ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 1 2022

УДК 519.17

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ ДИАМЕТРА 4[1]

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 4 граф $\Delta = \Gamma_{1,2}$ может быть сильно регулярным. В этом случае граф $\Gamma_{3,4}$ является сильно регулярным, дополнительным к Δ. Нахождение массива пересечений графа Γ по параметрам графа $\Gamma_{3,4}$ является обратной задачей. В данной работе решена обратная задача в случае антиподального графа Γ диаметра 4. Здесь $r = 2$ и $\Gamma_{3,4}$ — сильно регулярный граф без треугольников. Далее, Γ является $AT4(p,q,r)$-графом только в случае $q = p + 2, r = 2$. Ранее авторы доказали, что $AT4(p,p+2,2)$-граф не существует. Графом Крейна назовем сильно регулярный граф без треугольников для которого достигается равенство в границе Крейна (равносильно, $q_{22}^2 = 0$). Граф Крейна $\mathrm{Kre}(r)$ со вторым собственным значением r имеет параметры $((r^2+3r)^2, r^3+3r^2+r, 0, r^2+r)$. Для графа $\mathrm{Kre}(r)$ антиокрестность вершины сильно регулярна с параметрами $((r^2+2r-1)(r^2+3r+1), r^3+2r^2, 0, r^2)$ и пересечение антиокрестностей двух смежных вершин сильно регулярно с параметрами $((r^2+2r)(r^2+2r-1), r^3+r^2-r, 0, r^2-r)$. Пусть Γ — антиподальный граф диаметра 4 и $\Delta = \Gamma_{3,4}$ — сильно регулярный граф без треугольников. В работе доказано, что Δ не может быть графом с параметрами $((r^2+2r-1)(r^2+3r+1), r^3+2r^2, 0, r^2)$, а если Δ — граф с параметрами $((r^2+2r)(r^2+2r-1), r^3+r^2-r, 0, r^2-r)$, то $r > 3$. Затем доказано, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{32, 27, 12(r-1)/r, 1; 1, 12/r, 27, 32\}$ существует только при $r = 3$, а для графа с массивом $\{96, 75, 32(r-1)/r, 1; 1, 32/r, 75, 96\}$ имеем $r = 2$.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, антиподальный граф, граф Γ с сильно регулярным графом $\Gamma_{i,j}$.

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. Inverse problems in the class of distance-regular graphs of diameter 4.

For a distance-regular graph Γ of diameter 4, the graph $\Delta = \Gamma_{1,2}$ can be strongly regular. In this case, the graph $\Gamma_{3,4}$ is strongly regular and complementary to Δ. Finding the intersection array of Γ from the parameters of $\Gamma_{3,4}$ is an inverse problem. In the present paper, the inverse problem is solved in the case of an antipodal graph Γ of diameter 4. In this case, $r = 2$ and $\Gamma_{3,4}$ is a strongly regular graph without triangles. Further, Γ is an $AT4(p,q,r)$-graph only in the case $q = p+2$ and $r = 2$. Earlier the authors proved that an $AT4(p,p+2,2)$-graph does not exist. A Krein graph is a strongly regular graph without triangles for which the equality in the Krein bound is attained (equivalently, $q_{22}^2 = 0$). A Krein graph $\mathrm{Kre}(r)$ with the second eigenvalue r has parameters $((r^2+3r)^2, r^3+3r^2+r, 0, r^2+r)$. For the graph $\mathrm{Kre}(r)$, the antineighborhood of a vertex is strongly regular with parameters $((r^2+2r-1)(r^2+3r+1), r^3+2r^2, 0, r^2)$ and the intersection of the antineighborhoods of two adjacent vertices is strongly regularly with parameters $((r^2+2r)(r^2+2r-1), r^3+r^2-r, 0, r^2-r)$. Let Γ be an antipodal graph of diameter 4, and let $\Delta = \Gamma_{3,4}$ be a strongly regular graph without triangles. In this paper it is proved that Δ cannot be a graph with parameters $((r^2+2r-1)(r^2+3r+1), r^3+2r^2, 0, r^2)$, and, if Δ is a graph with parameters $((r^2+2r)(r^2+2r-1), r^3+r^2-r, 0, r^2-r)$, then $r > 3$. It is proved that a distance-regular graph with intersection array $\{32, 27, 12(r-1)/r, 1; 1, 12/r, 27, 32\}$ exists only for $r = 3$, and, for a graph with array $\{96, 75, 32(r-1)/r, 1; 1, 32/r, 75, 96\}$, we have $r = 2$.

Keywords: distance-regular graph, antipodal graph, graph Γ with strongly regular graph $\Gamma_{i,j}$.

MSC: 05E30, 05C50

DOI 10.21538/0134-4889-2022-28-1-199-208

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований-ГФЕН Китая (проект № 20-51-53013).

от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i (см. [1]). Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Графом Тейлора называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Для $i \in \{1, 2, 3, \ldots, d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ, и две вершины u, w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u,w) = i$. Граф $\Gamma_{i,j}$ определен на множестве вершин графа Γ, и две вершины u, w смежны в $\Gamma_{i,j}$ тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u,w) \in \{i,j\}$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$ и $\theta_0 > \theta_1 > \ldots > \theta_d$ — собственные значения Γ. По [2] выполняется фундаментальная граница

$$\Big(\theta_1 + \frac{k}{a_1+1}\Big)\Big(\theta_d + \frac{k}{a_1+1}\Big) \geq -\frac{ka_1b_1}{(a_1+1)^2}.$$

Положим

$$b^+ = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_d}, \quad b^- = -1 - \frac{b_1}{1+1+\theta_1}.$$

Недвудольный граф, для которого достигается равенство в фундаментальной границе, называется плотным. Окрестность любой вершины в плотном графе сильно регулярна с собственными значениями a_1, b^+, b^-. Хорошо известно (см., например, [2, теорема 3.2]), что плотный граф диаметра 3 — это граф Тейлора. В данном случае окрестность любой вершины есть граф без треугольников или сильно регулярный граф с $k' = 2\mu'$.

Пусть Γ — антиподальный граф диаметра 4. Тогда по [1, предложение 4.2.2] Γ имеет массив пересечений $\{k, k-a_1-1, (r-1)c_2, 1; 1, c_2, k-a_1-1, k\}$. По [2] граф Γ является плотным тогда и только тогда, когда $q^4_{11} = 0$. Если Γ — плотный граф с окрестностью вершины, имеющей неглавные собственные значения $p = b^+, -q = b^-$, то все параметры Γ выражаются через p, q, r. В этом случае назовем Γ *антиподальным плотным графом диаметра* 4 *с параметрами* p, q, r ($AT4(p,q,r)$-графом). В $AT4(p,q,r)$-графе окрестности вершин сильно регулярны с неглавным собственным значением $p = \mu$.

Прямой задачей в теории дистанционно регулярных графов является нахождение параметров симметричной структуры, отвечающей графу с данным массивом пересечений, по этому массиву. Обратная задача — восстановление массива пересечений дистанционно регулярного графа по параметрам отвечающей ему симметричной структуры.

Например, если для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_3 сильно регулярен, то по [3, лемма 3] граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$. Обратно, для графа $\bar\Gamma_3$, являющегося псевдогеометрическим для $pG_\alpha(k,t)$, граф Γ имеет массив пересечений $\{k, tc_2, k-\alpha+1; 1, c_2, \alpha\}$, где $k > tc_2 \geq k-\alpha+1$, $c_2 \leq \alpha$.

Для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 4 граф $\Delta = \Gamma_{1,2}$ может быть сильно регулярным. В этом случае граф $\Gamma_{3,4}$ — сильно регулярный, дополнительный к Δ.

В работе мы изучаем параметры сильно регулярных графов $\Gamma_{3,4}$ для дистанционно регулярных графов Γ диаметра 4. Обратно, по параметрам сильно регулярного графа $\Gamma_{3,4}$ находим возможные массивы пересечений дистанционно регулярного графа Γ диаметра 4.

Известны следующие небольшие примеры примитивных графов.

1. Нечетный граф O_9 с массивом пересечений $\{5,4,4,3;1,1,2,2\}$ и спектром $5^1, 3^{27}, 1^{42}, -2^{48}, -4^8$, $v = 1+5+20+40+60 = 126$, $\Gamma_{3,4}$ — сильно регулярный граф с параметрами $(126, 100, 78, 84)$.

2. Свернутый 9-куб с массивом пересечений $\{9,8,7,6;1,2,3,4\}$ и спектром $9^1, 5^{36}, 1^{126}, -3^{84}, -7^9$, $v = 1+9+36+84+126 = 256$, $\Gamma_{3,4}$ — сильно регулярный граф с параметрами $(256, 210, 170, 182)$.

3. Дуально полярный граф с массивом пересечений $\{30,28,24,16;1,3,7,15\}$ и спектром $30^1, 13^{135}, 3^{1190}, -5^{918}, -15^{51}$, $v = 1+30+280+960+1024 = 2295$, $\Gamma_{3,4}$ — сильно регулярный граф с параметрами $(2295,1984,1708,1860)$.

Прямая задача для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 4 решена в [1, предложение 4.2.18].

Выпишем список параметров сильно регулярных графов $\Delta = \Gamma_{3,4}$ для допустимых массивов пересечений антиподальных графов Γ диаметра 4 из [1, p. 421–425].

Для графа с массивом пересечений $\{20,18,3,1;1,3,18,20\}$ параметры Δ равны $(162,21,0,3)$.

Для массива пересечений $\{25,24,2,1;1,2,24,25\}$ параметры Δ равны $(352,26,0,2)$.

Для графа с массивом пересечений $\{32,27,6,1;1,6,27,32\}$ параметры Δ равны $(210,33,0,6)$.

Для массива пересечений $\{36,35,2,1;1,2,35,36\}$ параметры Δ равны $(704,37,0,2)$.

Для графа с массивом пересечений $\{45,40,6,1;1,6,40,45\}$ параметры Δ равны $(392,46,0,6)$.

Для массива пересечений $\{49,48,2,1;1,2,48,49\}$ параметры Δ равны $(1276,50,0,2)$.

Для графа с массивом пересечений $\{54,50,5,1;1,5,50,54\}$ параметры Δ равны $(650,55,0,5)$.

Для массива пересечений $\{56,45,12,1;1,12,45,56\}$ параметры Δ равны $(324,57,0,12)$.

Для графа с массивом пересечений $\{75,64,12,1;1,12,64,75\}$ параметры Δ равны $(552,76,0,12)$. Для массива пересечений $\{77,72,6,1;1,6,72,77\}$ параметры Δ равны $(1080,78,0,6)$.

Имеется единственный двудольный антиподальный граф Γ диаметра 4 с сильно регулярным графом $\Gamma_{3,4}$ (см. [1, p. 425]): это 4-куб с массивом пересечений $\{4,3,2,1;1,2,3,4\}$ и спектром $4^1, 2^4, 0^6, -2^4, -4^1$, $v = 1+4+6+4+1 = 16$, $\Gamma_{3,4}$ — сильно регулярный граф с параметрами $(16,5,0,2)$.

Теорема 1 (кроме последнего утверждения) — это уточнение предложения 4.2.18 из [1] для графов диаметра 4.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* 4. *Граф* $\Delta = \Gamma_{1,2}$ *сильно регулярен тогда и только тогда, когда* $b_2 + c_3 = k+1$ *и* $b_3 + c_4 = b_1 + \mu$. *В этом случае* $b_0 + k_2 = k(\Delta)$, $b_1 b_2 = b_1(\Delta)\mu$, $c_3 c_4 = c_2(\Delta)\mu$ *и* Δ *не является графом в половинном случае.*

Мы существенно уточняем обратную задачу для антиподальных графов диаметра 4 в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра* 4 *с сильно регулярным графом* $\Sigma = \Gamma_{3,4}$. *Тогда* $\lambda(\Sigma) = 0$, $b_0 = k(\Sigma) - 1$, $c_2 = a_1 + 2 = \mu(\Sigma)$ *и* $b_1 = k(\Sigma) - \mu(\Sigma)$.

Графом Крейна назовем сильно регулярный граф без треугольников, для которого достигается равенство в границе Крейна (равносильно, $q^2_{22} = 0$). Граф Крейна $\mathrm{Kre}(r)$ со вторым собственным значением r имеет параметры $((r^2+3r)^2, r^3+3r^2+r, 0, r^2+r)$. Для графа $\mathrm{Kre}(r)$ антиокрестность вершины сильно регулярна с параметрами $((r^2+2r-1)(r^2+3r+1), r^3+2r^2, 0, r^2)$ и пересечение антиокрестностей двух смежных вершин является сильно регулярным графом с $((r^2+2r)(r^2+2r-1), r^3+r^2-r, 0, r^2-r)$.

Теорема 3. *Пусть* Γ *— антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра* 4 *с сильно регулярным графом* $\Sigma = \Gamma_{3,4}$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* Σ *— граф Крейна* $\mathrm{Kre}(r)$, *то* $r = 1$ *и* Γ *является* 4*-кубом*;

(2) *если* Σ *— граф с параметрами антиокрестности вершины в графе Крейна* $\mathrm{Kre}(r)$, *то граф* Γ *не существует*;

(3) *если* Σ *— граф с параметрами пересечения антиокрестностей двух смежных вершин графа Крейна* $\mathrm{Kre}(r)$, *то* $r > 3$.

В классе антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 4 имеются графы с собственным значением θ кратности m, меньшей k, и $\theta + 1$, делящим b_1. Пусть u — вершина графа Γ, $\Omega = [u]$, $b^+ = b_1/(\theta_1+1)$, $b^- = b_1/(\theta_4+1)$. Тогда $\theta \in \{\theta_1, \theta_4\}$, граф Ω имеет наименьшее собственное значение, не меньшее $-1-b^{+}$, и второе собственное значение, не большее $-1-b^{-}$, причем кратность $b_1/(\theta+1)$ не меньше $k-m$.

В работе изучаются некоторые графы Γ из этого класса. Если $\theta=\theta_4$ и $b^{-}=-3$, то граф Ω имеет собственное значение $-1-b^{-}=2$ кратности, не меньшей $k-m$.

Теорема 4. *Пусть Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4 с индексом антиподальности r. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если граф Γ с массивом пересечений $\{32, 27, 12(r-1)/r, 1; 1, 12/r, 27, 32\}$ существует, то $r=3$*;

(2) *граф Γ с массивом пересечений $\{56, 45, 24(r-1)/r, 1; 1, 24/r, 45, 56\}$ существует только в случае $r=3$*;

(3) *если граф Γ с массивом пересечений $\{96, 75, 32(r-1)/r, 1; 1, 32/r, 75, 96\}$ существует, то $r=2$, Γ не является локально $GQ(5,3)$-графом и группа $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует интранзитивно на множестве антиподальных классов графа Γ.*

Единственность дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{32, 27, 12(r-1)/r, 1; 1, 12/r, 27, 32\}$ для $r=3$ доказана в [4].

1. Предварительные результаты

Пусть Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4, $k=\theta_0>\theta_1>\ldots>\theta_4$ — собственные значения графа Γ, u — вершина графа Γ, $\Omega=[u]$, $b^{+}=b_1/(\theta_1+1)$, $b^{-}=b_1/(\theta_4+1)$.

Лемма 1.1. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *граф Ω имеет наименьшее собственное значение, не меньшее $-1-b^{+}$, и второе собственное значение, не большее $-1-b^{-}$;*

(2) *если кратность m_i собственного значения θ_i меньше k, то $i\in\{1,4\}$, для $b=b_1/(\theta_i+1)$ граф Ω имеет собственное значение $-1-b$ кратности по крайней мере $k-m_i$ и либо θ_i+1 делит b_1, либо θ_1,θ_4 — сопряженные алгебраические целые числа, делящие b_1;*

(3) *связный граф с наибольшим собственным значением 2 является одним из следующих графов (число его вершин на 1 больше индекса): $\tilde{A}_n$ $(n\geq 2)$, $\tilde{D}_n$, $(n\geq 4)$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$; более того, каждый связный граф с наибольшим собственным значением, меньшим 2, является подграфом одного из указанных графов.*

Доказательство. Утверждение (1) следует из теоремы 4.4.3 [1]. Утверждение (2) — это следствие теоремы 4.4.4 из [1]. Утверждение (3) получаем из теоремы 3.2.5 [1].

Докажем теперь последнее утверждение теоремы 1.

Лемма 1.2. *Если Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 4, то $\Gamma_{1,2}$ не является графом в половинном случае.*

Доказательство. Допустим, что $\Delta=\Gamma_{1,2}$ — сильно регулярный граф с параметрами $(4\mu+1, 2\mu, \mu-1, \mu)$.

По теореме 1 имеем $k+k_2=k_3+k_4=2\mu$, $\mu=c_3=b_1b_2/c_2$ и $b_2+c_3=k+1$; противоречие с тем, что $c_3\leq k$, $k+k_2=2\mu$, и по теореме Ноймайера Γ — многоугольник или граф Тейлора.□

Теорема 1 доказана. □

2. Случай антиподального графа Γ

В этом разделе предполагается, что Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4 и граф $\Sigma=\Gamma_{3,4}$ сильно регулярен.

Лемма 2.1. *Верны равенства* $r = 2$, $\lambda(\Sigma) = 0$, $k = k(\Sigma) - 1$, $c_2 = a_1 + 2 = \mu(\Sigma)$ *и* $b_1 = k(\Sigma) - \mu(\Sigma)$.

Доказательство. Антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4 имеет массив пересечений $\{k, b_1, (r-1)c_2, 1; 1, c_2, b_1, k\}$. Ввиду равенств $b_2 + c_3 = k + 1$ и $b_3 + c_4 = b_1 + c_2$ получаем $r = 2$. Теперь вершины из $\Sigma(a)$ находятся на расстоянии 1 или 2 в Γ, поэтому $\lambda(\Sigma) = 0$.

Далее, $k = k(\Sigma) - 1$. Для вершин a, a^* на расстоянии 4 и $b \in \Gamma_2(a)$ имеем $\mu(\Sigma) = |\Sigma(a) \cap \Sigma(b)| = |[a^*] \cap [b]| = c_2$. Если же $b \in \Gamma(a)$, то $\mu(\Sigma) = |\Sigma(a) \cap \Sigma(b)| = |(a^*)^\perp \cap (b^*)^\perp| = a_1 + 2$.

Наконец, $k + k_2 = v - k(\Sigma) - 1 = k(\Sigma)(k(\Sigma)-1)/\mu(\Sigma)$ и $k(1 + b_1/c_2) = kk(\Sigma)/\mu(\Sigma)$. Поэтому $b_1/c_2 = k(\Sigma)/\mu(\Sigma) - 1$ и $b_1 = k(\Sigma) - \mu(\Sigma)$. □

Из леммы 2.1 выводим теорему 2. □

В следующей лемме рассмотрены известные сильно регулярные графы без треугольников (графы Мура, графы с параметрами $(56, 10, 0, 2)$, $(77, 16, 0, 4)$ и графы Крейна с параметрами $((r^2+3r)^2, r^3+3r^2+r, 0, r^2+r)$).

Лемма 2.2. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) Σ *не является полным двудольным графом или графом Мура*;

(2) *если* Σ *— граф Крейна с параметрами* $((r^2+3r)^2, r^3+3r^2+r, 0, r^2+r)$, *то* Σ *имеет параметры* $(16, 5, 0, 2)$ *и* Γ *является* 4*-кубом*;

(3) Σ *не имеет параметры* $(56, 10, 0, 2)$ *или* $(77, 16, 0, 4)$.

Доказательство. Пусть Σ — полный двудольный граф. По лемме 2.1 получаем $b_1 = 0$; противоречие.

Пусть Σ — граф Мура. По лемме 2.1 граф Γ имеет массив пересечений $\{k-1, k-1, 1, 1; 1, 1, k-1, k-1\}$; противоречие.

Пусть Σ — граф Крейна. По лемме 2.1 граф Γ имеет массив пересечений $\{r^3+3r^2+r-1, r^3+2r^2-r, r^2+r, 1; 1, r^2+r, r^3+2r^2, r^3+3r^2+r-1\}$. Если $r = 1$, то заключение леммы выполняется.

Граф Крейна с параметрами $((r^2+3r)^2, r^3+3r^2+r, 0, r^2+r)$ не существует при $r = 3$ и $r = 4$ по [5; 6].

Пусть $r > 1$, и для вершины $x \in \Gamma$ через x^* обозначим антипод x в Γ. Тогда Γ является $AT4(r-1, r+1, 2)$-графом и не существует по [7].

Пусть $\Sigma = \Gamma_{3,4}$ имеет параметры $(56, 10, 0, 2)$. В силу леммы 2.1 граф Γ имеет массив пересечений $\{9, 8, 2, 1; 1, 2, 8, 9\}$; противоречие с тем, что параметр Крейна q^4_{44} отрицателен.

Пусть $\Sigma = \Gamma_{3,4}$ имеет параметры $(77, 16, 0, 4)$. По лемме 2.1 граф Γ имеет массив пересечений $\{15, 12, 4, 1; 1, 4, 12, 15\}$; противоречие с тем, что кратность собственного значения θ_4 не целая. □

Ввиду леммы 2.2 будем считать, что $\Gamma_{3,4}$ не является известным сильно регулярным графом без треугольников.

Лемма 2.3. *Выполняются следующие утверждения*: (1) *если* $\Sigma = \Gamma_{3,4}$ *— антиокрестность вершины в графе Крейна с параметрами* $((r^2+2r-1)(r^2+3r+1), r^3+2r^2, 0, r^2)$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{r^3+2r^2-1, r^3+r^2, r^2, 1; 1, r^2, r^3+r^2, r^3+2r^2-1\}$;

(2) *если* $\Sigma = \Gamma_{3,4}$ *— пересечение антиокрестностей двух смежных вершин в графе Крейна с параметрами* $((r^2+2r)(r^2+2r-1), r^3+r^2-r, 0, r^2-r)$, *то* $r > 2$, Γ *имеет массив пересечений* $\{r^3+r^2-r-1, r^3, r^2-r, 1; 1, r^2-r, r^3, r^3+r^2-r-1\}$ *и неглавные собственные значения* $r^2-1, r-1, -(r+1), -(r^2+1)$ *кратностей* $(r^2+2r-1)(r+2)/2, (r^2+2r-1)(r+1)r/2, (r^2+2r-1)(r+2)(r-1)/2, (r+2)(r+1)(r-1)/2$.

Доказательство. Все утверждения леммы (кроме собственных значений и их кратностей в (2)) следуют из лемм 2.1, 2.2.

Собственные значения графа из (2) и их кратности получаются с помощью пакета “Sage-drg” (см. [8]). □

Лемма 2.4. *Граф* $\Sigma = \Gamma_{3,4}$ *не может иметь параметры* $((r^2+2r-1)(r^2+3r+1), r^3+2r^2, 0, r^2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если граф $\Sigma = \Gamma_{3,4}$ имеет параметры $((r^2+2r-1)(r^2+3r+1), r^3+2r^2, 0, r^2)$, то Γ имеет массив пересечений $\{r^3+2r^2-1, r^3+r^2, r^2, 1; 1, r^2, r^3+r^2, r^3+2r^2-1\}$. В этом случае собственное значение θ_4 имеет кратность $(r^2+2r-1)(r^2+r-1)(r+1)/((r+2)2r)$; противоречие с тем, что $(r^2+2r-1, r+2) = 1$, $(r^2+r-1, r+2) = (r^2-4+r+2+1, r+2) = 1$ и $(r+1, r+2) = 1$. $\square$

Из лемм 2.3, 2.4 и теоремы 1 следует теорема 3. $\square$

3. Доказательство теоремы 4

В этом разделе мы докажем теорему 4. Сначала преположим, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{32, 27, 12(r-1)/r, 1; 1, 12/r, 27, 32\}$.

Лемма 3.1. *Пусть* u — *вершина графа* Γ, $\Omega = [u]$. *Тогда для любой вершины* $w \in \Omega$ *подграф* $\Omega(w)$ *изоморфен графу инцидентности аффинной плоскости* $AG(2,4)$ *с удаленным классом параллельных прямых и имеет спектр* $4^1, 2^{12}, 0^6, -2^{12}, -4^1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{32, 27, 12(r-1)/r, 1; 1, 12/r, 27, 32\}$ является r-накрытием единственного сильно регулярного графа с параметрами $(105, 32, 4, 16)$.

Пусть u — вершина графа Γ, $\Omega = [u]$, $b^+ = b_1/(\theta_1+1) = 3$, $b^- = b_1/(\theta_4+1) = -3$. Тогда Ω — регулярный граф степени 4 на 32 вершинах. По лемме 1.1 граф Ω имеет наименьшее собственное значение, не меньшее $-1-b^+ = -4$, и второе собственное значение, не большее $-1-b^- = 2$. Так как кратность собственного значения $\theta_4 = -10$ меньше k, то по лемме 1.2 граф Ω имеет собственное значение $-1-b^- = 2$ кратности, не меньшей $32-20 = 12$.

Пусть $w \in \Omega$. Тогда $\Omega(w)$ — граф на 4 вершинах с наибольшим собственным значением, не превосходящим 2. Ввиду леммы 1.1 либо степень графа $\Omega(w)$ не больше 1, либо $\Omega(w)$ — объединение изолированной вершины и треугольника, либо $\Omega(w)$ — четырехугольник. По структуре антиподального частного графа Γ граф $\Omega(w)$ является графом инцидентности аффинной плоскости $AG(2,4)$ с удаленным классом параллельных прямых и имеет спектр $\{4^1, 2^{12}, 0^6, -2^{12}, -4^1\}$. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть* $\{u = u_1, \dots, u_6\}$ — *антиподальный класс графа* Γ *из* $\Gamma_2(w)$, $[w] \cap [u_i] = \{y_i, z_i\}$ *и* X, Y — *доли двудольного подграфа* $[w]$. *Тогда* $Z = \{y_1, z_1, \dots, y_6, z_6\}$ *содержится в* X *или в* Y.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{u = u_1, \dots, u_6\}$ — антиподальный класс графа Γ, $w \in \Gamma_2(u)$. По лемме 3.1 граф $[w]$ двудольный. Отсюда $[w] \cap [u_i] = \{y_i, z_i\}$ и степень w в графе $\Gamma_2(u)$ равна 20. Пусть X, Y — доли двудольного подграфа $[w]$, $Z = \{y_1, z_1, \dots, y_6, z_6\}$. Тогда Z есть 12-коклика и без ограничения общности $|X \cap Z| \geq 6$.

Положим $Y \cap Z = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$. Если $t \geq 3$, то $[x_1] \cup [x_2] \cup [x_3]$ содержит не менее 9 вершин из $X - Z$ и $|X \cap Z| \leq 7$. В этом случае $[x_4]$ содержит еще одну вершину из $X - Z$ и $|X \cap Z| = 6$. Поэтому пара $(\{x_1, x_2, \dots, x_t\}, X - Z)$ является 2-(6,4,1) схемой; противоречие с тем, что число блоков равно 10 и $6r \neq 10 \cdot 4$, где r — число блоков, содержащих данную точку.

Если $t = 2$, то $[x_1] \cup [x_2]$ содержит не менее 7 вершин из $X - Z$; противоречие. Пусть $t = 1$, для определенности, $x_1 = z_6$. Тогда $X - Z$ содержит единственную вершину v, несмежную с x_1. Далее, каждая вершина из $[v] \cap Y$ смежна по крайней мере с 3 вершинами из $X \cap Z$. Противоречие с тем, что некоторая вершина из $X \cap Z$ смежна с двумя вершинами из $[v] \cap Y$.

Значит, $t = 0$ и для любого антиподального класса $\{v_1, \dots, v_6\}$ из $\Gamma_2(w)$ все подграфы $[w] \cap [v_i]$ лежат либо в X, либо в Y. $\square$

Так как $k_2 = 432$, то $\Gamma_2(w)$ содержит 72 антиподальных класса. Без ограничения общности ввиду леммы 3.2 для 36 из них соседи с w попадают в X (подграф прямых из $\Gamma(w)$), причем Z содержит 6 пар параллельных прямых $\{y_1, z_1\}, \dots, \{y_6, z_6\}$. Далее, для 36 антиподальных классов их соседи с w дают $36 \cdot 6$ пар параллельных прямых. Но в X имеется четыре класса параллельных прямых, по шесть пар прямых в каждом классе, поэтому некоторая пара параллельных прямых $\{p, q\}$ отвечает двум антиподальным классам и $|[p] \cap [q]| \geq 3$; противоречие.

Утверждение (1) теоремы 4 доказано. □

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{56, 45, 24(r-1)/r, 1; 1, 24/r, 45, 56\}$, $r \in \{2, 3, 4, 6, 8\}$. Тогда Γ имеет собственное значение $\theta_4 = -16$ кратности 21. Пусть u — вершина графа Γ, $\Omega = [u]$, $b^+ = b_1/(\theta_1 + 1) = 3$, $b^- = b_1/(\theta_4 + 1) = -3$. Тогда Ω — регулярный граф степени 10 на 56 вершинах.

Лемма 3.3. *Граф Ω имеет наименьшее собственное значение, не меньшее $-1 - b^+ = -4$, и второе собственное значение $-1 - b^- = 2$ кратности, не меньшей 35.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1.1 граф Ω имеет наименьшее собственное значение, не меньшее $-1 - b^+ = -4$ и второе собственное значение, не большее $-1 - b^- = 2$. Так как кратность собственного значения $\theta_4 = -16$ меньше k, то по лемме 1.1 граф Ω имеет собственное значение $-1 - b^- = 2$ кратности, не меньшей $56 - 21 = 35$. □

Граф Гевиртца с параметрами $(56, 10, 0, 2)$ имеет спектр $10^1, 2^{35}, -4^{20}$.

Заметим, что граф Γ является плотным, поэтому ввиду леммы 3.3 любой граф Σ изоморфен графу Гевиртца, и массивы пересечений, отвечающие $r = 4, 6, 8$ (отмеченные в [1] как допустимые), удаляются согласно замечанию 2 из [9]. Если $r = 2$, то Γ есть $AT4(2, 4, 2)$-граф и не существует по [7].

Утверждение (2) теоремы 4 доказано. □

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{96, 75, 32(r-1)/r, 1; 1, 32/r, 75, 96\}$, $r = 2, 4, 8$. Тогда Γ имеет наименьшее собственное значение -16 кратности 69. Пусть u — вершина графа Γ, $\Omega = [u]$, $b^+ = b_1/(\theta_1 + 1) = 3$, $b^- = b_1/(\theta_4 + 1) = -5$. Тогда Ω — регулярный граф степени 20 на 96 вершинах.

Лемма 3.4. *Граф Ω имеет наименьшее собственное значение, не меньшее $-1 - b^+ = -4$, кратности, не меньшей 27.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1.1 граф Ω имеет наименьшее собственное значение, не меньшее $-1 - b^+ = -4$ и второе собственное значение, не большее $-1 - b^- = 4$. Так как кратность собственного значения $\theta_4 = -16$ меньше k, то по лемме 1.2 граф Ω имеет собственное значение $-1 - b^- = 4$ кратности, не меньшей $96 - 69 = 27$. □

Псевдогеометрический граф для $GQ(5, 3)$ имеет параметры $(96, 20, 4, 4)$ и спектр $20^1, 4^{45}, -4^{50}$. Заметим, что граф Γ плотный, поэтому ввиду леммы 3.4 любой граф Σ является псевдогеометрическим для $GQ(5, 3)$.

В случае $r = 8$ имеем $c_2 = 4$; противоречие с тем, что $\mu(\Sigma) = 4$. В случае $r = 4$ получим $AT4(4, 4, 4)$-граф; противоречие с тем, что этот граф не существует по [10].

Итак, $r = 2$.

Предложение 1. *Пусть Γ является связным вполне регулярным локально $GQ(5, 3)$-графом. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $\mu \neq 8$;

(2) *диаметр Γ не больше* 3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Γ — связный вполне регулярный локально $GQ(5,3)$-граф с $\mu = 8$, $G = \mathrm{Aut}(GQ(5,3))$, u — вершина графа Γ и $\Omega = [u]$. Тогда для любой вершины $w \in \Gamma_2(u)$ подграф $[u] \cap [w]$ является $K_{4,4}$-подграфом.

Задав граф $GQ(5,3)$ в системе GAP, используя пакет “FinInG” из [11, 12.3.5], простым перебором убеждаемся, что Ω имеет G-допустимое разбиение 6 овоидами, и каждый $K_{4,4}$-подграф Λ из Ω попадает в объединение двух овоидов O_1, O_2 из этого разбиения. Пусть $X_i(\Lambda)$ — множество вершин из $\Omega - \Lambda$, смежных точно с i вершинами из Λ. Тогда $X_0(\Lambda)$ есть объединение трех изолированных $K_{4,4}$-подграфов Λ_1, Λ_2, Λ_3 из $O_1 \cup O_2$.

Таким образом, Δ содержит точно $4\binom{6}{2} = 60$ различных $K_{4,4}$-подграфов, каждый из которых попадает в окрестности ровно трех вершин из $\Gamma_2(u)$, поэтому $|\Gamma_2(u)|$ не больше 180; противоречие с тем, что $|\Gamma_2(u)| = 96 \cdot 75/8$.

Пусть Γ является связным вполне регулярным локально $GQ(5,3)$-графом диаметра 4 с $\mu = 16$, u — вершина графа Γ и $\Omega = [u]$. Тогда $|\Gamma_2(u)| = 96 \cdot 75/16 = 450$. Пусть w, x, u, y, z — геодезический путь в Γ. Компьютерный перебор в GAP показывает, что $[u] \cap [w]$ — это 4-куб или объединение двух изолированных $K_{4,4}$-подграфов, причем $X_0([u] \cap [w])$ — соответственно 4-куб или объединение двух изолированных $K_{4,4}$-подграфов.

Если $[u] \cap [w] = \Lambda \cup \Lambda_1$, то $[u] \cap [z] = \Lambda_2 \cup \Lambda_3$. Пусть $\{a_1, \ldots, a_4\}$, $\{b_1, \ldots, b_4\}$ — доли графа Λ. Так как 4-куб не содержит $K_{2,3}$-подграфов, то для некоторых вершин w_2, w_3 в $[a_1] \cap [a_2]$ найдется $K_{4,4}$-подграф $\{u, w, w_2, w_3\} \cup \{b_1, \ldots, b_4\}$. Симметрично в $[b_i] \cap [b_j]$ найдется $K_{4,4}$-подграф $\{u, w, w_2, w_3\} \cup \{a_1, \ldots, a_4\}$, поэтому $\Lambda \cup \{u, w, w_2, w_3\}$ — $K_{3\times 4}$-подграф из Γ.

Таким образом, по $K_{4,4}$-подграфу Λ из Ω однозначно восстанавливается $K_{3\times 4}$-подграф из Γ. Пусть W_1 — множество вершин из $\Gamma_2(u)$, смежных с объединениями двух изолированных $K_{4,4}$-подграфов из $[u]$, W_2 — множество вершин из $\Gamma_2(u)$, смежных с 4-кубами из $[u]$. Тогда $|W_1|$ не больше $60 \cdot 3/2 = 90$ и $|W_2|$ не меньше 360.

В Δ имеется G-орбита K, состоящая из 1080 4-кубов Σ с $X_0(\Sigma) \in K$. Далее, K содержит ровно 32 куба, пересекающих Σ по паре изолированных ребер. Если $\Gamma_2(u)$ имеет две вершины w_1, w_2, окрестности которых содержат Σ, то для 4-цикла x_1, u_1, x_2, u_2 из Σ, $[x_1] \cap [x_2]$ содержит $K_{2,3}$-подграф и является объединением двух изолированных $K_{4,4}$-подграфов. Как показано выше, $K_{4,4}$-подграф, содержащий $\{u, w_1, w_2\} \cup \{u_1, u_2\}$, вкладывается в $K_{3\times 4}$-подграф из Γ; противоречие с тем, что $[w_1] \cap [w_2]$ является 4-кубом.

Пусть $w \in \Gamma_2(u)$ и $[w]$ содержит Σ. Тогда окрестность каждой из 64 вершин в $[w] \cap \Gamma_2(u)$ пересекает Σ по паре изолированных ребер. Не более 32 из этих вершин смежны с 4-кубами из $[u]$. Значит, $[w]$ имеет не менее 32 вершин, смежных с объединениями двух изолированных $K_{4,4}$-подграфов из $[u]$. Итак, число ребер между W_2 и W_1 не меньше $32 \cdot 360$ и некоторая вершина из W_1 смежна по крайней мере с 128 вершинами из W_2; противоречие. □

В [12] найдены возможные автоморфизмы $AT4(4,4,2)$-графа Γ. Установлено, что группа автоморфизмов графа Γ действует интранзитивно на множестве его антиподальных классов.

Теорема 4 доказана. □

Заключение

В работе получен отрицательный ответ на вопрос Л. Сойчера о существовании антиподального 6-накрытия дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{32, 27, 10, 1; 1, 2, 27, 32\}$.

Ждут своего решения проблемы существования дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{45, 40, 6, 1; 1, 6, 40, 45\}$, $\{49, 48, 2, 1; 1, 2, 48, 49\}$, $\{54, 50, 5, 1; 1, 5, 50, 54\}$ и $\{75, 64, 12, 1; 1, 12, 64, 75\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; NY: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. **Jurisic A., Koolen J., Terwilliger P.** Tight distance-regular graphs // J. Algebr. Comb. 2000. Vol.12. P. 163–197. doi: 10.1023/A:1026544111089 .
3. **Махнев А. А., Нирова М. С.** Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = c_2$ // Мат. заметки. 2018. Vol. 103, no. 4. С. 730–744. doi: 10.4213/mzm11503 .
4. **Soicher L.** The uniqueness of a distance-regular graph with intersection array $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$ and related results // Des. Codes Cryptogr. 2017. Vol. 84. P. 101–108. doi: 10.1007/s10623-016-0223-6 .
5. **Гаврилюк А. Л., Махнев А. А.** О графах Крейна без треугольников // Докл. РАН. 2005. Т. 403, № 6. С. 727–730.
6. **Махнев А. А.** Граф Крейна Kre(4) не существует // Докл. РАН. 2017. Т. 475, № 3. С. 251–253. doi: 10.7868/S0869565217210022 .
7. **Махнев А. А., Падучих Д. В.** О сильно регулярных графах с собственным значением μ и их автоморфизмах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 207–214.
8. **Vidali J.** Using symbolic computation to prove nonexistence of distance-regular graphs // Electronic J. Combinatorics. 2018. Vol. 25, no. 4. Art. no. 4.21. doi: 10.37236/7763 .
9. **Гаврилюк А. Л., Махнев А. А., Падучих Д. В.** Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 35–47.
10. **Jurishich A., Koolen J.** Classification of the $AT4(qs, q, q)$ family of distance-regular graphs // J. Comb. Theory. 2011. Vol. 118, no. 3. P. 842–852. doi: 10.1016/j.jcta.2010.10.001 .
11. **Bamberg J., etc.** GAP 4, Package FinInG. 2018. 314 p. URL: https://www.gap-system.org/Manuals/pkg/fining/doc/manual.pdf .
12. **Ефимов К. С.** Автоморфизмы AT4(4,4,2)-графа и отвечающих ему сильно регулярных графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 4. С. 119–127.

Поступила 14.10.2021
После доработки 19.01.2022
Принята к публикации 24.01.2022

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

REFERENCES

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs.* Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1989, 495 p. ISBN: 0387506195 .
2. Jurisic A., Koolen J., Terwilliger P. Tight distance-regular graphs. *J. Algebr. Comb.*, 2000, vol. 12, no. 2, pp. 163–197. doi: 10.1023/A:1026544111089 .
3. Makhnev A.A., Nirova M.S. Distance-regular Shilla graphs with $b_2 = c_2$. *Math. Notes*, 2018, vol. 103, no. 5, pp. 780–792. doi: 10.1134/S0001434618050103 .

4. Soicher L.H. The uniqueness of a distance-regular graph with intersection array $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$ and related results. *Des. Codes Cryptogr.*, 2017, vol. 84, no. 1, pp. 101–108. doi: 10.1007/s10623-016-0223-6 .
5. Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A. On Krein graphs without triangles. *Dokl. Math.*, 2005, vol. 72, no. 1, pp. 591–594.
6. Makhnev A.A. The graph Kre(4) does not exist. *Dokl. Math.*, 2017, vol. 96, no. 1, pp. 348–350. doi: 10.1134/S1064562417040123 .
7. Makhnev A.A., Paduchikh D.V. On strongly regular graphs with eigenvalue μ and their extensions. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2014, vol. 285, suppl. 1, pp. S128–S135. doi: 10.1134/S0081543814050137 .
8. Vidali J. Using symbolic computation to prove nonexistence of distance-regular graphs. *Electronic J. Combinatorics*, 2018, vol. 25, no. 4, art. no. 4.21. doi: 10.37236/7763 .
9. Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A., Paduchikh D.V. Distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are isomorphic to the Gewirtz graph. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 35–47 (in Russian).
10. Jurishich A., Koolen J. Classification of the $AT4(qs, q, q)$ family of distance-regular graphs. *J. Combinatorial Theory, Series A*, 2011, vol. 118, no. 3, pp. 842–852. doi: 10.1016/j.jcta.2010.10.001 .
11. Bamberg J., etc. GAP 4, Package FinInG. Available on: https://www.gap-system.org/Manuals/pkg/fining/doc/manual.pdf .
12. Efimov K.S. Automorphisms of an $AT4(4, 4, 2)$-graph and of the corresponding strongly regular graphs. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2019, vol. 304, suppl. 1, pp. S59–S67. doi: 10.1134/S008154381902007X .

Received September 14, 2021
Revised January 19, 2022
Accepted January 24, 2022

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research — the National Natural Science Foundation of China (project no. 20-51-53013).

Aleksandr Alekseevich Makhnev, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding member of RAS, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia,
e-mail: makhnev@imm.uran.ru .

Dmitrii Viktorovich Paduchikh, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof. of RAS, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: dpaduchikh@gmail.com .

Cite this article as: A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. Inverse problems in the class of distance-regular graphs of diameter 4, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 199–208 .