ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 1 2022

УДК 517.983.23

О ПРОИЗВЕДЕНИИ ОПЕРАТОРНЫХ ЭКСПОНЕНТ

Л. Ф. Коркина, М. А. Рекант

В банаховом пространстве заданы линейный плотно определенный оператор A и некоторая область, лежащая в его регулярном множестве и содержащая неположительную вещественную полуось. Предполагается известной степенная оценка нормы резольвенты этого оператора в бесконечности. Рассматриваются операторы e^{tA} $(t \in \mathbb{R})$, заданные соответствующими рядами, и $(e^{tA})_I$ при $t < 0$, введенные на базе интегральной формулы Коши. Изучается вопрос об обратимости операторных экспонент и мультипликативное свойство этих операторов. Операторные экспоненты могут быть использованы для построения функций от оператора более широкого класса, чем рассматриваемый ранее авторами.

Ключевые слова: операторная экспонента, функции от оператора, мультипликативное свойство.

L. F. Korkina, M. A. Rekant. On the product of operator exponentials.

A linear densely defined operator A and a domain lying in its regular set and containing the nonpositive real semiaxis are given in a Banach space. A power bound for the norm of the resolvent of the operator at infinity is assumed to be known. The operators e^{tA} $(t \in \mathbb{R})$, given by the corresponding series, and $(e^{tA})_I$ for $t < 0$, introduced on the basis of the integral Cauchy formula, are considered. The question of invertibility of the operator exponentials and the multiplicative property of these exponentials are studied. The operator exponentials can be used for the construction of operator functions of a wider class than that considered by the authors earlier.

Keywords: operator exponent, operator functions, multiplicative property.

MSC: 47A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-156-163

Введение

Пусть X — комплексное банахово пространство, A — линейный плотно определенный оператор, действующий в X. При различных предположениях на X и A вводятся рядом способов, изучаются и находят применение функции от оператора A. Основы теории функционального исчисления операторов заложены в монографиях [1–3]. В фундаментальных работах [4–7] развита теория дробных степеней операторов. В [4–6] имеются также приложения этой теории. В статьях [8; 9] изучаются конкретные задачи с применением операторных функций. Перечислена малая часть источников, где изучаются такие функции. Один из способов их введения — построение с использованием его натуральных степеней операторных функций по соответствующим аналитическим в некоторой области скалярным функциям на базе интегральной формулы Коши (см., например, [1; 4–6]). При этом норма резольвенты оператора A и модули скалярных функций имеют степенной порядок роста на бесконечности. В русле исследований такого рода операторных функций лежат публикации авторов, см., например, [10; 11] и их недавнюю работу (Некоторые свойства степенных операторных рядов // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 161–172). Чтобы аналогичным способом ввести, а затем изучить операторные функции, соответствующие скалярным аналитическим функциям, модули которых растут быстрее степенных, но не быстрее показательных на бесконечности, необходимо знание свойств операторных экспонент. Исследование этих свойств проводилось авторами в [11], в отмеченной статье 2020 г. и продолжается здесь. В основном в данной работе изучается мультипликативное свойство операторных экспонент.

1. Основные обозначения и предположения

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}(p, q)$ $(p > 0,\ q > 0)$ — кривая, лежащая в комплексной плоскости (λ), заданная уравнением

$$\beta^2 = 2p\alpha \ln \frac{\alpha}{q} \quad (\alpha = \operatorname{Re}\lambda,\ \beta = \operatorname{Im}\lambda,\ \alpha \geq q); \tag{1.1}$$

$G = G(p, q)$ — область с границей $\mathcal{L}$, содержащая 0; обход $\mathcal{L}$ задается так, что область G остается справа; $\overline{G}$ лежит в регулярном множестве $\rho(A)$ оператора A. Предполагается известной оценка нормы резольвенты $R(\lambda) = R_A(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1}$ (E — единичный оператор в X) оператора A в $\overline{G}$: при некоторых $C_0 > 0,\ \gamma \leq 1$ и всех $\lambda \in \overline{G}$

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{C_0}{(|\lambda| + 1)^\gamma}. \tag{1.2}$$

Введем также при $t > 0$ кривые $\mathcal{L}_t = \mathcal{L}(tp, tq)$ и функцию $n(t)\colon (0, +\infty) \to \mathbb{N}$, определенную соотношением

$$n(t) = \min\{n \in \mathbb{N}\colon tp - n - \gamma < -1\}.$$

Видно, что эта функция не убывает.

Если B — оператор, действующий в X, то оператор e^B можно определить равенством

$$e^B x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n x}{n!}$$

для тех $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D(B^n)$, для которых ряд справа сходится. С другой стороны, при $t > 0$ можно рассмотреть операторы $(e^{-tA})_I = (e^{-t\lambda})(A)$, где

$$(e^{-t\lambda})(A) = A^{n(t)} \int\limits_{\mathcal{L}_t} \lambda^{-n(t)} e^{-t\lambda} R(\lambda)\, d\lambda$$

(см. [11]). Заметим, что в [10] на оператор накладывались менее жесткие ограничения, чем в данной работе, что вызвано необходимостью изучить свойства операторной экспоненты e^{-tA} $(t > 0)$, в частности, ее связь с операторной экспонентой e^{sA} $(s > 0)$, заданной рядом. В [11, лемма 2] уточнялось, что если оператор A удовлетворяет наложенным в этой статье ограничениям, то оба определения e^{-tA} $(t > 0)$, введенных ранее, эквивалентны. При этом также устанавливается, что эквивалентность не нарушится, если интеграл в определении оператора e^{-tA} $(t > 0)$ брать по произвольной жордановой кривой L, выходящей из бесконечности и идущей в бесконечность, любая ограниченная часть которой спрямляема; кроме того, эта кривая и область D с границей L, содержащая неположительную часть вещественной оси, должны лежать в регулярном множестве оператора tA и одновременно в области $\{\lambda\colon |\arg\lambda| < \varphi_0\}$, где $\varphi_0 < \pi/2$, причем в D и на L должна выполняться оценка (1.2) при некоторых $C_0 > 0$ и $\gamma \leq 1$.

Связь операторов e^{tA} и $(e^{-tA})_I$, а также произведения подобных операторов изучаются в настоящей работе. Перейдем к изложению ее результатов.

2. Результаты работы

Утверждение 1. *Пусть $t > 0,\ x \in X$ и абсолютно сходится ряд*

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{t^{m+n} A^{m+n} x}{m!n!}.$$

Тогда $x \in D(e^{tA}e^{-tA})$ и

$$e^{-tA}x = (e^{-tA})_I x.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По следствию 2 из [11] $x \in D(e^{tA}e^{-tA})$ и $e^{tA}e^{-tA}x = x$. Поэтому

$$(e^{-tA})_I x = (e^{-tA})_I (e^{tA}e^{-tA})x = \big((e^{-tA})_I \cdot e^{tA}\big)e^{-tA}x = e^{-tA}x$$

(здесь использовано утверждение 5 из [11], согласно которому $(e^{-tA})_I \cdot e^{tA} \subset E$). □

Следствие 1. *В условиях утверждения при $l \in \mathbb{N}$ справедливо, что $x \in D(A^l e^{-tA})$ и*

$$A^l e^{-tA}x = A^l (e^{-tA})_I x.$$

З а м е ч а н и е 1. При $t > 0$ $\operatorname{Im}\big((e^{-tA})_I\big) \subset \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} D(A^n)$, так как при любом $n \in \mathbb{N}$ $A^n(e^{-tA})_I = (\lambda^n e^{-t\lambda})(A)$ — непрерывный оператор на X (последнее равенство вытекает из теоремы 3 работы [10]).

Утверждение 2. *Пусть $0 < s < t,\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда $D(e^{tA}) \subset D(e^{sA}A^m)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in D(e^{tA})$. Имеют место соотношения

$$e^{sA}A^m x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n A^{n+m}x}{n!} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{s^{n-m}A^n x}{(n-m)!} = \frac{1}{s^m}\sum_{n=m}^{\infty} \frac{t^n A^n x}{n!}\Big(\frac{s}{t}\Big)^n \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{t^n A^n x}{n!}\Big(\frac{s}{t}\Big)^n \frac{n!}{(n-m)!} \tag{2.1}$$

сходится с помощью аналога признака Абеля сходимости числовых рядов (см. [11, утверждение 1]). Ряд $\sum\limits_{n=m}^{\infty} \dfrac{t^n A^n x}{n!} = e^{tA}x - \sum\limits_{n=0}^{m-1} \dfrac{t^n A^n x}{n!}$ сходится по условию. Пусть

$$b_n = \Big(\frac{s}{t}\Big)^n \frac{n!}{(n-m)!} = \Big(\frac{s}{t}\Big)^n (n-m+1)\ldots n.$$

В этом случае

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{s}{t}\frac{n+1}{n-m+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{s}{t} \in (0,1),$$

т. е. с некоторого номера последовательность $\{b_n\}$ убывает и $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; значит, последовательность $\{b_n\}$ ограничена. Поэтому ряд (2.1) сходится, т. е. $x \in D(e^{sA}A^m)$. □

З а м е ч а н и е 2. Если $0 < s < t$, то $D(e^{tA}) \subset D(e^{sA})$.

Замечание вытекает из утверждения 2 при $m = 0$.

Утверждение 3. *Пусть $t > o$. Тогда*

$$e^{tA}(e^{-tA})_I \subset E.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вывод утверждения следует из цепочки соотношений:

$$e^{tA}(e^{-tA})_I = A^{n(t)}A^{-n(t)}e^{tA}(e^{-tA})_I \subset A^{n(t)}e^{tA}A^{-n(t)}(e^{-tA})_I$$

$$= A^{n(t)}e^{tA}(e^{-tA})_I A^{-n(t)} = A^{n(t)}A^{-n(t)} = E.$$

Здесь использованы коммутируемость непрерывных операторов $A^{-n(t)}$ и $(e^{-tA})_I$ на основании теоремы 3 из [10] и равенство $e^{tA}(e^{-tA})_I A^{-n(t)} = A^{-n(t)}$, вытекающее из [11, утверждение 5]. □

Следствие 2. *Имеет место равенство*

$$\overline{e^{tA}(e^{-tA})_I} = E \quad (t > 0).$$

Действительно, $e^{tA}(e^{-tA})_I$ — непрерывный оператор, равный E на плотном множестве $D(A^{n(t)})$ (плотность $D(A^n)$ установлена, например, в [6]).

Следствие 3. *Если $t > 0$ и оператор e^{tA} замкнут, то*

$$e^{tA}(e^{-tA})_I = E,$$

т. е. (с учетом утверждения 5 из [11]) оператор e^{tA} обратим и

$$(e^{tA})^{-1} = (e^{-tA})_I.$$

Утверждение 4. *Пусть s, $t > 0$. Тогда при $s < t$*

$$e^{sA}(e^{-tA})_I = (e^{-(t-s)A})_I,$$

а при $s \le t$

$$(e^{-tA})_I \cdot e^{sA} \subset (e^{-(t-s)A})_I.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s < t$. По замечанию 1 $\operatorname{Im}(e^{-(t-s)A})_I \subset D(A^{n(s)})$. Поэтому с учетом теоремы 3 из [10] и утверждения 5 из [11]

$$e^{sA}(e^{-tA})_I = e^{sA}(e^{-sA})_I(e^{-(t-s)A})_I = (e^{-(t-s)A})_I.$$

Аналогично при $s \le t$, используя определение e^{sA} как ряда и непрерывность оператора $(e^{-tA})_I = (e^{-t\lambda})(A)$, имеем $(e^{-tA})_I \cdot e^{sA} \subset e^{sA}(e^{-tA})_I \subset (e^{-(t-s)A})_I$ (при $s < t$ последнее включение является равенством, при $s = t$ $(e^0)_I = E$, и это включение было установлено в утверждении 3). □

В утверждениях 5, 6 изучается связь операторов $e^{sA}(e^{-tA})_I$ и $e^{(s-t)A}$ при $s > t > 0$.

Утверждение 5. *Пусть $s > t > 0$. Тогда*

$$(e^{-tA})_I \cdot e^{sA} \subset e^{(s-t)A}, \tag{2.2}$$

$$e^{sA}(e^{-tA})_I\big|_{D(A^{n(s-t)}e^{sA}(e^{-tA})_I)} \subset e^{(s-t)A}. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предыдущему утверждению $(e^{-tA})_I = e^{(s-t)A}(e^{-sA})_I$, поэтому $(e^{-tA})_I \cdot e^{sA} = e^{(s-t)A}(e^{-sA})_I \cdot e^{sA} \subset e^{(s-t)A}$, т. е. (2.2) имеет место.

Из соотношений

$$(e^{-(s-t)A})_I \cdot e^{sA}(e^{-tA})_I \subset e^{sA}(e^{-(s-t)A})_I \cdot (e^{-tA})_I = e^{sA}(e^{-sA})_I \subset E$$

вытекает, что

$$e^{(s-t)A}(e^{-(s-t)A})_I \cdot e^{sA}(e^{-tA})_I \subset e^{(s-t)A}. \tag{2.4}$$

Так как для $x \in D(A^{n(s-t)}e^{sA}(e^{-tA})_I)$ справедливо включение $e^{sA}(e^{-tA})_I x \in D(A^{n(s-t)})$, то по утверждению 5 из [11] для таких x $e^{(s-t)A}(e^{-(s-t)A})_I \cdot e^{sA}(e^{-tA})_I x = e^{sA}(e^{-tA})_I x$, т. е. из соотношения (2.4) следует (2.3). □

Из утверждений 4 и 5 получаем

Следствие 4. *Пусть s, $t > 0$. Тогда*

$$(e^{-tA})_I \cdot e^{sA} \subset e^{(s-t)A}.$$

Утверждение 6. *Пусть $s > t > 0$. Тогда*

$$e^{sA}(e^{-tA})_I \subset A^{n(s-t)}e^{(s-t)A}A^{-n(s-t)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вывод утверждения следует из соотношений

$$e^{sA}(e^{-tA})_I = e^{sA}(e^{-tA})_I A^{n(s-t)}A^{-n(s-t)} \subset A^{n(s-t)}e^{(s-t)A}A^{-n(s-t)}.$$

Здесь включение есть следствие включений

$$e^{sA}(e^{-tA})_I A^{n(s-t)} \subset e^{sA}A^{n(s-t)}(e^{-tA})_I \subset A^{n(s-t)}e^{sA}(e^{-tA})_I \subset A^{n(s-t)}e^{(s-t)A},$$

последнее из которых имеет место в силу утверждения 5, первое — из-за непрерывности оператора $(e^{-tA})_I$, а второе — по следствию 2 из указанной во "Введении" работы авторов 2020 г. □

Утверждение 7. *Пусть $t_1, \dots, t_m > 0,\ t = t_1 + \dots + t_m$. Тогда*

$$e^{tA}\big|_{D(A^{n(t_1)}e^{tA})} \subset e^{t_1 A} \dots e^{t_m A}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in D(A^{n(t_1)}e^{tA})$. Используя утверждение 5 из [11] и утверждение 5 данной работы получаем

$$e^{tA}x = A^{-n(t_1)}A^{n(t_1)}e^{tA}x = e^{t_1A}(e^{-t_1A})_I A^{-n(t_1)}A^{n(t_1)}e^{tA}x = e^{t_1A}(e^{-t_1A})_I \cdot e^{tA}x = e^{t_1A}e^{(t-t_1)A}x.$$

Отсюда заключаем, что $x \in D(A^{n(t_2)}e^{(t-t_1)A})$, т. е. $e^{(t-t_1)A}x = e^{t_2A}e^{(t-t_1-t_2)A}x$. Продолжая рассуждения, делаем вывод, что $e^{tA}x = e^{t_1A}e^{t_2A}\dots e^{t_mA}x$. □

Следствие 5. *Справедливо включение*

$$D(A^{n(t_1)}e^{tA}) \subset D(e^{t_1A}\dots e^{t_mA})$$

при $t_1 > 0, \dots, t_m > 0,\ t = t_1 + \dots + t_m$.

Утверждение 8. *Пусть $t_1, \dots, t_m > 0,\ t = t_1 + \dots + t_m$. Тогда*

$$e^{t_1A}\dots e^{t_mA}\big|_{D(e^{tA})} \subset e^{tA}. \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала рассмотрим случай $m = 2$. По утверждениям 3 и следствию 4 имеют место соотношения

$$e^{tA} \supset e^{t_1A}(e^{-t_1A})_I \cdot e^{tA} = e^{t_1A}e^{t_2A}\big|_{D(e^{tA})},$$

из которых вытекает (2.5) при $m = 2$.

Случай произвольного $m > 2$ устанавливается индукцией по m. Предполагая справедливость утверждения для $m - 1$, получаем для m:

$$e^{t_1A}\dots e^{t_mA}\big|_{D(e^{tA})} \subset e^{t_1A}e^{(t_2+\dots+t_m)A}\big|_{D(e^{tA})} \subset e^{(t_1+t_2+\dots+t_m)A} = e^{tA}.$$ □

Из утверждений 7 и 8 выводим

Следствие 6. *Пусть $t_1, \dots, t_m > 0,\ t = t_1 + \dots + t_m$. Тогда*

$$e^{tA}\big|_{D(A^{n(t_1)}e^{tA})} \subset e^{t_1A}\dots e^{t_mA}\big|_{D(e^{tA})} \subset e^{tA}.$$

Утверждение 9. *Пусть $q > 0$ — число из определения кривой $\mathcal{L} = \mathcal{L}(p, q)$ и $x \in D(e^{-A})$ — такой элемент, что существует последовательность натуральных чисел $\{m_n\}$ со свойствами*

$$m_n - n + \gamma > 1, \tag{2.6}$$

$$\textit{последовательность } \left\{ \frac{\|A^{m_n} x\|}{m_n q^{m_n}} \right\} \textit{ ограничена,} \tag{2.7}$$

при некотором $s > \max\{q, 1\}$

$$\frac{\|A^{m_n} x\|}{(m_n - n) s^{m_n}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.8}$$

Тогда

$$e^{-A} x = (e^{-A})_I x. \tag{2.9}$$

Доказательство. Пусть $\{m_n\} \subset \mathbb{N}$ — последовательность, удовлетворяющая (2.6)–(2.8) (соотношение (2.8) выполняется при подходящем $s > \max\{q, 1\}$). Для $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \Big\| (e^{-A})_I x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-A)^k x}{k!} \Big\|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Big\| \int\limits_{\mathcal{L}} e^{-\lambda} \lambda^{-m_n} R(\lambda)\, d\lambda A^{m_n} x - \int\limits_{\mathcal{L}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!} \lambda^{-m_n} R(\lambda)\, d\lambda A^{m_n} x \Big\|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Big\| \int\limits_{\mathcal{L}} \Big(e^{-\lambda} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!} \Big) \lambda^{-m_n} R(\lambda)\, d\lambda A^{m_n} x \Big\|.$$

Пусть $B(0, s)$ — открытый круг с центром в точке 0 радиуса s, $\mathcal{L}_s^{(1)} = \mathcal{L} \cap \overline{B(0, s)}$, $\mathcal{L}_s^{(2)} = \mathcal{L} \backslash B(0, s)$. Тогда ввиду оценки (1.2) и соотношения (1.1), задающего $\mathcal{L}$, при некоторых положительных постоянных C_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ справедливы неравенства

$$u_n \le \frac{1}{2\pi} \Bigg(\Big\| \int\limits_{\mathcal{L}_s^{(1)}} \Big(e^{-\lambda} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!} \Big) \lambda^{-m_n} R(\lambda)\, d\lambda\ A^{m_n} x \Big\|$$

$$+ \Big\| \int\limits_{\mathcal{L}_s^{(2)}} \Big(e^{-\lambda} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!} \Big) \lambda^{-m_n} R(\lambda)\, d\lambda\ A^{m_n} x \Big\| \Bigg)$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \Bigg(\max_{\lambda \in \mathcal{L}_s^{(1)}} \Big| e^{-\lambda} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!} \Big| \max_{\lambda \in \mathcal{L}_s^{(1)}} \|R(\lambda)\| \int\limits_{\mathcal{L}_s^{(1)}} |\lambda|^{-m_n} |d\lambda|\ \|A^{m_n} x\|$$

$$+ \int\limits_{\mathcal{L}_s^{(2)}} \Big(|e^{-\lambda}| + \sum_{k=0}^{n} \frac{|\lambda|^{k-n}}{k!} |\lambda|^n \Big) |\lambda|^{-m_n} \|R(\lambda)\|\, |d\lambda|\ \|A^{m_n} x\| \Bigg)$$

$$\le C_1 \Bigg(\max_{\lambda \in \mathcal{L}_s^{(1)}} \Big| e^{-\lambda} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n \lambda^k}{k!} \Big| \max_{\lambda \in \mathcal{L}_s^{(1)}} \|R(\lambda)\| \int\limits_{q}^{+\infty} \alpha^{-m_n}\, d\alpha\ \|A^{m_n} x\|$$

$$+ \int\limits_{\mathcal{L}_s^{(2)}} \Big(e^{-\mathrm{Re}\,\lambda} + \sum_{k=0}^{n} \frac{|\lambda|^{k-n}}{k!} |\lambda|^n \Big) |\lambda|^{-m_n} (|\lambda| + 1)^{-\gamma} |d\lambda|\ \|A^{m_n} x\| \Bigg)$$

$$\le C_2\rho_n\frac{\|A^{m_n}x\|}{m_nq^{m_n}}+C_3\int\limits_s^{+\infty}\Big(e^{-\alpha}+\sum_{k=0}^{n}\frac{s^{k-n}}{k!}\alpha^n\Big)\alpha^{-m_n-\gamma}\,d\alpha\;\|A^{m_n}x\|$$

$$\le C_2\rho_n\frac{\|A^{m_n}x\|}{m_nq^{m_n}}+C_4\int\limits_s^{+\infty}\Big(e^{-\alpha}+\frac{e^s}{s^n}\alpha^n\Big)\alpha^{-m_n-\gamma}\,d\alpha\;\|A^{m_n}x\|$$

$$\le C_2\rho_n\frac{\|A^{m_n}x\|}{m_nq^{m_n}}+\frac{C_5s^{n-m_n-\gamma+1}e^s}{(m_n-n+\gamma-1)s^n}\|A^{m_n}x\|$$

$$\le C_2\rho_n\frac{\|A^{m_n}x\|}{m_nq^{m_n}}+C_6\frac{e^s\|A^{m_n}x\|}{(m_n-n)s^{m_n}},$$

где

$$\rho_n=\max_{\lambda\in\Gamma_p^{(1)}}\Big|e^{-\lambda}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\lambda^k}{k!}\Big|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

$\Big($ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k}{k!}$ сходится к $e^{-\lambda}$ равномерно на компактном множестве $\mathcal{L}_s^{(1)}\Big)$. В силу соотношений (2.7), (2.8) выполняется (2.9). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 896 с.
2. **Люстерник Л.А., Соболев С.Л.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 519 с.
3. **Рудин У.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 449 с.
4. **Balakrishnan A.V.** Fractional powers of closed operators and semigroups generated by them // Pacific J. Math. Soc. 1960. Vol. 10, no. 2. P. 419–437. doi: 10.2140/pjm.1960.10.419 .
5. **Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.** Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 499 с.
6. **Крейн С.Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 494 с.
7. **Komatsu H.** Fractional powers of operators. II. Interpolation spaces // Pacific J. of Math. 1967. Vol. 21, no. 1. P. 89–111. doi: 10.2140/pjm.1967.21.89 .
8. **Репин О.А.** Об одной задаче для уравнения смешанного типа с дробной производной // Изв. вузов. Математика. 2018. № 8. С. 46–51.
9. **Костин В.А., Костин Д.В., Костин А.В.** Операторные косинус-функции и граничные задачи // Докл. АН. 2019. Т. 486, № 5. С. 531–536.
10. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Свойства отображений скалярных функций в операторные линейного замкнутого оператора // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 153–165.
11. **Korkina L.F., Rekant M.A.** Certain properties of operator exponent // Ural. Math. J. 2018. Vol. 4, no. 2. P. 33–42. doi: 10.15826/umj.2018.2.00 .

Поступила 22.10.2021
После доработки 30.11.2021
Принята к публикации 6.12.2021

Коркина Людмила Федоровна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: L.F.Korkina@urfu.ru

Рекант Марк Александрович
канд. физ.-мат. наук

доцент
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: M.A.Rekant@urfu.ru

REFERENCES

1. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear operators. I. General theory.* NY: Interscience Publ., 1958, 858 p. ISBN: 0470226056 . Translated to Russian under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya.* Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1962, 896 p.
2. Lusternik L.A. Sobolev V.I. *Elements of functional analysis.* Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1974, 360 p. ISBN: 0470556501 . Original Russian text published in Lyusternik L.A., Sobolev V.I. *Elementy funktsional'nogo analiza*, Moscow: Nauka Publ., 1965, 519 p.
3. Rudin W. *Functional analysis.* NY: McGraw-Hill, 1973, 397 p. ISBN: 978-0070542259 . Translated to Russian under the title *Funktsional'nyi analiz.* Moscow: Mir Publ., 1975, 449 p.
4. Balakrishnan A.V. Fractional powers of closed operators and semigroups generated by them. *Pacific J. Math. Soc.*, 1960, vol. 10, no. 2, pp. 419–437. doi: 10.2140/pjm.1960.10.419 .
5. Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskii P.E. *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsii* [Integral operators in the spaces of summable functions]. Moscow: Nauka Publ., 1966, 499 p.
6. Krein S.G. *Linear differential equations in Banach space.* Providence: AMS, 1972, 390 p. doi: 10.1090/mmono/029 . Original Russian text published in Krein S.G. *Lineinye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve*, Moscow: Nauka Publ., 1967, 494 p.
7. Komatsu H. Fractional powers of operators. II. Interpolation spaces. *Pacific J. Math.*, 1967, vol. 21, no. 1, pp. 89–111. doi: 10.2140/pjm.1967.21.89 .
8. Repin O.A. On a problem for a mixed-type equation with fractional derivative. *Russ. Math.*, 2018, vol. 62, no. 8, pp. 38–42. doi: 10.3103/S1066369X18080066 .
9. Kostin V.A., Kostin D.V., Kostin A.V. Operator cosine functions and boundary value problems. *Dokl. Math.*, 2019, vol. 99, no. 3, pp. 303–307. doi: 10.1134/S1064562419030177 .
10. Korkina L.F., Rekant M.A. Properties of mappings of scalar functions to operator functions of a linear closed operator. *Tr. Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 1, pp. 153–165 (in Russian).
11. Korkina L.F., Rekant M.A. Certain properties of operator exponent. *Ural. Math. J.*, 2018, vol. 4, no. 2, pp. 33–42. doi: 10.15826/umj.2018.2.005 .

Received October 22, 2021
Revised November 30, 2021
Accepted December 12, 2021

Lyudmila Fedorovna Korkina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: L.F.Korkina@urfu.ru .

Mark Aleksandrovich Rekant, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: M.A.Rekant@urfu.ru .

Cite this article as: L. F. Korkina, M. A. Rekant. On the product of operator exponentials, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 156–163 .