}' (p_{i+1} + \Delta G'G) \mathbf{B} + \Delta}, \quad \beta_{N+1} = 0.$$

По формулам (3.14)–(3.16) величина  $\beta_1 = v_1(0) = -f' \mathbf{K}^{-1} f$  является минимумом в рассматриваемой задаче, а величины

$$z_i^0 = \frac{f_i + \mathbf{B}' (\gamma_{i+1} - (p_{i+1} + \Delta G'G) \mathbf{a} \mathbf{x}_{i-1})}{\mathbf{B}' (p_{i+1} + \Delta G'G) \mathbf{B} + \Delta}$$

доставляют этот минимум. Здесь  $z'_{1:N} = \mathbf{K}^{-1} f$ ,  $f = [f_1; \dots; f_N]$ . При выделении полного квадрата в (4.5) имеем

$$\bar{f}_i = \sum_{k=i}^N G \mathbf{X} ((k-i)\Delta) \mathbf{B} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{y}(t) dt.$$

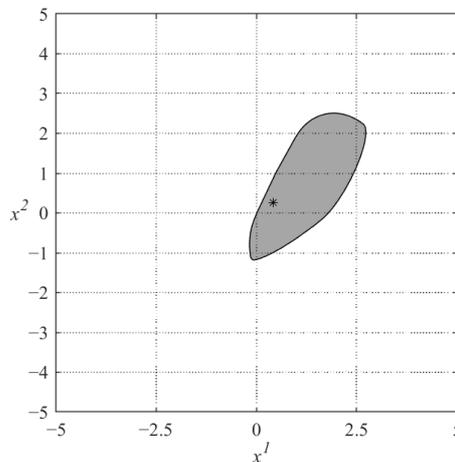


Рис. 2. Дискретная аппроксимация ИМ при  $T = 1$ .

Неравенство (4.5) получает вид  $\bar{J}^N(x_0, y) + (z_{1:N} - \mathbf{K}^{-1}\bar{f})'\mathbf{K}(z_{1:N} - \mathbf{K}^{-1}\bar{f}) - \bar{f}'\mathbf{K}^{-1}\bar{f} \leq 2$ .  
Формулы типа (3.17), (3.18) запишутся как

$$R(N, l, x_0) = \max_{z_{1:N}} l'x_N = l'\bar{x}_N + l'_N\mathbf{K}^{-1}\bar{f} + \sqrt{l'_N\mathbf{K}^{-1}l_N} \sqrt{2 + \bar{f}'\mathbf{K}^{-1}\bar{f} - \bar{J}^N(x_0, y)},$$

$$l'_N = [l'\mathbf{X}((N-1)\Delta)\mathbf{B}; \dots; l'\mathbf{B}],$$

$$\rho(l \mid \mathcal{X}_T^N(y)) = \max_{x_0 \in X_0} R(N, l, x_0), \quad 2 + \bar{f}'\mathbf{K}^{-1}\bar{f} - \bar{J}^N(x_0, y) \geq 0.$$

Дискретная аппроксимация ИМ при тех же данных, что и выше, показана на рис. 2.

### Заключение

- Рассмотрена задача гарантированного оценивания при геометрических ограничениях на начальное состояние и интегральных ограничениях на возмущения в системе и канале измерения.
- Предложены способы аппроксимации информационных множеств исходной задачи путем пересечения объемлющих эллипсоидов и путем замены непрерывной системы дискретной многошаговой системой. Установлена сходимость предлагаемых аппроксимаций к точным информационным множествам исходной задачи.
- Исследован численный пример, на котором продемонстрирована работоспособность предлагаемых аппроксимаций.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Schweppe F. C.** Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs // IEEE Trans. Autom. Control. 1968. Vol. 13. P. 22–28. doi: 10.1109/TAC.1968.1098790.
2. **Bertsecas D. P., Rhodes I. B.** Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty // IEEE Trans. on Autom. Control. 1971. AC-16, no. 2. P. 117–128. doi: 10.1109/TAC.1971.1099674.
3. **Куржанский А. Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 306 с.
4. **Kurzhanski A. B., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1996.
5. **Черноузько Ф. Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
6. **Kurzhanski A. B., Varaiya P.** Dynamics and control of trajectory tubes: Theory and computation. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p. (SCFA, vol. 85.)
7. **Ananyev B. I., Yurovskih P. A.** On the approximation of estimation problems for controlled systems // AIP Conference proceedings. 2019. Vol. 2164. Art. no. 110001. 9 p. doi: 10.1063/1.5130846.
8. **Ананьев Б. И., Юровских П. А.** Аппроксимация задачи гарантированного оценивания со смешанными ограничениями // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 4. P. 48–63.
9. **Ananyev B. I.** Minimax estimation of statistically uncertain systems under the choice of a feedback parameter // J. Math. Systems, Estimation, and Control. 1995. Vol. 5, no. 2. P. 1–17.
10. **Lohéac J., Zuazua E.** Averaged controllability of parameter dependent conservative semigroups // J. Diff. Eq. 2017. Vol. 262, no. 3. P. 1540–1574. doi: 10.1016/j.jde.2016.10.017.
11. **Lohéac J., Zuazua E.** From averaged to simultaneous controllability // Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. (6). 2016. Vol. 25, no. 4. P. 785–828. doi: 10.5802/afst.1511.
12. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
13. **Васильев Ф. П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.

Поступила 1.08.2021

После доработки 22.11.2021

Принята к публикации 29.11.2021

Ананьев Борис Иванович

д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: abi@imm.uran.ru

Юровских Полина Александровна

аспирант

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: polina2104@list.ru

## REFERENCES

1. Schweppe F. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 1968, vol. 13, no. 1, pp. 22–28. doi: 10.1109/TAC.1968.1098790.
2. Bertsecas D.P., Rhodes I.B. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 1971, vol. 16, no. 2, pp. 117–128. doi: 10.1109/TAC.1971.1099674.
3. Kurzhanskii A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under the conditions of uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
4. Kurzhanski A.B., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*. Basel: Birkhäuser, 1997, 321 p. ISBN: 978-0-8176-3699-9.
5. Chernous'ko F.L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem. Metod ellipsoidov* [Estimation of the phase state of dynamical systems. The method of ellipsoids.] Moscow: Nauka Publ., 1988, 319 p. ISBN: 5-02-013899-1.
6. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes: Theory and computation*. SCFA, vol. 85. Basel: Birkhäuser, 2014, 445 p. doi: 10.1007/978-3-319-10277-1.
7. Ananyev B.I., Yurovskih P.A. On the approximation of estimation problems for controlled systems. *AIP Conference Proceedings*, 2019, vol. 2164, art. no. 110001, 9 p. doi: 10.1063/1.5130846.
8. Anan'ev B.I., Yurovskikh P.A. Approximation of a guaranteed estimation problem with mixed constraints. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 48–63 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-48-63.
9. Ananyev B.I. Minimax estimation of statistically uncertain systems under the choice of a feedback parameter. *J. Math. Systems, Estimation, and Control*, 1995, vol. 5, no. 2, pp. 1–17.
10. Lohéac J., Zuazua E. Averaged controllability of parameter dependent conservative semigroups. *J. Diff. Eq.*, 2017, vol. 262, no. 3, pp. 1540–1574. doi: 10.1016/j.jde.2016.10.017.
11. Lohéac J., Zuazua E. From averaged to simultaneous controllability. *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math.* (6), 2016, vol. 25, no. 4, pp. 785–828. doi: 10.5802/afst.1511.
12. Clarke H. *Optimization and nonsmooth analysis*. NY: Wiley, 1983, 308 p. ISBN: 0-471-875094-X. Translated to Russian under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*. Moscow: Nauka Publ., 1988, 280 p.
13. Vasilyev F.P. *Chislennyye metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Numerical methods for solving extremal problems]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 552 p. ISBN: 5-02-013796-0.

Received August 1, 2021

Revised November 22, 2021

Accepted November 29, 2021

*Boris Ivanovich Ananyev*, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: abi@imm.uran.ru.

*Polina Aleksandrovna Yurovskikh*, doctoral student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: polina2104@list.ru.

Cite this article as: B. I. Ananyev, P. A. Yurovskikh. An estimation problem with separate constraints on initial states and disturbances, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 27–39.