ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 1 2022

УДК 512.544

AT-ГРУППЫ, НЕ ЯВЛЯЮЩИЕСЯ AT-ПОДГРУППАМИ: ПЕРЕХОД ОТ AT_ω-ГРУПП К AT_Ω-ГРУППАМ[1]

А. В. Рожков

Изучаются периодические не локально конечные (бернсайдовы) группы неограниченного периода. Первый явно заданный пример такой группы предложил С. В. Алешин в 1972 г. Обобщением его конструкции стали AT-группы — группы автоморфизмов деревьев. С помощью AT-групп решен ряд известных проблем. До настоящего времени реально изучался только класс AT_ω-групп — AT-групп над последовательностью циклических групп простого порядка. В данной работе исследуется класс AT_Ω-групп — AT-групп над последовательностью циклических групп произвольного конечного порядка. Различие между AT_ω-группами и истинными AT_Ω-группами выявило решение коуровского вопроса 16.79. Изучение класса AT_Ω-групп позволило ввести ряд новых понятий. Теперь AT_ω-группы можно рассматривать как элементарные AT-группы, которыми насыщены AT-группы над последовательностью периодических групп. В статье предложена стратегия изучения таких AT-групп и указаны перспективные направления подобных исследований.

Ключевые слова: бернсайдовы группы, финитно аппроксимируемые группы, условия конечности, AT-группы, деревья, сплетения.

A. V. Rozhkov. AT-groups that are not AT-subgroups: Transition from AT_ω-groups to AT_Ω-groups.

Periodic nonlocally finite (Burnside) groups of infinite period are studied. The first explicit example of such groups was proposed by S.V. Aleshin in 1972. His construction was generalized to AT-groups, i.e., tree automorphism groups. A number of known problems have been solved with the help of AT-groups. Up to now, in reality, only the class of AT_ω-groups, i.e., the class of AT-groups over a sequence of cyclic groups of prime order, has been studied. In this paper, the class of AT_Ω-groups, i.e., of AT-groups over a sequence of cyclic groups of arbitrary finite order, is studied. The difference between AT_ω-groups and true AT_Ω-groups was revealed by the solution of the Kourovka Problem 16.79. The study of the class of AT_Ω-groups has allowed us to introduce a number of new notions. Now the AT_ω-groups can be considered as elementary AT-groups by which the AT-groups over a sequence of periodic groups are saturated. We propose a strategy for studying such AT-groups and give promising directions of this kind of research.

Keywords: Burnside groups, residually finite group, finiteness conditions, AT-groups, trees, wreath product.

MSC: 20B07, 20F50

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-218-231

Введение

В статье речь идет о периодических не локально конечных (бернсайдовых) группах неограниченного периода. Изначально такие примеры построил Е. С. Голод [1] в 1964 г. как присоединенные группы фактор-алгебр, т. е. группы задавались копредставлением. Явно бернсайдову группу неограниченного периода впервые построил С. В. Алешин [2] в 1972 г. как группу преобразований слов конечным автоматом. Следующим был пример В. И. Сущанского [3], 1979 г., как обратный предел сплетений циклических p-групп простого порядка. В 1980 г. Р. И. Григорчук [4] предложил свой пример как группу перекладываний долей единичного отрезка. Наконец, в 1983 г. появился пример Н. Гупты [5] — как группы автоморфизмов слойно однородного дерева. Связь между некоторыми из этих конструкций впервые обнаружил

[1]Проект реализуется победителем Конкурса на предоставление грантов благотворительной программы "Стипендиальная программа Владимира Потанина" Благотворительного фонда Владимира Потанина.

Ю. И. Мерзляков [6]. Обобщением всех перечисленных выше примеров стала конструкция АТ-групп (*групп алешинского типа*) [7].

Используя АТ-группы или группы, с ними тесно связанные, разные авторы решали ряд проблем алгебры, касающихся в основном условий конечности. Отметим решение проблемы Милнора — в [8] доказан промежуточный рост 2-группы Григорчука. Интересны примеры 2-порожденной периодической группы с произвольным кручением [7, §5] и группы, у которой функция роста периодов элементов меньше суперпозиции любого числа логарифмов [9, теорема 6.1.4] (коуровский вопрос Р. И. Григорчука), а также разграничение в классе финитно аппроксимируемых (ф.а.) групп бесконечного числа условий конечности, обобщающих условия конечности В. П. Шункова [9, теорема 7.3.5] (3 вопроса из Коуровской тетради).

АТ-группы доказали свою полезность. Однако изучался, почти исключительно, только класс AT_ω-групп, АТ-групп над последовательностью циклических групп простого порядка. Таковы все группы работ [2–6; 8]. Причина естественна. Циклическая группа простого порядка порождается любым своим неединичным элементом; на ней может быть введена структура поля Галуа. Соответственно сопровождающие перестановки продольных порождающих могут интерпретироваться как векторы над полем Галуа. Это позволяет при исследовании AT_ω-групп применять методы линейной алгебры. Например, в [9, гл. 2] в терминах векторных пространств над полями Галуа удалось исчерпывающе описать стабилизаторы и костабилизаторы вершин AT_ω-групп, важнейших подгрупп в структуре любой АТ-группы.

В силу этого естественным было желание перенести линейные методы на более широкий класс АТ-групп, например на AT_Ω-группы, АТ-группы над последовательностью циклических групп произвольного конечного порядка, в связи с чем и был поставлен вопрос 16.79 [10] о силовских подгруппах AT_Ω-групп, поскольку именно p-группы наиболее интересны для теории бернсайдовых групп.

В данной работе впервые начато планомерное исследование класса AT_Ω-групп. Решен центральный для теории бернсайдовых групп вопрос периодичности. Найдены необходимые и достаточные условия периодичности не только AT_Ω-групп, но и более широкого класса регулярных АТ-групп над последовательностью конечных абелевых групп. Также приведены полезные для практического применения достаточные условия периодичности данных групп. Даны оценки величины костабилизаторов AT_Ω-групп.

Приведены примеры отрицательного решения вопроса 16.79 в классе AT_Ω-групп, подсказавшие введение новых понятий теории АТ-групп: АТ-подгруппы, внутренние АТ-группы, внутренние деревья, элементарные АТ-группы. С использованием вновь введенного инструментария предложена стратегия изучения как регулярных АТ-групп над последовательностью периодических групп, так и АТ-групп с периодическими группами сопровождающих перестановок. Сформулирован ряд вопросов для "часа проблем".

1. Основные определения и вспомогательные утверждения

Перейдем к точным определениям. Пусть $A = (A_0, A_1, \dots)$ — последовательность множеств, каждое из которых содержит не менее двух элементов.

Нумерация начинается с 0 по чисто техническим соображениям, а именно для того, чтобы пустое множество было ассоциировано со множеством с номером 0, а n-е перестановки действовали на n-х множествах.

T — сферически-однородное дерево, построенное над последовательностью A, вершины которого — последовательности из $A_0 \times A_1 \times \dots \times A_n$. Всякий автоморфизм f дерева T, фиксирующий начальную вершину, однозначно определяется набором перестановок ребер дерева T, размещенных в вершинах дерева T: $f = \{f(u) \in Sym(A_{|u|}) \mid u \in T\}$, где $Sym(B)$ — группа перестановок множества B, $|u|$ — длина вершины u.

Определение 1. Автоморфизм f дерева T называется корневым, если $f(\varnothing)$ — единственная нетождественная перестановка автоморфизма f.

Определение 2. Пусть $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots), \gamma_i \in A_i$, — бесконечный путь в дереве T. Автоморфизм f дерева T называется продольным, с направляющим путем γ, если из $f(u) \neq 1$ следует, что $u = (\gamma_0\gamma_1 \ldots \gamma_{n-1}a_n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и $a_n \in A_n$, причем $a_n \neq \gamma_n$.

Корневые и продольные порождающие — нетривиальное обобщение активного и пассивного порождающих сплетения — и есть главная идея примера С. В. Алешина.

Определение 3. Пусть C, D — некоторое множество корневых и продольных автоморфизмов дерева T. Группа $G = gr(C, D)$ называется АТ-группой над последовательностью A (деревом T), если группа перестановок $\Pi_0 = gr(c(\varnothing) \mid c \in C)$ транзитивно действует на множестве A_0, а группа $\Pi_n = gr(f(u) \mid f \in D, |u| = n)$ — на множестве A_n для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Все АТ-группы бесконечны и имеют тривиальный центр. Если последовательность состоит из конечных множеств, то АТ-группа ф.а. Свободное произведение $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ и свободная группа ранга 3 могут быть заданы как АТ-группы.

Важными структурными единицами любой АТ-группы G являются стабилизаторы и костабилизаторы.

Определение 4. Стабилизатор вершины $st_G(u) = \{g \in G \mid g(u) = u\}$ и стабилизатор n-го слоя $st_G(n) = \bigcap_{|u|=n} st_G(u)$.

Определение 5. На поддереве $T_u, |u| = n$, с начальной вершиной u, стабилизатор АТ-группы $st_G(u)$ индуцирует АТ-группу G_n — n-срезку, зависящую только от длины вершины u. У G_n корневыми порождающими будут n-е сопровождающие перестановки продольных порождающих группы G, а продольными порождающими — “n-остатки” исходных продольных порождающих.

Определение 6. Костабилизатор или жесткий стабилизатор $cost_G(u)$ — это наибольшая подгруппа группы G, нетождественно действующая только на поддереве T_u с начальной вершиной u. Главные костабилизаторы порождаются костабилизаторами всех вершин n-го слоя: $cost_G(n) = gr(cost_G(u) \mid |u| = n) \cong \prod_{|u|=n} cost_G(u)$.

В работе [11, определение 1] введен класс ветвящихся групп G. Это группы, точно действующие на сферически-однородном дереве, у которых все главные костабилизаторы имеют конечный индекс $|G : cost_G(n)| < \infty$. Приведенные в [11] примеры ветвящихся групп являются АТ-группами.

Определение 7. АТ-группа называется регулярной, если она задана над последовательностью групп, а сопровождающими перестановками ее порождающих элементов являются умножения на элементы этих групп, т. е. их регулярные представления.

Определение 8. Регулярная АТ-группа над последовательностью циклических групп простого порядка $\omega = (p, q, \ldots)$ называется AT_ω-группой, а над последовательностью циклических групп произвольного конечного порядка — AT_Ω-группой.

Пусть $d = (f, a^{v_1}, a^{v_2}, \ldots, a^{v_{p-1}})$ — продольный порождающий AT_ω-группы $G = gr(c, D)$ над последовательностью $\omega = (p, q, \ldots)$, где f — продольный порождающий 1-срезки G_1, a — корневой порождающий 1-срезки. Множество $v = v(d) = (v_1, v_2, \ldots, v_{p-1})$ мы можем рассматривать как $(p-1)$-мерный вектор над полем $GF(q)$, который назовем *сопровождающим вектором элемента* d.

Здесь предполагается, что направляющий путь продольного автоморфизма d начинается с символа 0. Если же он начинается с символа a, то заменяем его на $d^{(0)} = c^a * d * c^{-a}$.

Легко заметить, что для $d, d' \in D, k \in \mathbb{N}$ имеют место равенства $v(d * d') = v(d) + v(d'), v(d^k) = kv(d)$.

Сопровождающие векторы всех продольных элементов порождают сопровождающее пространство $V = V(G) = \langle v(d) \mid d \in D \rangle \leq GF(q)^{p-1}$. Поэтому при нахождении костабилизаторов можно использовать методы линейной алгебры. Важную роль при рассмотрении играют соотношения между простыми числами p, q. Всего возникает около 20 различных вариантов для векторных пространств V. Изучив их, мы можем исчерпывающе решить вопрос о структуре $cost_G(1)$ — главного костабилизатора AT_ω-группы. Этому посвящена вся гл. 2:

Теорема 1 [9, гл. 2]. *Пусть G — AT_ω-группа, где последовательность ω состоит только из нечетных простых чисел, тогда фактор-группа $st(1)/cost(1)$ — это подпрямое произведение или коммутативных, или нильпотентных ступени 2, или метабелевых групп.*

Естественно попытаться применить линейные методы и в классе AT_Ω-групп.

Следующее понятие важно как техническое упрощение структуры АТ-группы.

О п р е д е л е н и е 9. Пусть G — регулярная АТ-группа над последовательностью групп $A = (A_0, A_1, \ldots)$, d — продольный порождающий группы G с направляющим путем $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots)$ и $\gamma_e = (e_0, e_1, e_2, \ldots)$ — фиксированный путь по нейтральным элементам групп A_n. Тогда спрямлением d вдоль пути γ_e называется продольный порождающий $d^{(e)}$ с направляющим путем γ_e, равный $[\gamma(\gamma_e)] * d * [\gamma^{-1}(\gamma)]$.

Здесь $[\gamma(\gamma_e)]$ — это автоморфизм дерева T, у которого нетождественные перестановки стоят только в вершинах пути γ_e, а именно: элемент $\gamma_0 \in A_0$ расположен в корне дерева T, т. е. в вершине $\varnothing$, элемент $\gamma_1 \in A_1$ — в вершине e_0, элемент $\gamma_2 \in A_2$ — в вершине e_0e_1 и т. д.

Нетрудно заметить, что автоморфизм $[\gamma(\gamma_e)]$ преобразует путь γ_e в путь γ. Потом на полученный путь γ подействуем продольным автоморфизмом d. И, последнее, вернем путь γ на исходную позицию единичного пути. Выполнит эту работу элемент $[\gamma(\gamma_e)]^{-1} = [\gamma^{-1}(\gamma_e)]$, т. е. в вершинах пути γ мы расположим обратные элементы $(\gamma_0)^{-1}, (\gamma_1)^{-1}, \ldots$.

Если мы применим операцию спрямления ко всем продольным порождающим, то получим спрямленную АТ-группу $G^{(e)} = gr(C, D^{(e)})$, где $D^{(e)} = \{d^{(e)} \mid d \in D\}$.

Связь между исходной и спрямленной группами трудно предсказуема. Несложно привести примеры, когда пересечение групп $G \bigcap G^{(e)}$ состоит только из корневых элементов. Более того, исходная АТ-группа G может быть континуум порожденной, а спрямленная группа — 2-порожденной.

Спрямленные группы полезны в решении вопросов периодичности АТ-групп. Но только в том случае, когда последовательность A состоит из периодических абелевых групп.

В дальнейшем спрямление групп мы будем использовать только для АТ-групп над последовательностью конечных абелевых групп, для которых естественна аддитивная нотация. То есть спрямленный путь будет состоять из нулей $\gamma_0 = (0, 0, 0, \ldots)$, а спрямленную группу обозначим через $G^{(0)}$.

Индукция по слоговой длине. Слогами назовем степени корневых и продольных порождающих. Каждый элемент группы $g \in G$ может быть записать в виде произведения этих слогов. Под слоговой длиной понимаем число вхождений продольных слогов. Причина ограничиться только продольными слогами заключается в том, что при сужении на поддеревья неединичные образы имеют только они.

О п р е д е л е н и е 10. Пусть $G = gr(c, D^{(0)})$ — спрямленная AT_Ω-группа и $g \in G$, тогда $g = c_1 * d_1 * \ldots * d_n * c_{n+1}$ где c_i — степень корневого порождающего, d_i — произведение продольных порождающих. Слоговой длиной называется число $\rho(g)$ сомножителей вида d, т. е. число n.

Возникают два принципиально различных случая: $c_1c_2 \ldots c_{n+1} = 1$, и тогда $g \in st_G(1)$ и мы сразу переходим к координатам; $c_1c_2 \ldots c_{n+1} = c \neq 1$, в этом случае мы записываем $g = g^{(0)}c, g^{(0)} \in st_G(1)$.

Для определения условий конечности важно понятие *хэша продольного порождающего.* В случае AT_ω-групп это сумма сопровождающих перестановок данного уровня.

В случае AT_Ω-групп хеш — это вектор. Вот точные определения.

Прежде всего явно выпишем сопровождающие перестановки продольных порождающих.

В случае AT_ω-группы, где $\omega = (p_0, p_1, p_2, \ldots)$, имеем

$d = (d_1, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots, v_{p_0-1}^{(1)}), v_i^{(1)} \in GF(p_1), \ldots,$

$d_{n-1} = (d_n, v_1^{(n)}, v_2^{(n)}, \ldots, v_{p_{n-1}-1}^{(n)}), v_i^{(n)} \in GF(p_n), n = 2, 3, \ldots$.

В случае AT_Ω-группы, где $\Omega = (m_0, m_1, m_2, \ldots)$, имеем соответственно

$d = (d_1, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots, v_{m_0-1}^{(1)}), v_i^{(1)} \in \mathbb{Z}_{m_1}, \ldots,$

$d_{n-1} = (d_n, v_1^{(n)}, v_2^{(n)}, \ldots, v_{m_{n-1}-1}^{(n)}), v_i^{(n)} \in \mathbb{Z}_{m_n}, n = 2, 3, \ldots$.

О п р е д е л е н и е 11. Пусть d — продольный порождающий AT_ω-группы, тогда последовательность $\chi(d) = (\chi_1(d), \chi_2(d), \ldots)$, где $\chi_n(d) = v_1^{(n)} + v_2^{(n)} + \ldots + v_{p_{n-1}-1}^{(n)} \in GF(p_n)$ — сумма всех n-сопровождающих перестановок порождающего d, называется его хэшем.

Если порядок циклической группы составной, то определение хэша сложнее.

О п р е д е л е н и е 12. Пусть d — продольный порождающий AT_Ω-группы, тогда хэш — это последовательность $\chi(d) = (\chi_1(d), \chi_2(d), \ldots)$, где $\chi_n(d)$ определяется следующим образом.

Рассмотрим n-й слой дерева. Обозначим, для краткости, $m_{n-1} = k, m_n = l$ и $1 < s < \ldots < r < \ldots < t < k$ — все различные делители натурального числа k. Тогда

$\chi_n(d) = (\chi_{n,1}(d), \chi_{n,s}(d), \ldots, \chi_{n,r}(d), \ldots, \chi_{n,t}(d))$, где

$\chi_{n,1}(d) = v_1^{(n)} + v_2^{(n)} + \ldots + v_{k-1}^{(n)}, \ldots, \chi_{n,t}(d) = v_t^{(n)} + v_{2t}^{(n)} + \ldots + v_{(\frac{k}{t}-1)t}^{(n)}$.

Элемент хэша $\chi_{n,r}(d)$ — это сумма элементов орбиты действия c^r на координаты продольного порождающего d.

Заметим, что первые координаты хэша AT_Ω-группы $\chi(d) = (\chi_{1,1}(d), \chi_{2,1}(d), \chi_{3,1}(d), \ldots)$ — это в точности хэш AT_ω-группы $\chi(d) = (\chi_1(d), \chi_2(d), \chi_3(d), \ldots)$

Понятие хэша можно распространить на конечные абелевы группы. Рассмотрим регулярную АТ-группу G над последовательностью конечных абелевых групп $(A_0, A_1, \ldots)$. Пусть $d = (d_1, \ldots, b_a^{(1)}, \ldots), b_a^{(1)} \in A_1, a \in A_0$ — ее продольный порождающий. Отметим, что мы используем аддитивную форму записи как для сопровождающих перестановок из группы A_1, так и для индексирующих их элементов из группы A_0. Еще одна особенность. В случае конечной циклической группы у нас есть естественный порядок перечисления сопровождающих перестановок — по возростающим степеням порождающего элемента циклической группы. В случае произвольной конечной группы приходится брать любое из возможных упорядочений, что мы и сделали. Просто перечислили все сопровождающие перестановки, проиндексировав их элементами группы A_0. Отметим, что для n-срезки G_n продольный порождающий будет иметь вид $d_{n-1} = (d_n, \ldots, b_a^{(n)}, \ldots), b_a^{(n)} \in A_n, a \in A_{n-1}$.

Теперь зададим хэш $\chi(d) = (\chi_1(d), \chi_2(d), \ldots)$. Как и в случае AT_Ω-групп, он будет многомерным, но его координаты упорядочить естественным образом не представляется возможным.

Пусть $\mathbf{C_{n-1}} = \{C \mid C = gr(a), a \in A_{n-1}\}$ — множество всех циклических подгрупп группы A_{n-1}. Зададим $\chi_n(d) = (\ldots, \chi_{n,C}(d), \ldots), C \in \mathbf{C_{n-1}}$. Пусть $C = gr(a)$, тогда $\chi_{n,C}(d) = \sum_{a \in C^\sharp} b_a^{(n)}$, где $C^\sharp = C \setminus \{0\}$, $\chi_{n,C}(d)$ — это сумма сопровождающих перестановок n-го слоя продольного порождающего d с координатами из множества $C^\sharp$. Значением хэша $\chi_{n,C}(d)$ является элемент группы A_n.

2. Периодичность и костабилизаторы

Назовем последовательности *почти равными*, если они отличаются только конечным числом членов.

Например, если два продольных порождающих имеют почти равные направляющие пути, то в некоторой n-срезке АТ-группы (а значит, и во всех m-срезках $m > n$) они будут иметь одинаковые направляющие пути.

Часто, явно или не явно, в АТ-группах используется эквивалентность “почти равных объектов”. Формально объекты нашего изучения — это элементы факторизации декартового произведения (групп или множеств) по прямому произведению. Хотя часто удобнее и проще работать с прообразом этой факторизации.

Один из подобных примеров — важная для понимания природы периодичности AT-групп следующая теорема.

Теорема 2. *Если AT-группа $G = gr(C, D)$ периодическая, то и все ее n-срезки $G_n, n = 1, 2, \ldots,$ периодические. Обратно, если G — AT-группа, у которой все сопровождающие группы перестановок периодические, то из периодичности любой n-срезки G_n следует, что группа G периодическая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если элемент имеет конечный порядок, то и все его координаты — конечного порядка, а значит, и 1-срезка G_1 периодическая. Аналогично 1-срезка группы G_1, а это 2-срезка G_2, тоже периодическая и т. д.

Обратно. Всякий элемент группы G можно записать как $gc, c \in gr(C), g \in st_G(1)$. Поскольку сопровождающие группы перестановок периодические, то для некоторого натурального k $c^k = 1$. Следовательно, $(cg)^k \in st_G(1)$. Координаты элемента $(cg)^k$ принадлежат 1-срезке G_1. И мы возвращаемся к началу доказательства с заменой группы G на G_1. Выполнив конечное число раз возведение в степень, мы попадаем в периодическую группу G_n. □

Теорема 3. *AT_Ω-группа $G = gr(c, D)$ будет периодической тогда и только тогда, когда будет периодической спрямленная группа $G^{(0)} = gr(c, D^{(0)})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из [7]. □

Следующая теорема несущественно отличается от своего аналога в теории AT_ω-групп.

Теорема 4. *AT_Ω-группа $G^{(0)} = gr(c, D^{(0)})$ будет периодической тогда и только тогда, когда конечный порядок имеют все элементы $\{d, da \mid d \in gr(D^{(0)}), a \in gr(c)\}$ во всех n-срезках группы $G^{(0)}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из [7], только кроме произведений dc нужно рассмотреть и произведения dc^r, где r пробегает все делители порядка корневого порождающего c. □

Мы проверяем периодичность группы по произведению всего двух элементов dc, но во всех срезках. Это значит, что произведение произвольной длины при переходе к срезкам будет уменьшаться и на одной из них станет произведением двух элементов.

Если AT-группа задана явно через сопровождающие перестановки продольных порождающих, то предыдущая теорема мало полезна. В [7, теорема 1] дано прямое описание периодических AT_ω-групп, у которых продольные порождающие заданы явно через сопровождающие перестановки.

Теорема 5. *AT_ω-группа $G^{(0)} = gr(c, D^{(0)})$ над ограниченной последовательностью ω будет периодической тогда и только тогда, когда хэш $\chi(d)$ содержит бесконечно много нулей для любого $d \in gr(D^{(0)})$.*

Отметим, что ограниченность последовательности ω можно отбросить и заменить ее на периодичность группы $gr(D^{(0)})$. Но это экзотический случай, не имеющий отношения к бернсайдовым группам. Если последовательность ω неограниченная, но тем не менее AT_ω-группа над ней периодическая, то она локально конечна.

Периодичность AT_Ω-групп тоже может быть описана в терминах хэша, но не так просто.

О п р е д е л е н и е 13. Введем понятие нити. Пусть $d \in gr(D^0)$ и $\chi(d) = (\chi_1(d), \chi_2(d), \ldots)$ — его хэш. Поскольку все должно выполняться во всех n-срезках, то сразу перейдем на n-й слой дерева. (Все обозначения из определения 12.)

1. Возьмем некоторый делитель $r|k$.
2. Находим координату $\chi_{n,r}(d) = \alpha, \alpha \in \mathbb{Z}_l$.
3. Вычисляем $r_1 = gcd(\alpha, l)$ и переходим к шагу 1 с заменой n на $n + 1$, а r на r_1.

4. Далее находим $r_2, r_3, \ldots$

5. Если $\alpha = 0$, то процесс прекращается, нить обрывается.

Последовательность $r, r_1, r_2, r_3, \ldots$, стартовавшую с n-го слоя, назовем n-нитью.

Понятие нити можно распространить на регулярные АТ-группы над последовательностью конечных абелевых групп. Используем обозначения в комментариях после определения 12.

1. Берем элемент $a \in A_{n-1}$,. Пусть $C = gr(a)$.

2. Находим координату $\chi_{n,C}(d) = \alpha, \alpha \in A_n$.

3. Вычисляем $C' = gr(\alpha)$ и переходим к шагу 1 с заменой n — на $n+1$, а C — на C'.

4. Далее находим $C'', C''', \ldots$.

5. Если $\alpha = 0$, то процесс прекращается, нить обрывается.

Последовательность $C, C', C'', \ldots$, стартовавшую с n-го слоя, назовем n-нитью.

Теорема 6. *AT_Ω-группа $G^{(0)} = gr(c, D^{(0)})$ над ограниченной последовательностью Ω будет периодической тогда и только тогда, когда для каждого $d \in gr(D^{(0)})$ и каждого натурального n все n-нити будут конечными.*

Д о к а з а т е л ь с т в о достаточности индукцией по слоговой длине. В силу того что последовательность Ω ограничена, периодичность корневого и продольных порождающих очевидна. Для корневого порядок равен $|\Omega_0|$, порядок продольных делит НОК(Ω).

а) Пусть $|\Omega_0| = rk$ и $h = dc^r, d \in gr(D^{(0)})$. Рассмотрим $g = h^k = (dc^r)^k$. Очевидно, что $g \in st_G(1)$ и имеет место равенство $g = (dc^r)^k = d * [c^r dc^{-r}] * [c^{2r} dc^{-2r}] * \ldots * [c^{(k-1)r} dc^{-(k-1)r}]$.

Вычислим координаты элемента $g = (g_0, g_1, \ldots, g_{\Omega_0 - 1})$.

Пусть $d = (d_1, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots, v_{\Omega_0-1}^{(1)}), v_i^{(1)} \in \mathbb{Z}_{\Omega_1}$.

Координаты элемента g разобьются на орбиты действия элемента r на группу $\mathbb{Z}_{\Omega_0}$:

$$\big\{(0, r, 2r, \ldots, (k-1)r), (1, 1+r, 1+2r, \ldots, 1+(k-1)r), \ldots,$$

$$(r-1, r-1+r, r-1+2r, \ldots, r-1+(k-1)r)\big\}.$$

Поскольку продольный порождающий d имеет всего одну продольную координату, то все они будут содержаться в первой орбите. Все остальные орбиты будут состоять только из корневых элементов, и, значит, их периодичность очевидна.

Координаты с номерами из первой орбиты все будут попарно сопряженными, поэтому выпишем только нулевую координату. Здесь маленькая ремарка. Циклические группы удобнее задавать в аддитивной форме, т. е. работать сразу с показателем степени. Но в те редкие моменты, когда мы сталкиваемся с продольным порождающим, нужно переходить к мультипликативной записи, и аддитивный элемент становится показателем степени. Поэтому пусть c — корневой порождающий исходной группы G, элемент a — корневой порождающий ее 1-срезки G_1, тогда

$$g_0 = d_1 * a^{v_r} * a^{v_{2r}} * \ldots * a^{v_{(\frac{\Omega_0}{r}-1)r}}.$$

Когда мы соберем вместе все показатели степени корневого порождающего 1-срезки G_1 и вернем верхний индекс 1-срезки $^{(1)}$, который мы убрали для читаемости формулы. То увидим, что это первый элемент 1-нити: $\alpha = \chi_{1,r}(d) = v_r^{(1)} + v_{2r}^{(1)} + \ldots + v_{(\frac{\Omega_0}{r}-1)r}^{(1)}$.

И поэтому $g_0 = d_1 * a^\alpha$. Положим $r_1 = gcd(\alpha, \Omega_0)$ и вместо $g_0 = d_1 * a^\alpha$ рассмотрим элемент $d_1 * a^{r_1}$ как и требуется по определению нити. Эта замена не повлияет на результат, так как орбиты $(0, \alpha, 2\alpha, \ldots)$ и $(0, r_1, 2r_1, \ldots)$ состоят из одних и тех же элементов, только расположенных в разном порядке. Но поскольку сопровождающие перестановки принадлежат коммутативной группе, то результат не изменится.

Таким образом, возведя элемент g_0 в степень Ω_1 / r_1, мы получим второй элемент нити и т. д. На некотором конечном шаге n очередной α станет равным 0, поэтому соответствующий g_0

попадет в $st(1)$ n-срезки G_n. Значит, все его координаты станут или корневыми порождающими, или продольными, или сопряженными с продольными. По предположению индукции все они будут иметь конечный порядок.

Шаг индукции.

б1) Пусть элемент $g \in G$ имеет слоговую длину n и $g \in st_G(1)$. Пусть $k = |\Omega_0|$, тогда $g = (g_1, g_2, \ldots, g_{k-1})$. Легко заметить, что $\rho(g_1)+\rho(g_2)+\ldots+\rho(g_p) \leq \rho(g)$, поскольку у каждого продольного порождающего всего одна продольная координата.

Кроме того, $\rho(g_i) \leq \left[\dfrac{\rho(g)+1}{2}\right], i = 1, 2, \ldots, k-1$ (квадратные скобки — это взятие целой части рационального числа), поскольку в записи $g = g^c * g^{c'} \ldots$ соседние продольные порождающие сопряжены разными степенями корневого порождающего.

Если бы сопрягающие элементы совпали, то продольные порождающие, в силу того что у них одинаковые направляющие пути, в произведении дали бы новый продольный порождающий и это уменьшило бы слоговую длину. Таким образом, слоговая длина координат элемента g уменьшилась бы. Значит, все координаты элемента g, а следовательно и он сам, имеют конечный порядок.

б2) Пусть элемент $g \in G$ имеет слоговую длину n и $g \notin st_G(1)$. Пусть $k = |\Omega_0|$, тогда $g = (g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}) * c^r$. В записи элемента g через корневые и продольные порождающие выбросим все корневые порождающие. Произведение оставшихся продольных порождающих обозначим через $d(g)$.

Опуская несложные технические детали, мы оказываемся в условиях пункта а) текущего доказательства. Самый трудный случай, когда слоговая длина координат после возведения в степень $g^{k/r}$ не уменьшается, сводится к случаю а) с заменой продольного порождающего d на $d(g)$. И здесь, также после серии возведений в степень и перехода к координатам, мы достигнем в некоторой срезке обрыва нити и уменьшения слоговой длины исходного элемента.

Необходимость очевидна. Нити — это и есть процедура возведения в степень. Если элемент имеет конечный порядок, то связанная с ним нить конечна. □

Следствие 1. *Пусть $G^{(0)} = gr(C, D^{(0)})$ — регулярная АТ-группа над последовательностью абелевых групп, порядки которых ограничены. Группа будет периодической тогда и только тогда, когда для каждого $d \in gr(D^{(0)})$ и каждого натурального n все n-нити будут конечными.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этого следствия аналогично доказательству теоремы 6. □

Теорема 6 плохо применима на практике, поведение нитей проследить трудно. Есть более полезное для практики достаточное условие.

Теорема 7. *Для периодичности AT_Ω-группы $G^{(0)} = gr(c, D^{(0)})$ достаточно, чтобы у каждого $d \in gr(D^0)$ хэш $\chi(d)$ содержал бесконечно много номеров n, таких что $\chi_n(d)$ состоит из одних нулей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если некоторая координата хэша состоит из нулей, то любая нить на этой координате оборвется. Поскольку таких нулевых координат у хэша бесконечно много, то обрыв всех нитей гарантирован для всех n-срезок. □

Следствие 2. *Для периодичности регулярной АТ-группы над последовательностью конечных абелевых групп ограниченного порядка $G^{(0)} = gr(c, D^{(0)})$ достаточно, чтобы у каждого $d \in gr(D^0)$ хэш $\chi(d)$ содержал бесконечно много номеров n, таких что $\chi_n(d)$ состоит из одних нулей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этого следствия аналогично доказательству теоремы 7. □

Аналог теоремы 1 о структуре костабилизаторов для класса AT_Ω-групп известными методами очень трудно доказуем.

Если у AT_ω-групп приходится разбирать около 20 вариантов соотношений между соседними циклическими группами простого порядка, то для AT_Ω-групп, если следовать методике AT_ω-групп, таких случаев будет бесконечно много. Фактически каждую отдельную группу придется изучать самостоятельно.

Следующее утверждение пока проверено только на отдельных примерах. Но, скорее всего, за исключением специально подобранных случаев, оно верно для большинства AT_Ω-групп.

Утверждение 1. *Пусть G — AT_Ω-группа, где последовательность Ω состоит только из нечетных чисел, тогда фактор группа $st(1)/cost(1)$ — это подпрямое произведение или коммутативных, или нильпотентных ступени 2, или метабелевых групп.*

Пусть $G = gr(c, D)$ — AT_Ω-группа над последовательностью нечетных чисел $\Omega = (k, l, \ldots)$. И продольные порождающие имеют вид $d = (d_1, v_1(d), v_2(d), \ldots, v_{k-1}(d)), v_i \in \mathbb{Z}_l$.

Корневой порождающий 1-срезки G_1, а мы здесь используем аддитивную форму записи, — это $1(\bmod l)$. В случае AT_ω-групп порождающим является любой ненулевой элемент. В случае AT_Ω-групп нахождение порождающего корневой подгруппы 1-срезки G_1 может оказаться проблемой.

По определению AT-групп $\mathbb{Z}_l = gr(v_i(d) \mid d \in D, i = 1, 2, \ldots, k-1)$.

Естественно возникает вопрос: *какое минимальное количество продольных порождающих d и сопряженных с ними $c^i d c^{-i}$ нужно использовать, чтобы получить на нулевой координате корневой порождающий 1-срезки G_1 ?*

Сформулируем теоретико-числовую задачу. В группе $\mathbb{Z}_l$ задано некоторое порождающее множество $\alpha, \beta, \ldots$ Выделяем в нем минимальное порождающее множество, пусть в нем будет s элементов. Какое максимальное значение может принимать s при фиксированном l?

Лемма 1. *Максимальное значение числа s равно числу различных простых делителей числа l.*

Доказательство. Очевидно, что элемент α порождает в $\mathbb{Z}_l$ ту же подгруппу, что и элемент $gcd(\alpha, l)$. Поэтому можем сразу считать, что все элементы $\alpha, \beta, \ldots$ — это делители числа l. Далее применяем китайскую теорему об остатках. □

Лемма является полезным инструментом при вычислениях в классе AT_Ω-групп.

Пример 1. Пусть $G = gr(c, d)$ — AT_Ω-группа, над последовательностью $\Omega = (5, 105, \ldots)$ $d = (f, a^{15}, a^{21}, a^{35}, 1)$.

Пусть $\alpha * 15 + \beta * 21 + \gamma * 35 = 1$ (значения α, β, γ находить не будем, пример иллюстрирует технику вычислений в AT-группах), тогда, чтобы получить на нулевой координате порождающий a 1-срезки G_1, нужно выполнить следующие вычисления:

$$h = (cdc^{-1})^\alpha * (c^2dc^{-2})^\beta * (c^3dc^{-3})^\gamma$$

$$= (a^{15}, a^{21}, a^{35}, 1, f)^\alpha * (a^{21}, a^{35}, 1, f, a^{15})^\beta * (a^{35}, 1, f, a^{15}, a^{21})^\gamma$$

$$= (a, a^{21\alpha+35\beta}, a^{15\alpha} f^\gamma, f^\beta a^{21\gamma}, f^\alpha a^{15\beta+21\gamma}).$$

После этого нужно использовать коммутаторные тождества, чтобы по нулевой координате получить коммутатор $[f, a]$. Например, вычислив коммутатор $[d, f]$. Далее, для нахождения костабилизатора можно применять технику [9, гл. 2]. □

Но в самом важном для теории p-групп случае ситуация намного лучше.

Пример 2. Пусть $G = gr(c, d)$ — AT_Ω-группа, $\Omega = (p^s, p^t, \ldots)$, где p — простое число, $s, t, \ldots$ — натуральные числа. Пусть $d = (f, \ldots, a^{v_i}, \ldots)$, где $i = 1, 2, \ldots, p^s - 1, v_i \in \mathbb{Z}_{p^t}$. В силу леммы 1 один из показателей степени v_i будет порождающим группы $\mathbb{Z}_{p^t}$. Не теряя общности можем считать, что $v_i = 1$. Рассмотрим коммутатор $[d, c^i dc^{-i}] = ([d, c], 1, \ldots, 1, \underbrace{[c^{v-i}, d]}, 1, \ldots, 1)$, выделенная координата имеет номер i. Затем, используя стандартные для AT_ω-групп рассуждения [9, гл. 2], мы получим, что костабилизатор $cost_G(1)$ изоморфен или прямому произведению коммутантов $[G_1, G_1]$ 1-срезки, или вторым централам $[[G_1, G_1], G_1]$. □

И еще один пример с вычислением костабилизатора.

Пример 3. Пусть $G = gr(c, d)$ — регулярная АТ-группа над последовательностью $A = (\mathbb{Z}_{15}, \mathbb{Z}_{15} \ldots)$, $d := (d, c, c^{-1}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Тогда G — $\{3, 5\}$-группа, а ее костабилизатор $cost((0)) = ([G_1, G_1], 1, \ldots, 1)$ совпадает с коммутантом 1-срезки.

Для краткости записи продольных порождающих мы используем компьютерную нотацию, где левая часть равенства не равна правой, ей присваивается значение правой. То есть имеет место цикл: структура циклически повторяется, воспроизводится — все n-срезки, как абстрактные группы, отождествляются. Как группы, действующие на дереве, они разные, поскольку действуют на разные части дерева, но как группы они изоморфны и даже как группы перестановок изоморфны, т. е. действуют на изоморфных объектах, в нашем случае — на поддеревьях, изоморфных исходному дереву.

Доказательство. Так как $\chi(d) = ((0, 0, 0), (0, 0, 0), \ldots)$, то в силу теоремы 7 группа G периодическая.

Рассмотрим коммутатор $[d, (c^2dc^{-2})^{-1}] = ([d, c], 1, \ldots, 1)$. Поскольку $st_G((0))$ индуцирует на нулевой координате 1-срезку G_1, то мы получим нормальное замыкание коммутатора $[d, c]$ в группе G_1, а это и есть коммутант группы G_1. □

3. АТ-подгруппы, внутренние деревья и внутренние АТ-группы, элементарные АТ-группы

Приведем пример отрицательного решения вопроса 16.79 из [10].

Пример 4. Пусть $G = gr(c, d)$ — регулярная АТ-группа над последовательностью $A = (\mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{10} \ldots), d := (d, 1, c, 1, c^{-1}, 1, 1, 1, 1, 1)$. Тогда $|c| = |d| = 10$, G — $\{2, 5\}$-группа, а ее подгруппа $F = gr(c^2, d^2)$ — бесконечная 5-группа.

Доказательство. Прежде всего группа G периодическая, так как все координаты хэша ее продольного порождающего d состоят из одних нулей.

Несмотря на то что последовательность $\Omega = (10, 10, \ldots)$ состоит из четных чисел, $cost((2)) = [G_1, G_1]$, т. е. совпадает с коммутантом 1-срезки. В самом деле, рассмотрим коммутатор

$$[d, c^2dc^{-2}] = ([d, 1], [1, 1], [c, d], [1, 1], [c^{-1}, c], [1, 1], [1, c^{-1}], [1, 1], [1, 1], [1, 1]) = (1, 1, [c, d], 1, \ldots, 1).$$

Поскольку $st_G(1)$ индуцирует на всех поддеревьях 1-го слоя 1-срезку G_1, то на координате (2) мы имеем нормальное замыкание коммутатора $[c, d]$ в группе G_1. Так как группа $G_1 = gr(c.d)$, то это нормальное замыкание совпадает с коммутантом $[G_1, G_1]$.

Если в исходном дереве выделить поддерево с четными вершинами, то оно будет изоморфно дереву $(5, 5, \ldots)$ и на нем будет действовать группа $F = gr(c^2, d^2) = gr(a, f)$. На языке 5-дерева $f := (f, a, a^{-1}, 1, 1)$.

Это AT_ω-группа, все хэши ее продольного порождающего нулевые, значит, она 5-группа. □

В чем же главное отличие от случая AT_ω-групп? В том, что у циклической группы составного порядка есть собственные подгруппы.

Определение 14. Подгруппа H АТ-группы G над деревом T называется АТ-подгруппой, если она АТ-группа над деревом T.

В примере 4 подгруппа F является АТ-группой над 5-деревом, но не АТ-группой над 10-деревом и, значит, не АТ-подгруппой.

Определение 15. Подгруппу АТ-группы, являющуюся АТ-группой, но не АТ-подгруппой, назовем внутренней АТ-группой.

Отметим, что в классе AT_ω-групп все подгруппы, являющиеся АТ-группами являются и АТ-подгруппами, т. е. внутренних АТ-групп у них нет. Это отличие и стало причиной отрицательного ответа на вопрос 16.79 в классе AT_Ω-групп.

Определение 16. АТ-группа называется элементарной АТ-группой, если в ней нет внутренних АТ-групп.

Такой группой является группа из примера 3. Внутренние АТ-группы у нее есть, но все они единичные.

Определение 17. Пусть $A = (A_0, A_1, \ldots)$ — последовательность периодических групп, $B = (B_0, B_1, \ldots)$ — последовательность их собственных подгрупп, тогда слойно (сферически) однородное дерево T_B называется внутренним поддеревом слойно однородного дерева T_A и обозначается через $T_B \le T_A$.

Следующее утверждение сразу следует из определений, используемых в его формулировке.

Утверждение 2. *Пусть $A = (A_0, A_1, \ldots)$ — последовательность периодических групп, $\pi(A) = (\pi(A_1), \pi(A_2), \ldots)$ — последовательность множеств простых порядков элементов этих групп. Пусть далее $W(A) = \{\omega \mid \omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots), \omega_i \in \pi(A_i), i \in \mathbb{N}\}$ — всевозможные ω последовательности. (Отметим, что если $A = \omega$, то $W(\omega) = \{\omega\}$; это подчеркивает элементарность AT_ω-групп.) Тогда для любого $\omega \in W$ имеем $T_\omega \le T_A$.* □

Опишем на языке сопровождающих перестановок элементарные AT_Ω-группы.

Утверждение 3. *Если AT_Ω-группа $G^{(0)} = gr(c, D^{(0)})$ является элементарной АТ-группой, то у любого продольного порождающего $d \in gr(D^{(0)})$ n-е сопровождающие перестановки только тогда могут быть не тождественными, когда номер координаты, на которой они расположены, взаимно прост с числом Ω_n.*

Доказательство. Из определения продольных порождающих следует, что на координатах, пронумерованных любой собственной погруппой группы $\mathbb{Z}_{\Omega_n}$, расположены только тождественные перестановки. Значит, на всех внутренних поддеревьях будут индуцированы единичные группы. □

Утверждение 4. *Если регулярная АТ-группа G является элементарной АТ-группой, то она принадлежит классу AT_Ω-групп.*

Доказательство. Если некоторая сопровождающая группа перестановок группы G не циклическая, то в ней есть хотя бы две не вложенные друг в друга циклические подгруппы. Используя любую из них, можно построить внутреннюю АТ-группу, и хотя бы одна из них не будет единичной (иначе вся АТ-группа будет единичной). □

Эта несложное утверждение важно. Оно говорит, о том, что существующую технику (линейную алгебру над полями Галуа) можно эффективно применять только в классе AT_Ω-групп.

Ниже поясняется, почему AT_ω-группы присутствуют, как кирпичики, во всех регулярных АТ-группах над последовательностью периодических групп и даже произвольных АТ-группах над последовательностью периодических групп перестановок.

Подгруппами АТ-группы G над последовательностью A могут быть AT_ω-группы для некоторых (а может и для всех) $\omega \in W(A)$. Какие именно — вопрос, зависящий от конкретной АТ-группы G.

Изучение внутренних AT_ω-групп и AT_Ω-групп вполне — реальный путь изучения произвольной АТ-группы G над последовательностью периодических групп.

Теорема 6 и следствие подтверждают это, потому что проверка периодичности элемента АТ-группа — это движение вдоль нитей, а нити построены по циклическим группам. То есть в процессе доказательства периодичности мы строим внутреннюю AT_Ω-группу.

Утверждение 5. *При возведении в степень, для перехода на поддеревья, элемента вида dc, где d — корневой, а c — корневой порождающий регулярной AT-группы, мы создаем внутреннюю AT-подгруппу, являющуюся AT_Ω-группой над последовательностью циклических групп $C, C', C'', \ldots$.*

Доказательство. Следует из определения хэша AT-группы над последовательностью конечных абелевых групп и соответствующей нити. □

В случае, если AT-группа G не является регулярной, т. е. последовательность A состоит из множеств без групповой структуры, для изучения группы G также можно применить внутренние AT_ω-группы.

Пусть $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \ldots)$ — сопровождающие группы перестановок AT-группы G. Пусть все сопровождающие группы периодические. По аналогии с утверждением находим последовательность множеств $\pi(\Pi) = (\pi(\Pi_1), \pi(\Pi_2), \ldots)$ и множество омега-последовательностей

$$W(\Pi) = \{\omega \mid \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots),\, \omega_i \in \pi(\Pi_i),\, i \in \mathbb{N}\}.$$

Отличие от регулярного случая состоит в следующем.

При построении внутреннего поддерева дерева T_A мы будем использовать сопровождающие перестановки простого порядка p. Эти перестановки будут произведением одного или нескольких циклов длины p. Выбрать мы можем любой из этих циклов и элементы именно этого цикла взять в качестве вершин данного слоя слойно однородного дерева.

Поэтому по одной ω последовательности простых чисел может быть построено несколько, а может быть даже и бесконечно много, разных внутренних поддеревьев.

Конечно, они будут изоморфны, но задействованы будут разные ребра и разные вершины исходного дерева.

Это универсальный план исследования AT-групп.

4. Вопросы для "часа проблем"

Вопрос 1. В работе [7] построена конечно порожденная периодическая группа с произвольным кручением.

а) Существует ли 2-порожденная периодическая группа, в которую вложена любая конечная группа?

б) Существует ли такая группа в классе AT-групп над последовательностью конечных групп или множеств?

Вопрос 2. Вычислить факторы нижнего центрального ряда:

а) 3-группы Гупты [5] $G = gr(c, d)$ с продольным порождающим $d := (d, c, c^{-1})$;

б) непериодический аналог группы Гупты $F = gr(c, f)$ с продольным порождающим $f := (f, c, 1)$.

Вопрос 3. Существует ли 2-порожденная -группа Голода с тривиальным центром, в которую вложена любая конечная p-группа.

Вопрос 4. В работе А. В. Рожкова "Условия конечности в группах автоморфизмов деревьев" (Алгебра и логика, 1998, Т. 37, № 5, С. 568–605) построена p-группа с очень медленным ростом периодов элементов (меньше суперпозиции любого числа логарифмов). Найти функцию роста этой группы. Возможно, эта группа является ответом на вопросы 9.9 и 15.16 Коуровской тетради.

Заключение

1. Для теории бернсайдовых групп наибольший интерес представляют периодические AT-группы. Поэтому в силу теоремы о спрямлении, которая утверждает, что спрямление не

влияет на периодичность, все продольные порождающие AT-групп можно брать с одним и тем же направляющим путем. Например, с путем по нейтральным элементам сопровождающих групп $\gamma_e = (e_0, e_1, e_2, \ldots)$

2. В классе бернсайдовых групп наибольший интерес представляют p-группы. Поэтому в силу решения вопроса 16.79 в классе AT_ω-групп можно ограничиться последовательностями вида $\omega = (p, p, p, \ldots)$, а в классе AT_Ω-групп последовательностями — вида $\Omega = (p^k, p^l, p^s, \ldots)$.

3. При изучении периодических AT-групп все сводится к регулярным AT-группам над последовательностью циклических групп произвольных конечных порядков. А чтобы изучить эти группы, нужны регулярные AT-группы над последовательностью циклических групп простого порядка. То есть класс AT_Ω-групп аппроксимирует все периодические AT-группы. И если мы интересуемся только бернсайдовыми группами, то мы можем ограничиться этим классом.

4. При всем многообразии параметров, не ограниченных даже мощностью несущего множества, конструкция AT-групп оказалась очень жесткой. Попытки формализовать AT-группы, т. е. описать их формальные свойства без привязки их к реализации как групп автоморфизмов деревьев,скорее всего, безнадежны. Попытки вычленить AT-группы абстрактно сведутся, возможно, к явному описанию AT-групп.

5. Возможно AT-группы и группы Голода — два очень разных направления развития ф.а. бернсайдовых групп неограниченного периода. И, более того, это всего два из очень многих направлений теории ф.а. бернсайдовых групп неограниченного периода.

6. Для построения новых примеров p-групп с необычными свойствами конечности перспективным представляются регулярные AT-группы над последовательностью p-групп (не обязательно конечных), в том числе над последовательностью AT-групп, являющихся p-группами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Голод Е.С.** О ниль-алгебрах и финитно аппроксимируемых группах // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1964. Т. 28, № 2. С. 273–276.
2. **Алешин С.В.** Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Мат. заметки. 1972. Т. 11, № 3. С. 319–328.
3. **Сущанский В.И.** Периодические p-группы подстановок и неограниченная проблема Бернсайда // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 3. С. 561–565.
4. **Григорчук Р.И.** К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функц. анализ и его приложения. 1980. Т. 14, № 1. С. 53–54.
5. **Gupta N., Sidki S.** Some infinite p-groups // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 5. С. 584–589.
6. **Мерзляков Ю.И.** О бесконечных конечно-порожденных периодических группах // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 4. С. 803–805.
7. **Рожков А.В.** К теории групп алешинского типа // Мат. заметки. 1986. Т. 40, № 5. С. 572–589.
8. **Григорчук Р.И.** Степени роста конечно-порожденных групп и инвариантное среднее // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1984. Т. 48, № 5. С. 572–589.
9. **Рожков А.В.** Условия конечности в группах автоморфизмов деревьев: дис. . . . док. физ.-мат. наук / Красноярск. гос. ун-т. Красноярск, 1997. 230 с.
10. **Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь.** Изд. 18-е, допол. / ред. В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро. Новосибирск: Институт математики, 2014. 254 с.
11. **Григорчук Р.И.** Ветвящиеся группы // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 6. С. 852–858.

Поступила 9.11.2021
После доработки 18.01.2022
Принята к публикации 24.01.2022

Рожков Александр Викторович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор Кубанского государственного университета
г. Краснодар
e-mail: ros@math.kubsu.ru

REFERENCES

1. Golod E.S. On nil-algebras and finitely approximable p-groups. In: *Fourteen papers on logic, algebra, complex variables and topology*, AMS Translations: Ser. 2, 1965, vol. 48, pp. 103–106. doi: 10.1090/trans2/048/06 .
2. Aleshin S.V. Finite automata and Burnside's problem for periodic groups. *Math. Notes*, 1972, vol. 11, no. 3, pp. 199–203. doi: 10.1007/BF01098526 .
3. Sushchansky V.I. Periodic p-groups of permutations and the unrestricted Burnside problem. *Sov. Math., Dokl.*, 1979, vol. 20, pp. 766–770.
4. Grigorchuk R.I. Burnside's problem on periodic groups. *Funct. Anal. Appl.*, 1980, vol. 14, no. 1, pp. 41–43. doi: 10.1007/BF01078416 .
5. Gupta N., Sidki S. Some infinite p-groups. *Algebra Logika*, 1983, vol. 22, no. 5, pp. 584–589.
6. Merzlyakov Yu.I. On infinite finitely generated periodic groups. *Sov. Math., Dokl.*, 1983, vol. 27, pp. 169–172.
7. Rozhkov A.V. Theory of Aleshin type groups. *Math. Notes*, 1986, vol. 40, no. 5, pp. 827–836. doi: 10.1007/BF01159699 .
8. Grigorchuk R.I. Degrees of growth of finitely generated groups, and the theory of invariant means. *Math. USSR-Izv.*, 1985, vol. 25, no. 2, pp. 259–300. doi: 10.1070/IM1985v025n02ABEH001281 .
9. Rozhkov A.V. *Usloviya konechnosti v gruppakh avtomorfizmov derev'ev* [Finiteness conditions in groups of tree automorphisms]. Doctor Sci. (Phys.–Math.) Dissertation, Krasnoyarsk: Kranoyarsk. Gos. Univ., 1997, 230 p.
10. *Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook.* No. 18, eds. V. D. Mazurov and E. I. Khukhro, Novosibirsk: Inst. Math. SO RAN Publ., 2014, 228 p. Available on: https://arxiv.org/pdf/1401.0300v10.pdf .
11. Grigorchuk R.I. Branch groups. *Math. Notes*, 2000, vol. 67, no. 6, pp. 718–723. doi: 10.1007/BF02675625 .

Received November 11, 2021
Revised January 18, 2021
Accepted January 24, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Scholarship Program of the Vladimir Potanin Foundation.

Alexander Vicktorovich Rozhkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Kuban State University, Krasnodar, 350040 Russia, e-mail: ros@math.kubsu.ru .

Cite this article as: A. V. Rozhkov. AT-groups that are not AT-subgroups: Transition from AT_ω-groups to AT_Ω-groups, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 218–231 .