ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 1 2022

УДК 512.54

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВПОЛНЕ РАСЩЕПЛЯЕМЫХ ГРУППАХ[1]

А. И. Созутов

Изучается бесконечная периодическая группа G с инволюциями, совпадающая с теоретико-множественным обьединением совокупности собственных локально циклических подгрупп, попарно пересекающихся по единичной подгруппе. Доказано, что если в G есть элементарная подгрупа E_8, то G либо локально конечна (и описано ее строение), либо ее подгруппа $O_2(G)$ элементарна и сильно изолирована в G. Если в G есть конечный элемент порядка, большего двух, и 2-ранг G не равен двум, то группа G локально конечна и описано ее строение.

Ключевые слова: периодическая группа, вполне расщепляемая группа, 2-ранг группы, сильно изолированная подгруппа, конечные элементы.

A. I. Sozutov. On periodic completely splittable groups.

We study an infinite periodic group G with involutions that coincides with the set-theoretic union of a collection of proper locally cyclic subgroups with trivial pairwise intersections. It is proved that if G contains an elementary subgroup E_8, then either G is locally finite (and its structure is described) or its subgroup $O_2(G)$ is elementary and strongly isolated in G. If G has a finite element of order greater than 2 and the 2-rank of G is not 2, then G is locally finite, and its structure is described.

Keywords: periodic group, completely splittable group, 2-rank of a group, strongly isolated subgroup, finite element.

MSC: 20E28, 20F50

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-239-246

Введение

Группа G *расщепляема*, если она совпадает с теоретико-множественным обьединением некоторой системы $\mathfrak{M}$ собственных подгрупп, попарно пересекающихся по единичной подгруппе и всякий неединичный элемент группы G содержится в одной и только одной подгруппе из $\mathfrak{M}$. Систему $\mathfrak{M}$ называют *расщеплением* (*базисом расщепления*) группы G, а сами подгруппы из $\mathfrak{M}$ — *компонентами* (*базиса*) расщепления [1; 2, с. 3].

Класс расщепляемых групп включает широко известные принадлежащие фундаменту теории групп классы конечных и бесконечных групп, периодических групп и групп без кручения. Среди p-групп — это группы периода p и любая p-группа, в которой все элементы составного порядка порождают собственную подгруппу. Расщепляемы конечные и локально конечные группы Фробениуса, простые группы Судзуки, полная и специальная проективные линейные группы размерности два над (локально) конечными полями, в том числе почти все конечные минимальные простые группы (за исключением групп $L_3(3)$ и $U_3(3)$). Вполне расщепляемы свободные группы, свободные произведения вполне расщепляемых групп, нильпотентные группы без кручения, группы Новикова — Адяна, многие из групп А. Ю. Ольшанского (см. далее) и т. д. Исследованиям строения расщепляемых групп посвящены сотни работ известных математиков, в том числе и таких работ, в которых понятие расщепляемости не упоминается,

[1]Работа поддержана РФФИ (проект №19-01-00566 А) и Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение 075-02-2020-1534/1).

или в момент их выхода такого понятия еще не было. Согласно [3, с. 3] в явном виде понятие расщепляемой группы появилось только в работе Миллера [4] в 1906 г., а сам термин принадлежит Юнгу [5] (1927).

Большинство основных классов конечных расщепляемых групп изучались уже в конце 19-го и в начале 20-го веков [3, с. 3]. Так из теоремы К. Жордана о существовании регулярной нормальной подгруппы в конечных точно дважды транзитивных группах [6] (1872) следует их расщепляемость. В книге Л. Диксона [7] дано описание подгрупп расщепляемых проективных линейных групп $PGL_2(q)$ и $PSL_2(q)$ над конечными полями [3, с. 3]. А известная теорема Г. Фробениуса [8] открыла для исследований важнейший класс конечных расщепляемых групп, названных его именем. Конечную группу G как правило называют *группой Фробениуса*, когда в ней есть собственная *обособленная* подгруппа H, т. е. $H = N_G(H)$ и $H \cap H^g = 1$ для любого $g \in G \setminus H$. В этом случае по теореме Фробениуса [8] G распадается в полупрямое произведение $G = F \leftthreetimes H$ ядра F и дополнения H, и каждый неединичный элемент группы G содержится либо в ядре, либо точно в одном из сопряженных дополнений (расщепляемость группы). Для многих бесконечных групп теорема Фробениуса не верна [9], поэтому группу G с обособленной подгруппой H мы называем группой Фробениуса только в случае, когда $G = F \leftthreetimes H$ и $F = \{1\} \cup (G \setminus \cup_{g\in G} H^g)$ (и G расщепляема).

Пусть $F \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a \rangle$ простого порядка p, и $Q = P \leftthreetimes \langle a \rangle$ — p-группа, в которой каждый элемент из $Q \setminus P$ имеет порядок p. Из этих групп строится расщепляемая группа $G = (P \times F) \leftthreetimes \langle a \rangle$ *с допустимой нормальной подгруппой*, так называемая HT-группа (группа Хьюза — Томпсона [3, с. 38]).

Систематическое исследование расщеплений групп (конечных и бесконечных, периодических и групп без кручения), как отмечает А. И. Старостин в докторской диссертации [2, с. 4], было начато в работах П. Г. Конторовича в 30-40-е годы [1; 10; 11]. Расщепляемые группы на протяжении многих лет активно изучались в уральской алгебраической школе (см., например, [1; 2; 11; 12] и далеко не полный перечень статей [13–16], названия которых говорят об их содержании). В указанных работах были введены многие важные понятия покрытий, расщепляемости, R-групп — групп без кручения с однозначным извлечением корня [11], изолированных подгрупп и т. д., эффективные в исследованиях и в настоящее время. В частности, были определены различные степени расщепляемости. Расщепление бывает *полным, абелевым, нильпотентным и т. д.* в зависимости от его базиса, состоящего соответственно из (*локально*) *циклических, абелевых, нильпотентных подгрупп и т. д.* [1; 2; 11; 12].

Группы с полным расщеплением (наиболее сильное условие расщепляемости) называются также *вполне расщепляемыми*. Описание конечных вполне расщепляемых групп было завершено М. Судзуки в [17] (1950).

В ряде работ Судзуки, Бэра, Кегеля и других авторов было дано описание конечных расщепляемых групп [2, с. 6; 3; 15]. В монографии [3] изложена схема доказательства этой коллективной классификационной теоремы:

Конечная расщепляемая группа есть группа одного из следующих типов:

1) *расщепляемая p-группа*;

2) *группа Фробениуса*;

3) *HT-группа*;

4) *S_4 — симметрическая группа подстановок четырех символов*;

5) *$PGL_2(q)$ — проективная линейная группа над полем из q элементов, $q \geq 5$*;

6) *$PSL_2(q) = L_2(q)$ — специальная проективная линейная группа, $q \geq 4$*;

7) *$Sz(q)$ — группа Судзуки над полем из $q = 2^{2n+1}$ элементов.*

В доказательство теоремы большой вклад внесли Диксон, Фробениус, Цассенхауз, Бэр, Кегель, Хьюз, Томпсон, Фейт, Судзуки, Горенстейн, Уолтер, Винсент, и др. (см. [3]).

Согласно [2, с. 5] изучение локально конечных расщепляемых групп обычным образом сводится к изучению конечных расщепляемых групп, как показано в работах [14–16]. Как установлено в работах В.М. Бусаркина, А. И. Старостина [14–16], Р. Бэра [18] и О. Кегеля [19], аналогичная классификационная теорема верна и в классе локально конечных групп. Хочется отметить высокую степень подробности в указанных выше работах, строение групп во многих случаях доведено до их задания порождающими и определяющими соотношениями, до их генетических кодов. В работах Ю. М. Горчакова, В. П. Шункова и автора, стали исследоваться бесконечные смешанные и периодические группы с признаками расщепляемости [20–23].

В [11; 12] неоднократно отмечалось, что *вопрос о строении бесконечных групп, все истинные подгруппы которых циклические* (*абелевы, нильпотентны, конечны*) *открыт.* В [2] А. И. Старостин констатирует, что *о периодических не локально конечных расщепляемых группах, кроме факта их существования, ничего не известно.* С точки зрения не специалиста по комбинаторной теории групп замечание А. И. Старостина актуально и сейчас. Указанные вопросы из [11; 12] были решены в [24; 25], и вместе с тем стало понятно, что расщепляемость в периодических группах намного более распространенное явление. Вполне расщепляемы группы Новикова — Адяна $B(m, n)$ периода $n \geq 665$ [24], периодические произведения Адяна, сомножители которых циклические (или вполне расщепляемы) [26], разнообразный ряд групп А. Ю. Ольшанского [25; 27] и его учеников. Такие группы "бернсайдова типа" задают (определяют) границы исследованиям методами *локального анализа* и *бинарно локального анализа* (термин А. И. Старостина [2, с. 15, 16]), поскольку в них каждая пара неединичных элементов, выбранных из разных компонент расщепления, порождает бесконечную подгруппу.

Ситуация меняется, когда в группе G есть инволюции. В периодической группе любая пара инволюций порождает конечную подгруппу, т. е. инволюции являются конечными элементами (неединичный элемент a группы G мы называем *конечным*, если все подгруппы $\langle a, a^g \rangle$ в G конечны). Если G — периодическая вполне расщепляемая группа 2-ранга 1, то централизатор C инволюции в G является сильно изолированной локально циклической подгруппой (см. п. **7** в разд. 1). Поэтому либо G — группа Фробениуса с абелевым ядром и дополнением C, либо G не локально конечна. Неизвестно, существуют ли такие не локально конечные группы даже в случае, когда C — квазициклическая 2-группа (см. вопрос В. Д. Мазурова 15.54 из Коуровской тетради [28] и статью [29]). Если 2-ранг группы G равен 2, то по п. **8** силовские 2-подгруппы в G локально диэдральны. Это приводит исследования периодических расщепляемых групп к пока нерешенному вопросу В. П. Шункова 16.111 из [28] о строении простых периодических групп с диэдральной силовской 2-подгруппой. Однако для групп более высокого 2-ранга верна

Теорема 1. *Пусть G — бесконечная периодическая вполне расщепляемая группа 2-ранга ≥ 3. Тогда либо $O_2(G)$ — элементарная абелева сильно изолированная в G подгруппа, либо G изоморфна проективной специальной линейной группе $L_2(Q)$ над локально конечным полем Q характеристики 2.*

Локально конечная группа с сильно изолированной нормальной подгруппой является группой Фробениуса [1; 16]. *Существуют ли периодические группы с не дополняемой нормальной сильно изолированной абелевой подгруппой*, автору неизвестно. Так, например, в $B(m, p)$, где $p \geq 665$ — простое число, каждая нормальная подгруппа N сильно изолирована, и если индекс N в $B(m, p)$ конечен и больше p, то N не дополняема в $B(m, p)$.

Теорема 2. *Пусть в бесконечной периодической вполне расщепляемой группе G с инволюциями есть конечный элемент a простого порядка $p > 2$.*

(1) *Если 2-ранг G равен 1, то $G = F \leftthreetimes C$ — группа Фробениуса с локально циклическим дополнением C с инволюцией и элементарным абелевым ядром F.*

(2) *Если 2-ранг G больше 2, то либо $G = F \leftthreetimes C$ — группа Фробениуса, где дополнение C — локально циклическая группа, а ядро F — элементарная абелева 2-группа, либо G изоморфна проективной специальной линейной группе $L_2(Q)$ над локально конечным полем Q характеристики 2.*

1. Некоторые свойства вполне расщепляемых групп

Пусть G — периодическая вполне расщепляемая группа. Поскольку конечные вполне расщепляемые группы изучены детально, мы можем предполагать, что группа G бесконечна. Базис расщепления Ω группы G называется *неприводимым*, если все его компоненты — нерасщепляемые группы [1]. Рассматриваемый нами базис в G очевидно неприводим, поскольку любая (локально) циклическая группа не обладает расщеплением. Из [1, теорема 1] следуют такие свойства вполне расщепляемой группы G.

1. Всякая нерасщепляемая подгруппа из G целиком содержится в какой-либо из компонент базиса расщепления Ω и является (локально) циклической.

2. Любая не (локально) циклическая подгруппа из G вполне расщепляема.

3. Любая абелева подгруппа в G является либо (локально) циклической, либо элементарной абелевой p-группой [4].

4. Если $a, b \in G$, $|a| = |b|$ и $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle \neq 1$, то $\langle a\rangle = \langle b\rangle$.

Для неединичного элемента $a \in G$ через C_a обозначим централизатор $C_G(a)$. Из пп. **1, 2** и [1, теорема 4] легко следует описание централизаторов C_a в G.

5. Если $|a|$ — составное число, то C_a — (локально) циклическая группа.

6. Если $|a| = p$ — простое число, то C_a — либо (локально) циклическая группа, либо группа периода p, либо $Z(C_a) = \langle a\rangle$, в C_a есть максимальная (локально) циклическая характеристическая подгруппа C индекса p, $a \in C$ и $|x| = p$ для всех $x \in C_a \setminus C$.

7. Если $|a| = 2$, то C_a — либо (локально) циклическая группа, либо (локально) диэдральная группа, либо элементарная абелева 2-группа.

Строение силовских 2-подгрупп в G:

8. Если S — максимальная (силовская) 2-подгруппа в G, то S — либо (локально) циклическая, либо (локально) диэдральная, либо элементарная абелева 2-группа.

Доказательство. Если период подгруппы S равен 2, то S элементарная абелева. Если S не вполне расщепляема, то она (локально) циклическая по п. **1**. Пусть S вполне расщепляема и в S есть циклическая подгруппа $\langle s\rangle$ порядка $2^n > 2$. Тогда для инволюции $i \in \langle s\rangle$ согласно п. **7** $C_S(i)$ — черниковская группа и по [30, следствие 2] S — черниковская группа. Так как $Z(S) \neq 1$, то по п. **7** S — (локально) диэдральная группа. □

2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы 1 и не является элементарной абелевой 2-группой. По условиям теоремы в G есть силовская 2-подгруппа U ранга ≥ 3. Согласно п. **7** подгруппа U элементарная абелева. Ввиду п. **6** централизатор C_u каждой инволюции $u \in U$ в группе G является элементарной абелевой 2-группой. Отсюда очевидно следует, что $C_u = U$ для любого $u \in U^{\#}$ и подгруппа U сильно изолирована в G. Если в $G \setminus U$ инволюций нет, то ввиду доказанного выше в $G \setminus U$ нет 2-элементов, $U = O_2(G)$, и выполняется первое утверждение теоремы.

Пусть $U \neq O_2(G)$, v — произвольная инволюция $G \setminus U$, u — любая инволюция из U и $D = \langle u, v\rangle$. Если бы в D была центральная инволюция z, то из равенства $C_u = U$ следовало бы, что $z \in U$ и $C_z = U$, а затем $v \in C_z = U$, вопреки выбору v. Значит, $Z(D) = 1$ и

$v \in u^D$. Следовательно, все инволюции в G сопряжены, и централизатор каждой инволюции в G является элементарной абелевой 2-группой. Применяя теорему 4.1 из [31], заключаем, что G изоморфна проективной специальной линейной группе $L_2(Q)$ над локально конечным полем Q характеристики 2.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть G удовлетворяет условиям теоремы, 2-ранг G равен 1 и i — инволюция из G. Согласно условиям теоремы i — единственная инволюция в подгруппе $C_i = C_G(i)$ и по п. **7** C_i — локально циклическая группа. Очевидно, что $N_G(C_i) = C_i$ и $i^G = J$ — множество всех инволюций группы G. Как следует из п. **4**, (G, C_i) — пара Фробениуса, т. е. $C_i \cap C_i^g = 1$ для любого $g \in G \setminus C_i$. Если некоторый элемент из a^G содержится в C_i, то по [32, теорема 2.12] $G = F \leftthreetimes C_i$ — группа Фробениуса с абелевым ядром F и дополнением C_i. По п. **3** ядро F является элементарной абелевой группой, и теорема для рассматриваемого случая доказана.

Пусть в C_i нет элементов, сопряженных с a. В силу конечности элемента a для любой инволюции $j \in J$ подгруппа $L_j = \langle a, j\rangle$ конечна. Из доказанного выше следует, что $(L_j, L_j \cap C_j)$ — пара Фробениуса. Отсюда выводим, что L_j — группа Фробениуса с дополнением $L_j \cap C_j$ и ядром, содержащим элемент a, $a^j = a^{-1}$. По [31, лемма 2.20] $B = \langle J\rangle = C_a \leftthreetimes \langle i\rangle$ — группа Фробениуса с дополнением $\langle i\rangle$ и абелевым ядром C_a. По аргументу Фраттини $G = C_a \cdot C_i$, при этом $C_a \cap C_i = 1$. По теореме Шмидта G локально конечна и по теореме Фробениуса для локально конечных групп [15] G — группа из утверждения 1 теоремы. Теорема для групп 2-ранга 1 доказана.

Пусть 2-ранг группы G больше 2. По условиям теоремы G — не 2-группа, и по теореме 1 либо $G \simeq L_2(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики 2, либо $O_2(G) \neq 1$. В случае $G \simeq L_2(Q)$ теорема верна, и далее считаем, что $O_2(G) \neq 1$.

По теореме 1 нормальная в G подгруппа $R = O_2(G)$ элементарная абелева и сильно изолирована в G. Ясно, что $a \notin R$. Положим $H = N_G(\langle a\rangle)$, и пусть $L_g = \langle a, a^g\rangle$, где $g \in G \setminus H$. По условиям теоремы подгруппа L_g конечна, а по теореме Шмидта группа $L = RL_g$ локально конечна. По [15, свойство 20] $L = R \leftthreetimes H_g$ — группа Фробениуса с ядром R и дополнением H_g нечетного порядка. Очевидно, можно считать, что $a \in H_g \leq L_g$, и в силу известных свойств (локально) конечных групп Фробениуса $H_g = \langle a\rangle$. Следовательно, $L_g = \langle a, a^g\rangle = F_g \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса с ядром $F_g = R \cap L_g$ и дополненеием $\langle a\rangle$ для любого элемента $g \in G \setminus H$. По [31, теорема 3.1] $G = F \leftthreetimes H$ и $G = F \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a\rangle$. Отсюда заключаем, что $F = R$ и G — группа Фробениуса с элементарным абелевым ядром $F = R$ и дополнением $H = N_G(\langle a\rangle)$.

По теореме Бернсайда [32, теорема 1.2] в H каждая подгруппа порядка pq, где p и q — необязательно различные простые числа, циклическая. Согласно п. **5** $H = C_a$ — локально циклическая группа. Значит, G — группа из утверждения 2 теоремы.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Конторович П.Г.** Группы с базисом расщепления I // Мат. сб. 1943. Т. 12 (54), № 1. С. 56–70.
2. **Старостин А.И.** Расщепления и централизаторы в теории конечных групп (Автореферат дис. ...д-р физ.-мат. наук, 1968) // Мат. заметки. Докторские диссертации. 1969. Т. 6, №4. С. 499–511.
3. **Бусаркин В.М., Горчаков Ю.М.** Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968. 112 с.
4. **Miller G.A.** Groups in which all the operators are contained in series of subgroups such that any two have only the identity in common // Bull. Amer. Math. Soc. 1906. Vol. 12, no. 9. P. 446–449. doi: 10.1090/S0002-9904-1906-01370-2 .
5. **Young J.W.** On the partitions of a group and the rezulting classification // Bull. Amer. Math. Soc. 1927. Vol. 33, no. 4. P. 453–461. doi: 10.1090/S0002-9904-1927-04405-6 .
6. **Jordan C.** Recherches sur les substitution // Liov. Journ. Ser. 2. 1872. Vol. 17. P. 351–367.

7. **Dickson L.** Linear groups with an exposition of the Galois field theory. Leipzig: B.G.Teubner, 1901. 312 p.
8. **Frobenius G.** Über auflosbare Gruppen, IV // Berl. Ber. 1901. P. 1216–1230.
9. **Старостин А.И.** О группах Фробениуса // Укр. мат. журн. 1971. Т. 23, № 5. P. 629–639.
10. **Конторович П.Г.** О разложение групп в прямую сумму подгрупп // Мат. сб. I. 1939. Т. 5 (47), № 2. P. 289–296; II. 1940. Т. 7 (49), №1. P. 27–33.
11. **Конторович П.Г.** Группы с базисом расщепления // Мат. сб. II. 1946. Т. 19 (61), №2. С. 287–305; III. 1948. Т. 22 (64), №1. С. 79–100; IV. 1950. Т. 26 (68), №2. С. 311–320.
12. **Конторович П.Г., Пекелис А.С., Старостин А.И.** Структурные вопросы теории групп // Мат. зап. Урал. ун-та. 1961. Т. 3, №1. С. 3–50.
13. **Старостин А.И.** Строение вполне расщепляемого ядра локально конечных групп // Уч. зап. Урал. ун-та. 1959. Т. 23, № 1. С. 29–34.
14. **Старостин А.И.** Периодические локально разрешимые вполне расщепляемые группы // Изв. ВУЗов. Математика. 1960. Т. 2. С. 168–177.
15. **Бусаркин В.М., Старостин А.И.** О расщепляемых локально конечных группах // Мат. сб. 1963. Т. 62 (104), № 3. С. 275–294.
16. **Старостин А.И.** Ядро расщепления локально конечных групп // Мат. сб. 1965. Т. 66 (108), № 4. С. 551–567.
17. **Suzuki M.** On the finite groups with a complete partition // J. Math. Soc. Japan. 1950. Vol. 2, no. 1-2. P. 165–185. doi: 10.2969/jmsj/00210165 .
18. **Baer R.** Einfache Partitionen nicht-einfacher Gruppen // Math. Z. 1961. Vol. 77, no. 1. P. 1–37. doi: 10.1007/BF01180159 .
19. **Kegel O.** Lokal endliche Gruppen mit nicht-trivialer Partition // Arch. Math. 1962. Vol. 13. P. 10–28. doi: 10.1007/BF01650044 .
20. **Горчаков Ю.М.** О бесконечных группах Фробениуса // Алгебра и логика. 1965. Т. 4, № 1. P. 15–29.
21. **Шунков В.П.** О некотором обобщении теоремы Фробениуса на периодические группы // Алгебра и логика. 1967. Т. 6, № 3. С. 113–124.
22. **Созутов А.И., Шунков В.П.** Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Мат. сб. 1976. Т. 100, №4. С. 495–506.
23. **Созутов А.И.** О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, №4. С. 893–901.
24. **Адян С.И.** Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975. 336 с.
25. **Ольшанский А.Ю.** Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989. 448 с.
26. **Адян С.И.** Периодические произведения групп // Тр. МИАН. 1976. Т. 142. С. 3–21.
27. **Ольшанский А.Ю.** Группы ограниченного периода с подгруппами простых порядков // Алгебра и логика. 1982. Т. 21, № 5. С. 553–618.
28. **Мазуров В.Д., Хухро Е.И.** Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. 15-е изд. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2002. 172 с.
29. **Созутов А.И.** О группах с квазициклическим централизатором инволюции // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 5. С. 1127–1130.
30. **Созутов А.И.** О группах с конечным энгелевым элементом // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, №3. С. 376–396. doi: 10.33048/alglog.2019.58.307 .
31. **Созутов А.И., Сучков Н.М., Сучкова Н.Г.** Бесконечные группы с инволюциями. Красноярск: Изд-во Сибир. федер. ун-та, 2011. 149 с.
32. **Попов А.М., Созутов А.И., Шунков В.П.** Группы с системами фробениусовых подгрупп. Красноярск: Изд-во Краснояр. госуд. техн. ун-та, 2004. 210 с.

Поступила 10.10.2021

После доработки 16.12.2021

Принята к публикации 20.12.2021

Созутов Анатолий Ильич

д-р физ.-мат. наук, профессор

Институт математики и фундаментальной информатики

Сибирский федеральный университет

г. Красноярск

e-mail: sozutov_ai@mail.ru

REFERENCES

1. Kontorowitch P. Groups with a basis of partition. I. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 1943, vol. 12 (54), no. 1, pp. 56–70 (in Russian).
2. Starostin A.I. Partitions and centralizers in the theory of finite groups. [Abstr. Diss. Doc. Sci. (Phys.–Math.)] *Math. Notes*, 1969, vol. 6, no. 4, pp. 754–760. doi: 10.1007/BF01093815 .
3. Busarkin V.M., Gorchakov Yu.M. *Konechnye rascheplyaemye gruppy* [Finite groups that admit partitions]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 112 p.
4. Miller G.A. Groups in which all the operators are contained in a series of subgroups such that any two have only identity in common. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1906, vol. 12, no. 9, pp. 446–449. doi: 10.1090/S0002-9904-1906-01370-2 .
5. Young J.W. On the partitions of a group and the resulting classification. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1927, vol. 33, no. 4, pp. 453–461. doi: 10.1090/S0002-9904-1927-04405-6 .
6. Jordan C. Recherches sur les substitutions. *J. Math. Pures Appl., Ser. 2*, 1872, vol. 17, pp. 351–367.
7. Dickson L.E. *Linear groups: with an exposition of the Galois field theory.* Leipzig: B.G. Teubner, 1901, 312 p. ISBN: 0486604829 .
8. Frobenius G. Über auflösbare gruppen. IV. *Berl. Ber.*, 1901, pp. 1216–1230.
9. Starostin A.I. On Frobenius groups. *Ukr. Mat. Zh.*, 1971, vol. 23, no. 5, pp. 629–639 (in Russian).
10. Kontorowitch P. On the decomposition of a group into a direct sum of subgroups. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, I, 1939, vol. 5 (47), no. 2, pp. 289–296; II, 1940, vol. 7 (49), no. 1, pp. 27–33 (in Russian).
11. Kontorovitch P. Groups with a basis of partition. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, II, 1946, vol. 19 (61), no. 2, pp. 287–308; III, 1948, vol. 22 (64), no. 1, pp. 79–100; IV, 1950, vol. 26 (68), no. 2, pp. 311–320 (in Russian).
12. Kontorovich P.G., Pekelis A.S., Starostin A.I. Structural issues of group theory. *Mat. Zap. Uralsk. Univ.*, 1961, vol. 3, no. 1, pp. 3–50 (in Russian).
13. Starostin A.I. The structure of a completely partitionable kernel of locally finite groups. *Uch. Zap. Uralsk. Univ.*, 1959, vol. 23, no. 1, pp. 29–34 (in Russian).
14. Starostin A.I. Periodic locally solvable, completely partitionable groups. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1960, no. 2, pp. 168–177 (in Russian).
15. Busarkin V.M., Starostin A.I. Locally finite groups with a partition. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1963, vol. 62 (104), no. 3, pp. 275–294 (in Russian).
16. Starostin A.I. The kernel of a partition of locally finite groups. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1965, vol. 66 (108), no. 4, pp. 551–567 (in Russian).
17. Suzuki M. On the finite group with a complete partition. *J. Math. Soc. Japan*, 1950, vol. 2, no. 1-2, pp. 165–185. doi: 10.2969/jmsj/00210165 .
18. Baer R. Einfache Partitionen nicht-einfacher Gruppen. *Math. Z.*, 1961, vol. 77, no. 1, pp. 1–37. doi: 10.1007/BF01180159 .
19. Kegel O.H. Lokal endliche Gruppen mit nicht-trivialer Partition. *Arch. Math.*, 1962, vol. 13, pp. 10–28. doi: 10.1007/BF01650044 .
20. Gorchakov Yu.M. On infinite Frobenius groups. *Algebra i Logika. Sem.*, 1965, vol. 4, no. 1, pp. 15–29 (in Russian).
21. Shunkov V.P. A generalization of the theorem of Frobenius on periodic groups. *Algebra i Logika*, 1967, vol. 6, no. 3, pp. 113–124 (in Russian).
22. Sozutov A.I., Shunkov V.P. On a generalization of Frobenius' theorem to infinite groups. *Math. USSR-Sb.*, 1976, vol. 29, no. 4, pp. 441–451. doi: 10.1070/SM1976v029n04ABEH003680 .
23. Sozutov A.I. On the structure of the noninvariant factor in some Frobenius groups. *Siberian Math. J.*, 1994, vol. 35, no. 4, pp. 795–801. doi: 10.1007/BF02106623 .
24. Adjan S.I. *The Burnside problem and identities in groups.* Berlin: Springer-Verlag, 1979, 311 p. Original Russian text published in Adjan S.I. *Problema Bernsaida i tozhdestva v gruppakh*, Moscow: Nauka Publ., 1975, 336 p.
25. Ol'shanskii A.Y. *Geometry of defining relations in groups.* Dordrecht: Springer, 1991, 505 p. doi: 10.1007/978-94-011-3618-1 . Original Russian text published in Ol'shanskii A.Y. *Geometriya opredelyayushchikh sootnoshenii v gruppakh*, Moscow: Nauka Publ., 1989, 448 p.
26. Adian S.I. Periodic products of groups. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1979, vol. 142, pp. 1–19.
27. Olshanskii A.Yu. Groups of bounded period with subgroups of prime order. *Algebra Logika*, 1982, vol. 21, no. 5, pp. 553–618 (in Russian).

28. *Kourovskaya tetrad': Nereshennye voprosy teorii grupp* [The Kourovka notebook: Unsolved problems of group theory]. Edited by V. D. Mazurov and E. I. Khukhro, 15th ed., Novosibirsk: IM RAN Publ., 2002, 172 p. ISBN: 5-94356-058-0 .
29. Sozutov A.I. Groups with the quasicyclic centralizer of a finite involution. *Sib. Math.*, 2016, vol. 57, no. 5, pp. 881–883. doi: 10.1134/S0037446616050189 .
30. Sozutov A.I. Groups with finite Engel element. *Algebra and Logic*, 2019, vol. 58, no. 3, pp. 254–267. doi: 10.1007/s10469-019-09544-0 .
31. Sozutov A.I., Suchkov N.M., Suchkova N.G. *Beskonechnye gruppy s involyutsiyami* [Infinite groups with involutions]. Krasnoyarsk: Sib. Fed. Univ. Publ., 2011, 149 p. ISBN: 978-5-7638-2127-7 .
32. Popov A.M., Sozutov A.I., Shunkov V.P. *Gruppy s sistemami frobeniusovykh podgrupp* [Groups with Frobenius subgroup systems]. Krasnoyarsk: KGTU Publ., 2004, 210 p. ISBN: 5-7636-0654-X .

Received October 10, 2021
Revised December 16, 2021
Accepted December 20, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00566 A) and by the Krasnoyarsk Mathematical Center, which is financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the project for the creation and development of regional centers for mathematical research and education (agreement no. 075-02-2020-1534/1).

Anatoly Ilyich Sozutov, School of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: sozutov_ai@mail.ru .

Cite this article as: A. I. Sozutov. On periodic completely splittable groups, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 239–246 .