ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 1 2022

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ 4-ПРИМАРНЫХ ГРУППАХ С НЕСВЯЗНЫМ ГРАФОМ ГРЮНБЕРГА—КЕГЕЛЯ И КОМПОЗИЦИОННЫМ ФАКТОРОМ, ИЗОМОРФНЫМ $L_3(17)$ ИЛИ $Sp_4(4)$[1]

А. С. Кондратьев, И. Д. Супруненко, И. В. Храмцов

Графом Грюнберга — Кегеля (графом простых чисел) конечной группы G называется граф, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq. В теории конечных групп динамично развивается направление исследований конечных групп по свойствам их графов Грюнберга — Кегеля. Детальное изучение класса конечных групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля — одна из важных задач в этом направлении. В 2010–2011 гг. первый и третий авторы описали нормальное строение конечных 3-примарных и 4-примарных групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Однако в этом описании был пропущен случай, когда 4-примарная группа имеет композиционный фактор, изоморфный группе $L_3(17)$ или $Sp_4(4)$. Восполняя этот пробел, в данной работе мы получаем описание рассматриваемых групп в этом пропущенном случае. Тем самым описание нормального строения 4-примарных групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля поправлено. В ходе доказательства вычислена 2-модулярная матрица разложения группы $L_3(17)$ (с точностью до двух параметров, каждый из которых принимает значение 1 или 2), что представляет самостоятельный интерес.

Ключевые слова: конечная группа, алгебраическая группа, неразрешимая 4-примарная группа, главный фактор, несвязный граф Грюнберга—Кегеля, характер, характер Брауэра, матрица разложения.

A. S. Kondrat'ev, I. D. Suprunenko, I. V. Khramtsov. On finite 4-primary groups having a disconnected Gruenberg–Kegel graph and a composition factor isomorphic to $L_3(17)$ or $Sp_4(4)$.

The Gruenberg–Kegel graph (the prime graph) $\Gamma(G)$ of a finite group G is the graph in which the vertices are the prime divisors of the order of G and two distinct vertices p and q are adjacent if and only if G contains an element of order pq. Investigations of finite groups by the properties of their Gruenberg–Kegel graphs form a dynamically developing branch of the finite group theory. A detailed study of the class of finite groups with disconnected Gruenberg–Kegel graphs is one of the important problems in this direction. In 2010–2011, the first and the third authors described the normal structure of finite 3-primary and 4-primary groups with disconnected Gruenberg–Kegel graphs. Unfortunately, the case where a 4-primary group has a composition factor isomorphic to $L_3(17)$ or $Sp_4(4)$ has been omitted in this description. In the present paper, we obtain a description of the groups under consideration in the omitted case. Now a description of the normal structure of finite 4-primary groups with disconnected Gruenberg–Kegel graphs is corrected. In the course of the proof, the 2-modular decomposition matrix of the group $L_3(17)$ is calculated (up to two parameters every of which takes value 1 or 2).

Keywords: finite group, algebraic group, non-solvable 4-primary group, chief factor, disconnected Gruenberg–Kegel graph, character, Brauer character, decomposition matrix.

MSC: 20D06, 20D20, 20D60, 20C20, 20C33,20G05, 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-139-155

Введение

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\pi(G)$ множество всех простых делителей порядка группы G. *Граф Грюнберга — Кегеля* (*граф простых чисел*) $\Gamma(G)$ группы G определяется как граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q смежны

[1]Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00456, а также проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов России (соглашение 02.A03.210006 от 27.08.2013); исследование второго автора поддержано Институтом математики НАН Беларуси в рамках государственной программы научных исследований “Конвергенция-2025”.

тогда и только тогда, когда в G есть элемент порядка pq. Далее $s(G)$ — число компонент связности графа $\Gamma(G)$ и $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq s(G)\}$ — множество его связных компонент; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$. Группа G называется *n-примарной*, если $|\pi(G)| = n$.

Возникает интересная общая задача: *описать все конечные группы, графы Грюнберга — Кегеля которых имеют заданное свойство.*

Прежде всего наше внимание привлекает детальное изучение класса конечных групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Это мотивировано следующим. Указанный класс широко обобщает класс конечных групп Фробениуса, что сразу видно из известной структурной теоремы Грюнберга — Кегеля о конечных группах с несвязным графом простых чисел (см. лемму 1.1). Роль же групп Фробениуса в теории конечных групп совершенно исключительна. Результаты о строении конечных групп Фробениуса входят в фундамент теории групп.

Заметим также, что класс конечных групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля совпадает с классом конечных групп, имеющих изолированную подгруппу (т. е. собственную подгруппу, содержащую централизатор каждого своего неединичного элемента), который до классификации конечных простых групп изучался многими известными алгебраистами (Фробениус, Судзуки, Фейт, Томпсон, Г. Хигмэн, Арад, Чиллаг, В.М. Бусаркин, Ю.М. Горчаков, Н.Д. Подуфалов и др.).

Конечные простые группы с несвязным графом Грюнберга — Кегеля описаны в работах Уильямса [27], первого автора [4] и Иёри и Ямаки [21]. Они составляют довольно узкий подкласс всех конечных простых групп, однако включают многие “малые” в различных смыслах группы, часто возникающие в исследованиях. Например, все конечные простые группы исключительного лиева типа, кроме групп $E_7(q)$ при $q > 3$, а также простые группы из известного “Атласа конечных групп” [11], кроме группы A_{10}, имеют несвязный граф Грюнберга — Кегеля. Классификация конечных простых групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля была применена Лучидо [23] для получения аналогичной классификации для всех конечных почти простых групп.

Изолированные подгруппы конечных групп полностью описаны (см. [10]). Но описание конечных групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля далеко от завершения.

При изучении класса конечных групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля возникают весьма нетривиальные проблемы, связанные с модулярными представлениями конечных простых групп. Рассмотрим одну такую проблему. Пусть G — конечная группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля, не изоморфная ни группе Фробениуса, ни 2-фробениусовой группе. Тогда по теореме Грюнберга — Кегеля группа $\overline{G} := G/F(G)$ почти проста и известна ввиду результатов [4; 21; 23; 27]. Предположим, что $F(G) \neq 1$. Подгруппа F(G) является π_1-группой, а каждой связной компоненте $\pi_i(G)$ графа $\Gamma(G)$ для $i > 1$ соответствует нильпотентная изолированная $\pi_i(G)$-холлова подгруппа $X_i(G)$ группы G (см. [27]). Таким образом, любой неединичный элемент x из $X_i(G)$ $(i > 1)$ *действует без неподвижных точек* (*свободно*) на $F(G)$, т. е. $C_{F(G)}(x) = 1$. Пусть K и L — два соседних члена главного ряда группы G $(K < L)$, содержащиеся в $F(G)$. Тогда (главный) фактор $V = L/K$ является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа p (далее *p-главный фактор* группы G), и его можно рассматривать как неприводимый $GF(p)\overline{G}$-модуль (так как $C_{G/K}(V) = F(G)/K$), причем каждый неединичный элемент из $X_i(G)$ $(i > 1)$ действует свободно на V. Поэтому задача изучения строения группы G тесно связана с вызывающей самостоятельный интерес проблеме *описания неприводимых $GF(p)\overline{G}$-модулей, где некоторый элемент простого порядка $r \neq p$ из $\overline{G}$ действует свободно.* В общем случае эта важная проблема далека от решения. Нами, а именно А.С. Кондратьевым и И.В. Храмцовым, описано нормальное строение конечных 3-примарных [5] и 4-примарных [6] групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Однако в табл. 1 и теоремах 1 и 7 из [6] был пропущен случай, когда группа имеет композиционный фактор, изоморфный группе $L_3(17)$, а в теореме 6 этой статьи не рассматривался случай, когда группа имеет композиционный фактор, изоморфный $Sp_4(4)$.

В настоящей работе мы восполняем эти пробелы и тем самым поправляем описание нормального строения конечных 4-примарных групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Чтобы сформулировать основные результаты нам понадобятся следующие обозначения.

Пусть $F = GF(17)$ и $L = SL_3(F)$ либо $F = GF(4)$ и $L = Sp_4(F)$, $q = |F|$, K — алгебраическое замыкание поля F, $\mathbf{L} = SL_3(K)$ или $Sp_4(K)$ при $L = SL_3(F)$ или $Sp_4(F)$ соответственно, ω_i $(i = 1, 2)$ — фундаментальные веса группы $\mathbf{L}$. Ввиду известной теоремы Стейнберга [26] при $0 \leq a_1 + a_2 < q$ ограничение на L неприводимого K-модуля группы $\mathbf{L}$ со старшим весом $a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ неприводимо, и совокупность всех таких ограничений образует полный набор неприводимых K-модулей группы L. Далее $M(\omega)$ обозначает ограничение на L неприводимого K-модуля группы $\mathbf{L}$ со старшим весом ω из этой совокупности.

Мы доказываем две теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — конечная 4-примарная группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля, $\overline{G} = G/F(G)$ и $Soc(\overline{G}) \cong L_3(17)$. Тогда $\overline{G} \cong L_3(17)$ или $L_3(17):2$, $\pi(F(G)) \subseteq \{2, 3, 17\}$ и каждый p-главный фактор в G как $GF(p)\overline{G}$-модуль изоморфен одному из следующих модулей:*

(1) *если $p \in \{2, 3\}$, то единственному абсолютно неприводимому $GF(p)\overline{G}$-модулю размерности 306;*

(2) *если $p = 17$ и $\overline{G} \cong L_3(17)$, то одному из 76 абсолютно неприводимых $GF(17)\overline{G}$-модулей со старшим весом $a_1\omega_1 + a_2\omega_2$, где $0 \leq a_1, a_2 \leq 11$ и $a_1 - a_2 \equiv \pm 1 \pmod 3$;*

(3) *если $p = 17$ и $\overline{G} \cong L_3(17):2$, то одному из 38 абсолютно неприводимых $GF(17)\overline{G}$-модулей вида $V_1 \oplus V_2$, где V_1 и V_2 — взаимно дуальные абсолютно неприводимые $GF(17)Soc(\overline{G})$-модули из п. (2).*

Теорема 2. *Пусть G — конечная 4-примарная группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля, $\overline{G} = G/F(G)$ и $Soc(\overline{G}) \cong Sp_4(4)$. Тогда $\overline{G} \cong Sp_4(4)$, $Sp_4(4):2$ или $Sp_4(4):4$ и $F(G) = O_2(G)$. Пусть M — 2-главный фактор в G, рассматриваемый как $GF(2)\overline{G}$-модуль, и $M_K = (M|Soc(\overline{G})) \otimes K$. Тогда*

(1) *если $\overline{G} \cong Sp_4(4)$ или $Sp_4(4):2$, то либо $\dim M = 8$ и $M_K \cong M(\omega_i) \oplus M(2\omega_i)$, либо $\dim M = 16$ и $M_K \cong M(3\omega_i)$, $i = 1, 2$, либо $\dim M = 32$ и $M_K \cong M(\omega_1 + \omega_2) \oplus M(2\omega_1 + 2\omega_2)$ или $M_K \cong M(\omega_1 + 2\omega_2) \oplus M(2\omega_1 + \omega_2)$;*

(2) *если $\overline{G} \cong Sp_4(4):4 \cong \mathrm{Aut}(Sp_4(4))$, то либо $\dim M = 16$ и $M_K \cong M(\omega_1) \oplus M(2\omega_1) \oplus M(\omega_2) \oplus M(2\omega_2)$, либо $\dim M = 32$ и $M_K \cong M(3\omega_1) \oplus M(3\omega_2)$, либо $\dim M = 64$ и $M_K \cong M(\omega_1 + \omega_2) \oplus M(\omega_1 + 2\omega_2) \oplus M(2\omega_1 + 2\omega_2) \oplus M(2\omega_1 + \omega_2)$.*

Теоремы 1 и 2 доказываются в разд. 2 и 3 настоящей работы соответственно. Заметим, что случай композиционного фактора $L_3(17)$ оказался наиболее трудным в описании нормального строения конечных 4-примарных групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. В ходе доказательства вычислена 2-модулярная матрица разложения группы $L_3(17)$ (с точностью до двух параметров, каждый из которых принимает значение 1 или 2, см. табл. 6), что представляет самостоятельный интерес и может рассматриваться как вклад в “Атлас брауэровых характеров” (см. [12; 18]).

1. Обозначения, терминология и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [1; 7; 11; 12; 15; 19; 20].

Пусть X — конечная группа и p — простое число. Через $|X|_p$ обозначается порядок силовской p-подгруппы из X, а через $X_{p'}$ — множество всех p'-элементов из X, обозначаемое также через X_0, если p ясно из контекста. Если χ — отображение из X в $\mathbb{C}$, то через $\chi|^0_{X_0}$ обозначим отображение, совпадающее с χ на X_0 и принимающее значение 0 на $X \setminus X_0$. Если χ и ψ — отображения из X в $\mathbb{C}$, то положим

$$(\chi, \psi)_X = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} \chi(x)\overline{\psi(x)}.$$

Главный p-блок характеров группы X обозначается через $B_0(X)$ или просто через B_0, если X и P зафиксированы.

Рассмотрим некоторые результаты, которые используются в доказательстве теорем.

Лемма 1.1 (теорема Грюнберга — Кегеля [27, теорема A]). *Если G — конечная группа с несвязным графом простых чисел, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *G — группа Фробениуса*;

(2) *G — 2-фробениусова группа*;

(3) *G является расширением нильпотентной $\pi_1(G)$-группы посредством группы A, где $\mathrm{Inn}(P) \leq A \leq \mathrm{Aut}(P)$, P — простая неабелева группа с $s(G) \leq s(P)$ и $A/\mathrm{Inn}(P)$ — $\pi_1(G)$-группа.*

Следующий результат легко доказывается и хорошо известен.

Лемма 1.2. *Пусть G — конечная простая группа, F — поле характеристики $p > 0$, V — абсолютно неприводимый FG-модуль и β — характер Брауэра модуля V. Если g — элемент простого порядка, отличного от p, из G, то*

$$\dim C_V(g) = (\beta|_{\langle g \rangle}, 1|_{\langle g \rangle})_{\langle g \rangle} = \frac{1}{|g|} \sum_{x \in \langle g \rangle} \beta(x).$$

Лемма 1.3 [17, 68.1, 68.2]. *Пусть p — простое число и B — p-блок конечной группы G с циклической дефектной группой D порядка $p^d > 1$, $C = C_G(D)$ и $N = N_G(D)$. Тогда*

(1) *для некоторого общего делителя e чисел $p-1$ и $|N_G(D)/C_G(D)|$ блок B содержит точно e неприводимых характеров Брауэра и точно $e+(p^d-1)/e$ неприводимых обыкновенных характеров $\chi_1, \ldots, \chi_e$, χ_λ для $\lambda \in \Lambda$, где характеры χ_λ для $\lambda \in \Lambda$ совпадают на элементах из $G_{p'}$ и называются исключительными характерами*;

(2) *числа разложения блока B равны* 0 *или* 1;

(3) *граф с $e+1$ вершинами, которые соответствуют неприводимым обыкновенным характерам из B (исключительным характерам отвечает одна вершина с меткой “ex”), а ребра — неприводимым характерам Брауэра, и две вершины χ_1, χ_2 соединяются ребром φ тогда и только тогда, когда φ — общая модулярная компонента в χ_1 и χ_2, является деревом, называемым деревом Брауэра блока B.*

Нам понадобится таблица характеров группы $L := SL_3(17)$, которую мы возьмем из [25] (см. табл. 1).

Классы сопряженных элементов группы L разбиваются на семейства C_1, C_2, C_3, $C_4 = \{C_4^{(k)} \mid 1 \leq k < 16\}$, $C_5 = \{C_5^{(k)} \mid 1 \leq k < 16\}$, $C_6 = \{C_6^{(k,l,m)} \mid 1 \leq k, l, m \leq 16, k < l < m$, $k + l + m \equiv 0 \pmod{16}\}$, $C_7 = \{C_7^{(k)} \mid 1 \leq k < 288, 18 \nmid k, C_7^{(k)} = C_7^{(l)}$ при $l \equiv 17k \pmod{288}\}$, $C_8 = \{C_8^{(k)} \mid 1 \leq k < 307, C_8^{(k)} = C_8^{(l)}$ при $l \equiv 17k \pmod{307}$ или $l \equiv 289k \pmod{307}\}$. Семейство C_1 состоит из одного класса элементов порядка 1; одноэлементные семейства C_2 и C_3 состоят из классов элементов порядка 17; C_4 и C_6 — из классов неединичных 2-элементов; C_5 — из классов элементов порядков, делящихся на 34; C_7 — из классов $\{2,3\}$-элементов порядков, делящихся на 3; C_8 — из классов элементов порядка 307.

Т а б л и ц а 1

Таблица характеров группы $L_3(17)$

	C_1	C_2	C_3	$C_4^{(k)}$	$C_5^{(k)}$	$C_6^{(k,l,m)}$	$C_7^{(k)}$	$C_8^{(k)}$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_{306}	306	17	0	18	1	2	0	-1
χ_{4913}	4913	0	0	17	0	1	-1	1
$\chi_{307}^{(u)}$	307	18	1	$18\epsilon^{uk}+\epsilon^{-2uk}$	$\epsilon^{uk}+\epsilon^{-2uk}$	$\epsilon^{uk}+\epsilon^{ul}+\epsilon^{um}$	ϵ^{uk}	0
$\chi_{5219}^{(u)}$	5219	17	0	$18\epsilon^{uk}+17\epsilon^{-2uk}$	ϵ^{uk}	$\epsilon^{uk}+\epsilon^{ul}+\epsilon^{um}$	$-\epsilon^{uk}$	0
$\chi_{5526}^{(u,v,w)}$	5526	35	1	$18\sum_{u,v,w}\epsilon^{k(u+v-2w)}$	$\sum_{u,v,w}\epsilon^{k(u+v-2w)}$	$\sum_{[u,v,w]}\epsilon^{uk+vl+wm}$	0	0
$\chi_{4912}^{(u)}$	4912	-1	-1	$16\epsilon^{uk}$	$-\epsilon^{uk}$	0	B_{uk}	0
$\chi_{4608}^{(u)}$	4608	-16	1	0	0	0	0	A_{uk}

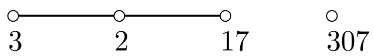
Обыкновенные неприводимые характеры группы L разбиваются на семейства $X_1=\{\chi_1\}$, $X_2=\{\chi_{306}\}$, $X_3=\{\chi_{4913}\}$, $X_4=\{\chi_{307}^{(u)}\mid 1\le u<16\}$, $X_5=\{\chi_{5219}^{(u)}\mid 1\le u<16\}$, $X_6=\{\chi_{5526}^{(u,v,w)}\mid 1\le u<v<w\le 16, u+v+w\equiv 0 \pmod{16}\}$, $X_7=\{\chi_{4912}^{(u)}\mid 1\le u\le 288, 18\nmid u, \chi_{4912}^{(u)}=\chi_{4912}^{(v)}$ при $v\equiv 17u \pmod{288}\}$, $X_8=\{\chi_{4608}^{(u)}\mid 1\le u<307, \chi_{4608}^{(u)}=\chi_{4608}^{(v)}$ при $v\equiv 17u$ $\pmod{307}$ или $v\equiv 289u \pmod{307}\}$ (нижний индекс указывает на степень характера).

Биективное соответствие $C_i\longleftrightarrow X_i$ между семействами классов и характеров сохраняет мощности семейств, равные 1, 1, 1, 15, 15, 35, 136, 102 при $i=1,2,3,4,5,6,7,8$ соответственно (всего по 306 классов и характеров).

Мы будем использовать также следующие обозначения (согласованные с [11; 25]): $\epsilon=\exp(2\pi i/16)$, $\eta=\exp(2\pi i/288)$, $\gamma=\exp(2\pi i/307)$, $z=z_9=\eta^{32}$, $y=y_9=z+z^{-1}$, $y^{*k}=z^k+z^{-k}$, $A_{uk}=\gamma^{uk}+\gamma^{17uk}+\gamma^{289uk}$, $B_{uk}=-(\eta^{uk}+\eta^{17uk})$, $\sum_{u,v,w}$ — сумма по всем циклическим перестановкам индексов u,v,w, $\sum_{[u,v,w]}$ — сумма по всем перестановкам индексов u,v,w.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда согласно лемме 1.1, [11] и [14, Table 8.1] группа $\overline{G}$ изоморфна $L:=L_3(17)=SL_3(17)$ или $\mathrm{Aut}(L)\cong L_3(17):2$ и граф $\Gamma(\overline{G})$ имеет вид



.

Отсюда $\pi_1(G)=\{2,3,17\}$ и $\pi_2(G)=\pi_2(\overline{G})=\{307\}$. Ввиду леммы 1.1 $\pi(F(G))\subseteq\{2,3,17\}$ и элемент x порядка 307 из G действует свободно на $F(G)$. Предположим, что $F(G)\ne 1$.

Пусть $O_2(G)\ne 1$. Определим неприводимые $GF(2)\overline{G}$-модули со свободным действием элемента порядка 307 из $\overline{G}$. Для этого вычислим таблицу 2-модулярных характеров Брауэра группы L и применим лемму 1.2. Напомним, что K обозначает здесь алгебраическое замыкание поля $GF(2)$.

Классы $2'$-элементов в L (всего их 109): C_1, C_2, C_3, $C_7^{(k)}$ ($k\in\{96,32,64,128\}$), $C_8^{(k)}$ ($1\le k<307, C_8^{(k)}=C_8^{(l)}$ при $l\equiv 17k \pmod{307}$ или $l\equiv 289k \pmod{307}$).

Рассмотрим разбиение на 2-блоки множества неприводимых характеров группы L.

Поскольку $|L|_2=2^9$, 2-блоков дефекта 0 группы L имеется точно 102: $\{\chi_{4608}^{(u)}\}$ ($1\le u<307, \chi_{4608}^{(u)}=\chi_{4608}^{(v)}$ при $v\equiv 17u \pmod{307}$ или $v\equiv 289u \pmod{307}$).

Как показывает табл. 1, ограничение характера $\chi_{4608}^{(u)}$ на $L_{2'}$ есть неприводимый характер Брауэра группы L, принимающий на классе $C_8^{(k)}$ элементов порядка 307 из L значение A_{uk}.

Пусть V — соответствующий ему неприводимый KL-модуль. По лемме 1.2

$$\dim C_V(x) = \Big(4608 + \sum_{1\neq g\in\langle x\rangle} \chi_{4608}^{(u)}(g)\Big)/307.$$

Но ясно, что $|A_{uk}| \le 3$ для любых u и k. Отсюда следует, что

$$\Big|\sum_{1\neq g\in\langle x\rangle} \chi_{4608}^{(u)}(g)\Big| \le 306\cdot 3 = 918 < 4608.$$

Поэтому $\dim C_V(x) > 0$.

Таким образом, можно рассматривать теперь только 2-блоки ненулевого дефекта группы L, объединение которых содержит точно 204 неприводимых характера группы L.

Из табл. 1 характеров группы L извлекается следующая

Т а б л и ц а 2

Ограничения на $L_{2'}$ характеров из 2-блоков ненулевого дефекта группы L

	C_1	C_2	C_3	$C_7^{(96)}$	$C_7^{(32)}$	$C_7^{(64)}$	$C_7^{(128)}$	$C_8^{(k)}$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_{306}	306	17	0	0	0	0	0	-1
χ_{4913}	4913	0	0	-1	-1	-1	-1	1
$\chi_{307}^{(u)}$	307	18	1	1	1	1	1	0
$\chi_{5219}^{(u)}$	5219	17	0	-1	-1	-1	-1	0
$\chi_{5526}^{(u,v,w)}$	5526	35	1	0	0	0	0	0
$\chi_{4912}^{(u)}$, $u\equiv 0 \pmod 9$	4912	-1	-1	-2	-2	-2	-2	0
$\chi_{4912}^{(u)}$, $u\equiv 3 \pmod 9$	4912	-1	-1	-2	1	1	1	0
$\chi_{4912}^{(u)}$, $u\equiv \pm1 \pmod 9$	4912	-1	-1	1	$-y$	$-y^{*2}$	$-y^{*4}$	0
$\chi_{4912}^{(u)}$, $u\equiv \pm2 \pmod 9$	4912	-1	-1	1	$-y^{*2}$	$-y^{*4}$	$-y$	0
$\chi_{4912}^{(u)}$, $u\equiv \pm4 \pmod 9$	4912	-1	-1	1	$-y^{*4}$	$-y$	$-y^{*2}$	0

Ввиду табл. 2 на классах $2'$-элементов группы L справедлива следующая система равенств между ее неприводимыми характерами для всех u, v, w:

$$\begin{aligned} \chi_{307}^{(u)} &= \chi_1 + \chi_{306},\\ \chi_{4913} &= \chi_1 + \chi_{4912}^{(9)},\\ \chi_{5219}^{(u)} &= \chi_{306} + \chi_{4913},\\ \chi_{5526}^{(u,v,w)} &= \chi_{307}^{(u)} + \chi_{5219}^{(u)}. \end{aligned} \qquad (*)$$

Поскольку порядки централизаторов элементов (а значит, и порядки классов сопряженных элементов) в L известны (см. [25, табл. 1a]), по табл. 2 легко проверить, что $(\chi|_{L_0}^0, \chi_1) \neq 0$ для каждого неприводимого характера χ из 2-блока ненулевого дефекта группы L (ввиду системы $(*)$ это достаточно сделать только для случая, когда $\chi = \chi_{4912}^{(u)}$ при $u \in \{1,2,3,4\}$). Поэтому исходя из [1, утверждение 5A11] главный 2-блок B_0 группы L — это единственный ее 2-блок ненулевого дефекта. Поскольку L имеет точно 109 классов $2'$-элементов и точно 102 блока дефекта 0, блок B_0 содержит точно 7 неприводимых характеров Брауэра, которые мы обозначим через φ_i для $1 \le i \le 7$. Пусть $\Psi = \{\psi_i \mid 1 \le i \le 7\}$ — множество ограничений на L_0 характеров χ_1, χ_{306}, $\chi_{4912}^{(9)}$, $\chi_{4912}^{(1)}$, $\chi_{4912}^{(2)}$, $\chi_{4912}^{(3)}$, $\chi_{4912}^{(4)}$. С учетом системы $(*)$ и [1, 4Д2,5Б7] элементы множества Ψ линейно независимы.

Поскольку $GL_3(17) \cong \mathbb{Z}_{16} \times SL_3(17) \cong \mathbb{Z}_{16} \times L$, то обыкновенные неприводимые характеры группы L продолжаются до обыкновенных неприводимых характеров группы $GL_3(17)$, а их соответствующие характеры Брауэра (ограничения на L_0) совпадают. Значит, множество неприводимых характеров Брауэра главного 2-блока группы $GL_3(17)$ совпадает с $\{\varphi_i \mid 1 \le i \le 7\}$. 2-модулярная матрица разложения $D = (d_{ij})$ блока B_0 является 204×7-матрицей с целыми неотрицательными элементами d_{ij}. Согласно [16, следствие 3.9] матрица D является нижней унитреугольной для подходящего упорядочения неприводимых характеров и характеров Брауэра группы L, т. е. можно считать, что $d_{ii} = 1$ и $d_{ij} = 0$ для $1 \le i < j \le 7$ и $j > i$.

Принимая во внимание табл. 2 и систему $(*)$, можно рассматривать только квадратную 7×7-матрицу линейного разложения векторов из множества $\Psi = \{\psi_i \mid 1 \le i \le 7\}$ по векторам из множества $\{\varphi_i \mid 1 \le i \le 7\}$ и считать эту матрицу нижней унитреугольной матрицей с целыми неотрицательными элементами. Тогда имеем $\psi_i = \sum_{j=1}^{i} d_{ij}\varphi_j$ и $d_{ii} = 1$ для $1 \le i \le 7$.

Исходя из результата Мортимера [24] характер Брауэра $\chi_{306}|_{L_0}$ неприводим. Поэтому можно считать, что $\psi_1 = \varphi_1 = \chi_1|_{L_0}$ и $\psi_2 = \varphi_2 = \chi_{306}|_{L_0}$. Пусть V_i обозначает неприводимый KL-модуль с характером Брауэра φ_i $(1 \le i \le 7)$.

Ввиду [14, табл. 8.2] любая параболическая максимальная подгруппа группы L изоморфна $Hol(17^2) \cong 17^2 : GL_2(17)$. Пусть P — одна из таких подгрупп и P_1 — ее дополнение Леви (изоморфное $GL_2(17)$). С учетом [19, гл. II, теорема 7.3] подгруппа P_1 содержит циклическую подгруппу (цикл Зингера) $\langle b\rangle$ такую, что $|b| = 17^2 - 1 = 288$, $C_{P_1}(b) = \langle b\rangle$, $|N_{P_1}(\langle b\rangle) : \langle b\rangle| = 2$ и $\langle b\rangle$ действует транзитивно на неединичных элементах группы $O_{17}(P) \cong 17^2$. Положим $M = O_{17}(P)\langle b\rangle$ и найдем таблицу 2-модулярных характеров Брауэра группы Фробениуса M.

Вычислим сначала таблицу обыкновенных характеров группы M. В M всего 17^2 классов сопряженных элементов: 288 классов с представителями b^k, где $0 \le k < 288$, и один класс элементов порядка 17 с представителем a из $O_{17}(M)$. Множество неприводимых характеров группы M состоит из 288 линейных характеров 1_j $(0 \le j < 288)$ с ядром $O_{17}(M)$ и одного ее точного характера, который мы обозначим через τ. Можно считать (см., например, [1, табл. 1 на с. 353]), что $1_j(b^k) = \eta^{jk}$, где $0 \le j,k < 288$. Найдем характер τ. Поскольку $|M| = 17^2(17^2-1) = 17^2 - 1 + \tau(1)^2$, получаем $\tau(1) = 288$. Применяя к таблице характеров группы M второе соотношение ортогональности для характеров, получим систему равенств

$$288 + 288\tau(a) = 0,\ \sum_{j=0}^{287} \eta^{jk} + 288\tau(b^k) = 0\ (0 < k < 288).$$

Из первого равенства этой системы получаем $\tau(a) = -1$, а из второго равенства имеем $\tau(b^k) = -\sum_{j=0}^{287} \eta^{jk}/288 = 0$ $(0 < k < 288)$. Таким образом, таблица обыкновенных характеров группы M принимает следующий вид.

Таблица 3

Таблица характеров группы Фробениуса $M \cong 17^2 : \mathbb{Z}_{288}$

	1	b^k $(0 < k < 288)$	a
1_j $(0 \le j < 288)$	1	η^{jk}	1
τ	288	0	-1

Всего имеется 10 классов $2'$-элементов в M с представителями 1, b^{96}, b^{-96}, b^{32}, b^{-32}, b^{64}, b^{-64}, b^{128}, b^{-128} и a. Из табл. 3 извлекается следующая

Таблица 4

Ограничения на $M_{2'}$ характеров группы M

	1	b^{96}	b^{-96}	b^{32}	b^{-32}	b^{64}	b^{-64}	b^{128}	b^{-128}	a
$1_j,\ j \equiv 0 \pmod 9$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$1_j,\ j \equiv 1 \pmod 9$	1	z^3	z^{-3}	z	z^{-1}	z^2	z^{-2}	z^4	z^{-4}	1
$1_j,\ j \equiv -1 \pmod 9$	1	z^{-3}	z^3	z^{-1}	z	z^{-2}	z^2	z^{-4}	z^4	1
$1_j,\ j \equiv 2 \pmod 9$	1	z^{-3}	z^3	z^2	z^{-2}	z^4	z^{-4}	z^{-1}	z	1
$1_j,\ j \equiv -2 \pmod 9$	1	z^3	z^{-3}	z^{-2}	z^2	z^{-4}	z^4	z	z^{-1}	1
$1_j,\ j \equiv 3 \pmod 9$	1	1	1	z^3	z^{-3}	z^{-3}	z^3	z^3	z^{-3}	1
$1_j,\ j \equiv -3 \pmod 9$	1	1	1	z^{-3}	z^3	z^3	z^{-3}	z^{-3}	z^3	1
$1_j,\ j \equiv 4 \pmod 9$	1	z^3	z^{-3}	z^4	z^{-4}	z^{-1}	z	z^{-2}	z^2	1
$1_j,\ j \equiv -4 \pmod 9$	1	z^{-3}	z^3	z^{-4}	z^4	z	z^{-1}	z^2	z^{-2}	1
τ	288	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

Поскольку $|M_2| = 2^5 = 32$ и $288 = 32 \cdot 9$, характер τ образует 2-блок дефекта 0 группы M. Поэтому характер Брауэра $\tau|M_{2'}$ неприводим, для упрощения записи обозначим его через 288. Положим также $1_{-j} = \overline{1_j}$ для $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ввиду табл. 4 всего имеется 10 неприводимых 2-модулярных характеров Брауэра группы M: ограничения на $M_{2'}$ характеров 1_j для $j \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4\}$ и характер Брауэра 288.

В дальнейшем нам понадобятся разложения 2-модулярных характеров Брауэра $\psi_j|_{M_0}$ ($2 \leq j \leq 7$) группы M в суммы неприводимых модулярных компонент. Поскольку $z^3 + z^{-3} = 2\cos\ 2\pi/3 = -1$, $z + z^{-1} = 2\cos\ 2\pi/9 = y$, $z^2 + z^{-2} = 2\cos\ 4\pi/9 = y^{*2}$ и $z^4 + z^{-4} = 2\cos\ 8\pi/9 = y^{*4}$, все значения характеров Брауэра $\psi_j|_{M_0}$ ($2 \leq j \leq 7$) принадлежат полю действительных чисел. Поэтому кратности вхождения в каждый такой характер Брауэра комплексных недействительных компонент 1_j и 1_{-j} совпадают для $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Обозначим ограничения на $M_{2'}$ характеров 1_0, $1_3 + 1_{-3}$, $1_1 + 1_{-1}$, $1_2 + 1_{-2}$ и $1_4 + 1_{-4}$ через 1, 2_1, 2_2, 2_3 и 2_4 соответственно.

Без ограничения общности можно считать, что выполняются следующие включения классов сопряженных $2'$-элементов подгруппы M в классы сопряженных $2'$-элементов группы L: $b^{96}, b^{-96} \in C_7^{96}$, $b^{32}, b^{-32} \in C_7^{32}$, $b^{64}, b^{-64} \in C_7^{64}$, $b^{128}, b^{-128} \in C_7^{128}$, $a \in C_2$ (последнее включение выполняется ввиду [25, табл. 1a], так как a — трансвекция в L).

Рассмотрим разложение 2-модулярного характера Брауэра $\psi_i|_{M_0}$ ($2 \leq i \leq 7$) группы M в сумму модулярных компонент:

$$\psi_i|_{M_0} = x_0 \cdot 1 + \sum_{j=1}^{4} x_j \cdot 2_j + t \cdot 288$$

для некоторых неотрицательных целых чисел x_k ($0 \leq k \leq 4$), t.

Для удобства проверки приведем в виде таблицы значения характеров Брауэра 1, 2_1, 2_2, 2_3, 2_4 и 288 на классах $2'$-элементов группы M.

Таблица 5

Таблица значений некоторых 2-модулярных характеров Брауэра группы M

	1	$b^{\pm 96}$	$b^{\pm 32}$	$b^{\pm 64}$	$b^{\pm 128}$	a
1	1	1	1	1	1	1
2_1	2	2	-1	-1	-1	2
2_2	2	-1	y	y^{*2}	y^{*4}	2
2_3	2	-1	y^{*2}	y^{*4}	y	2
2_4	2	-1	y^{*4}	y	y^{*2}	2
288	288	0	0	0	0	-1

Рассмотрим сначала разложение $\psi_2|_{M_0} = x_0 \cdot 1 + \sum_{j=1}^4 x_j \cdot 2_j + t \cdot 288$. Вычисляя согласно табл. 2 и 5 значения левой и правой части этого равенства на инцидентных классах $2'$-элементов групп L и M, получим следующую систему из 6 уравнений с 6 целыми неотрицательными неизвестными:

$306 = x_0 + 2\sum_{j=1}^4 x_j + 288t,$
$0 = x_0 + 2x_1 - \sum_{j=2}^4 x_j,$
$0 = x_0 - x_1 + x_2 y + x_3 y^{*2} + x_4 y^{*4},$
$0 = x_0 - x_1 + x_2 y^{*2} + x_3 y^{*4} + x_4 y,$
$0 = x_0 - x_1 + x_2 y^{*4} + x_3 y + x_4 y^{*2},$
$17 = x_0 + 2\sum_{j=1}^4 x_j - t.$

Вычитая из первого уравнения системы ее последнее уравнение, получим уравнение
$289 = 289t$, откуда $t = 1$.

Теперь первое уравнение влечет, что $18 = x_0 + 2\sum_{j=1}^4 x_j$.

Складывая третье, четвертое и пятое уравнения системы, имеем уравнение
$0 = 3(x_0 - x_1) + \sum_{j=2}^4 x_j(y + y^{*2} + y^{*4})$.

Легко видеть, что $y + y^{*2} + y^{*4} = 0$, поэтому $3(x_0 - x_1) = 0$ и, значит, $x_0 = x_1$.

Второе уравнение влечет, что $0 = x_0 + 3x_1 - \sum_{j=1}^4 x_j$ и, следовательно, $\sum_{j=1}^4 x_j = 4x_0$. Но тогда $x_0 + 2\sum_{j=1}^4 x_j = 9x_0 = 18$ и, значит, $x_0 = 2 = x_1$ и $\sum_{j=2}^4 x_j = 6$. Теперь, используя третье, четвертое и пятое уравнения системы и равенство $y + y^{*2} + y^{*4} = 0$, легко показать, что $x_2 = x_3 = x_4 = 2$.

Таким образом, получаем разложение

$\psi_2|_{M_0} = \chi_{306}|_{M_0} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2_1 + 2 \cdot 2_2 + 2 \cdot 2_3 + 2 \cdot 2_4 + 288.$

Рассуждая аналогично (системы отличаются только левой частью), выводим остальные разложения:

$\chi_{4912}^{(1)}|_{M_0} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2_1 + 2_2 + 2 \cdot 2_3 + 2 \cdot 2_4 + 17 \cdot 288,$

$\chi_{4912}^{(2)}|_{M_0} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2_1 + 2 \cdot 2_2 + 2_3 + 2 \cdot 2_4 + 17 \cdot 288,$

$\chi_{4912}^{(3)}|_{M_0} = 2 \cdot 1 + 2_1 + 2 \cdot 2_2 + 2 \cdot 2_3 + 2 \cdot 2_4 + 17 \cdot 288,$

$\chi_{4912}^{(4)}|_{M_0} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2_1 + 2 \cdot 2_2 + 2 \cdot 2_3 + 2_4 + 17 \cdot 288,$

$\chi_{4912}^{(9)}|_{M_0} = 2 \cdot 2_1 + 2 \cdot 2_2 + 2 \cdot 2_3 + 2 \cdot 2_4 + 17 \cdot 288.$

Из всех этих разложений следует, что $d_{i1} \leq 2$ и $d_{i2} = 0$ при $i \geq 3$. Кроме того, ввиду [14, табл. 8.2] группа $L_3(17)$ не изоморфна подгруппе из $GL_2(K)$, поэтому имеем $deg\ \phi_i > 2$ при $i > 1$. Из предыдущего следует, что $deg\ \phi_3 = 4912 - d_{31} \geq 4912 - 2 = 4910$. Аналогично рассуждая, последовательно показываем, что $deg\ \phi_4 \geq 4910$ и $d_{i3} = 0$ при $i \geq 4$, $deg\ \phi_5 \geq 4910$ и $d_{i4} = 0$ при $i \geq 5$, $deg\ \phi_6 \geq 4910$ и $d_{i5} = 0$ при $i \geq 6$, $deg\ \phi_7 \geq 4910$ и $d_{76} = 0$. Теперь согласно приведенным выше разложениям можно считать, что $\psi_3 = \phi_3 = \chi_{4912}^{(9)}|_{L_0}$, $\psi_4 = \chi_{4912}^{(3)}|_{L_0}$, $\psi_5 = \chi_{4912}^{(1)}|_{L_0}$, $\psi_6 = \chi_{4912}^{(2)}|_{L_0}$ и $\psi_7 = \chi_{4912}^{(4)}|_{L_0}$, причем $d_{i1} \leq 2$ при $4 \leq i \leq 7$. Поскольку значения каждого характера Брауэра ϕ_5, ϕ_6 и ϕ_7 порождают над $\mathbb{Z}$ кольцо $\mathbb{Z}(y, y^{*2}, y^{*4})$, вследствие [12, приложение 1, с. 285] поля определения этих характеров Брауэра равны $GF(8)$ и, таким образом, в силу табл. 2 и [20, теорема VII.1.16] эти характеры Брауэра алгебраически сопряжены. Отсюда получаем, что $d_{51} = d_{61} = d_{71}$. Обозначим неопределенные параметры d_{41} и d_{51} через α и β соответственно. Тогда ввиду табл. 2 и системы $(*)$ матрица разложения характеров из блока B_0 имеет следующий вид.

Таблица 6

Матрица разложения характеров из главного 2-блока группы L

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7
χ_1	1	0	0	0	0	0	0
χ_{306}	0	1	0	0	0	0	0
χ_{4913}	1	0	1	0	0	0	0
$\chi_{307}^{(u)}$	1	1	0	0	0	0	0
$\chi_{5219}^{(u)}$	1	1	1	0	0	0	0
$\chi_{5526}^{(u,v,w)}$	2	2	1	0	0	0	0
$\chi_{4912}^{(u)}$, $u \equiv 0 \pmod 9$	0	0	1	0	0	0	0
$\chi_{4912}^{(u)}$, $u \equiv 3 \pmod 9$	α	0	0	1	0	0	0
$\chi_{4912}^{(u)}$, $u \equiv \pm 1 \pmod 9$	β	0	0	0	1	0	0
$\chi_{4912}^{(u)}$, $u \equiv \pm 2 \pmod 9$	β	0	0	0	0	1	0
$\chi_{4912}^{(u)}$, $u \equiv \pm 4 \pmod 9$	β	0	0	0	0	0	1

Если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, то ввиду табл. 6 характер ψ_4 или характер ψ_5 не принадлежит блоку B_0, что не так. Поэтому $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$.

Согласно лемме 1.2 и табл. 2 и 6 для элемента x порядка 307 из L и $i \geq 3$ имеем

$$\dim C_{V_i}(x) = (\phi_i(1) + 306\phi_i(g))/307 = (4912 - d_{i1} - 306 d_{i1})/307 = 16 - d_{i1} \geq 14.$$

Итак, существует единственный неприводимый KL-модуль со свободным действием элемента порядка 307 из L, это модуль V_2, он имеет размерность 306. Ввиду [20, теорема VII.1.16] этот модуль реализуется над полем $GF(2)$.

Пункт (1) теоремы 1 для случая $p = 2$ доказан. □

Пусть $O_3(G) \neq 1$. Определим неприводимые $GF(3)\overline{G}$-модули со свободным действием элемента порядка 307 из $\overline{G}$. Пусть K — алгебраическое замыкание поля $GF(3)$. Силовские 3-подгруппы в L имеют порядок 9, а число классов $3'$-элементов в L равно 178.

Рассмотрим разбиение на 3-блоки множества неприводимых характеров группы L. Имеется точно 138 блоков дефекта 0: $\{\chi_{306}\}$, $\{\chi_{5526}^{(u,v,w)}\}$ и $\{\chi_{4608}^{(u)}\}$. Остальные блоки имеют максимальный дефект 2 (их объединение состоит из 168 характеров).

Ограничение характера χ_{306} на $L_{3'}$ есть неприводимый характер Брауэра группы L, принимающий на элементах порядка 307 из L значение -1. Если V — соответствующий ему неприводимый KL-модуль, то по лемме 1.2 имеем $\dim C_V(x) = 0$.

Ограничение характера $\chi_{5526}^{(u,v,w)}$ на $L_{3'}$ есть неприводимый характер Брауэра группы L, принимающий на элементах порядка 307 из L значение 0. Если V — соответствующий ему неприводимый KL-модуль, то по лемме 1.2 имеем $\dim C_V(x) = 5526/307 = 18 > 0$.

Ограничение характера $\chi_{4608}^{(u)}$ на $L_{3'}$ есть неприводимый характер Брауэра группы L, принимающий на классе $C_8^{(k)}$ элементов порядка 307 из L значение A_{uk}. Пусть V — соответствующий ему неприводимый KL-модуль. Рассуждая, как ранее при анализе ограничений таких характеров на L_2', получим, что $\dim C_V(x) > 0$.

Пусть B — 3-блок дефекта 2 группы L и D — его дефектная группа. Тогда D — силовская 3-подгруппа в L. Как мы видели выше, параболическая максимальная подгруппа P группы L содержит циклическую подгруппу $\langle b \rangle$ такую, что $|b| = 17^2 - 1 = 288$, $C_P(b) = \langle b \rangle$ и

$|N_P(\langle b\rangle) : \langle b\rangle| = 2$. Можно считать, что $D = O_3(\langle b\rangle)$ и, значит, D — циклическая группа порядка 9. Пусть $D = \langle d\rangle$. Тогда ввиду [25, табл. 1a] элементы d и d^3 принадлежат некоторым классам из семейства C_7 и $C_L(d^3) = \langle b\rangle$. Отсюда следует, что $|N_L(D) : C_L(D)| = 2$. По лемме 1.3 блок B содержит точно 2 неприводимых характера Брауэра и точно 6 обыкновенных неприводимых характера, причем 4 из них исключительные (т. е. совпадают на $L_{3'}$), а дерево Брауэра блока B есть 3-цепь. Но тогда табл. 1 показывает, что эти характеры Брауэра могут быть только ограничениями на $L_{3'}$ характеров χ_1, $\chi_{307}^{(u)}$ или $\chi_{4912}^{(u)}$. Но все эти характеры, кроме χ_1, принимают на элементах порядка 307 из L значение 0. Поэтому в силу леммы 1.2 элемент x имеет ненулевую неподвижную точку на соответствующих им неприводимых KL-модулях.

Итак, существует единственный неприводимый KL-модуль со свободным действием элемента порядка 307 из L, он имеет размерность 306. Ввиду [20, теорема VII.1.16] этот модуль реализуется над полем $GF(3)$.

Пункт (1) теоремы 1 для случая $p = 3$ доказан. □

Пусть $O_{17}(G) \neq 1$. Определим неприводимые $GF(17)\overline{G}$-модули со свободным действием элемента порядка 307 из $\overline{G}$. Для этого достаточно определить неприводимые $GF(17)\overline{L}$-модули, на которых элемент порядка 307 из L имеет ненулевую неподвижную точку, т. е. имеет собственное значение 1.

Пусть K — алгебраическое замыкание поля $GF(17)$, $\mathbf{L} = SL_3(K)$, α_i для $i = 1, 2$ — простые корни группы $\mathbf{L}$, ε_j для $1 \leq j \leq 3$ — веса стандартного (естественного) $K\mathbf{L}$-модуля. Пусть φ — неприводимое представление группы $\mathbf{L}$ над полем K со старшим весом $\omega(\varphi)$ и системой весов $\mathbf{X}(\varphi)$, а φ^* — представление, дуальное представлению φ. Тогда $\omega(\varphi) = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ для некоторых неотрицательных целых чисел a_1 и a_2 и $\omega(\varphi^*) = a_2\omega_1 + a_1\omega_2$. Известно, что группа $SL_n(q)$ содержит циклическую подгруппу порядка $(q^n - 1)/(q - 1)$ (цикл Зингера) и каждая такая подгруппа действует неприводимо на ее естественном модуле (см. [19, гл. II, теорема 7.3]). Таким образом, цикл Зингера группы L имеет порядок 307.

Неприводимое рациональное представление группы $\mathbf{L}$ называется 17-ограниченным, если коэффициенты его старшего веса меньше 17. В силу сказанного во введении задачи о собственных значениях образов фиксированных элементов группы L в ее неприводимых K-представлениях сводятся к аналогичным задачам для 17-ограниченных представлений группы $\mathbf{L}$. Мы докажем следующее

Предложение 2.1. *Пусть φ — 17-ограниченное неприводимое представление группы $\mathbf{L}$ со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ и $x \in L$ — элемент порядка 307. Элемент $\varphi(x)$ имеет собственное значение 1 тогда и только тогда, когда либо $a_1 - a_2 \equiv 0 \pmod 3$, т. е. вес ω радикален, либо множество $\{a_1, a_2\}$ совпадает с одним из следующих:*

$$\{12,11\},\{13,9\},\{13,11\},\{13,12\},\{14,7\},\{14,10\},\{14,12\},\{14,13\},\{15,5\},\{15,8\},\{15,10\},$$

$$\{15,11\},\{15,13\},\{15,14\},\{16,3\},\{16,6\},\{16,9\},\{16,11\},\{16,12\},\{16,14\},\{16,15\}.$$

В частности, $\varphi(x)$ имеет собственное значение 1, если a_1 и a_2 оба больше 11, и не имеет, когда вес ω не радикален и оба числа a_1 и a_2 меньше 12.

Докажем сначала две вспомогательные леммы.

Лемма 2.1. *Вес $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ группы $\mathbf{L}$ радикален тогда и только тогда, когда*

$$a_1 - a_2 \equiv 0 \pmod 3.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это следует из известных формул, выражающих фундаментальные веса групп типа A_n в виде линейных комбинаций простых корней (см. [2, гл. VI, табл. 1]). □

Лемма 2.2. *Если $\lambda = b_1\omega_1 + b_2\omega_2$ — вес неприводимого представления φ группы* **L**, *то веса $-\lambda$ и $b_2\omega_1 + b_1\omega_2$ принадлежит $\mathbf{X}(\varphi^*)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение леммы непосредственно вытекает из определения дуального представления (см. [22, ч. I, разд. 2.11]). Ввиду [8, лемма 73] $\omega(\varphi^*) = -w_0\omega(\varphi)$, где w_0 — единственный элемент группы Вейля группы **L**, который все положительные корни переводит в отрицательные. Поскольку $w_0(\alpha_i) = -\alpha_{3-i}$ при $i = 1, 2$ [2, гл. VI, табл. 1] , то представление φ^* эквивалентно представлению, получающемуся из φ с помощью графового морфизма группы **L**. Отсюда следует второе утверждение леммы. □

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 2.1. Пусть x — элемент порядка 307 из L. Так как x является элементом группы **L**, неподвижным относительно ее морфизма Фробениуса, связанного с возведением элементов поля K в степень 17, то его собственные значения в естественном **G**-модуле равны t, t^{17}, t^{289}, где t — элемент порядка 307 из K. Фиксируем максимальный тор группы **L**, содержащий x. Рассматривая веса группы **L** как веса этого тора, можно считать, что $\varepsilon_1(x) = t$ и $\varepsilon_2(x) = t^{17}$. Далее $\langle\lambda, \beta\rangle$ — значение веса λ на корне β (как в [8, §1]). Пусть $\lambda = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 \in \mathbf{X}(\varphi)$. Из сказанного выше следует, что $\lambda(x) = t^{a+17b}$. Поэтому $\lambda(x) = 1$ тогда и только тогда, когда

$$a + 17b \equiv 0 \pmod{307}. \tag{2.1}$$

Значит, для доказательства предложения 2.1 достаточно выяснить, когда множество $\mathbf{X}(\varphi)$ содержит вес λ, удовлетворяющий условию (2.1).

Пусть λ — такой вес. Переходя к дуальному представлению, если потребуется, и используя лемму 2.2, можно считать, что $a + 17b \geq 0$ и $a \geq 0$ при $a + 17b = 0$. Заметим, что

$$\lambda = (a - b)\omega_1 + b\omega_2, \quad \langle\lambda, \alpha_2\rangle = b, \quad \langle\lambda, \alpha_1 + \alpha_2\rangle = a.$$

Так как $\alpha_1 + \alpha_2$ — максимальный корень группы **L** и все ее корни одной длины, то в силу [13, лемма 2.2] получаем, что $|\langle\lambda, \alpha_2\rangle|$ и $|\langle\lambda, \alpha_1 + \alpha_2\rangle| \leq \langle\omega, \alpha_1 + \alpha_2\rangle = a_1 + a_2 \leq 32$. Поэтому $|a|, |b| \leq 32$ и, значит, $a + 17b = 0$ или 307. При $\lambda = 0$ вес ω радикален, в этой ситуации используем лемму 2.1.

Если $a + 17b = 0$ и $a > 0$, то $a = 17$ и $b = -1$ и, следовательно, $\lambda = 18\omega_1 - \omega_2$, и вес λ лежит в одной орбите относительно группы Вейля с доминантным весом $\mu = 17\omega_1 + \omega_2$.

Пусть $a + 17b = 307$. Так как $|a| \leq 32$ и $a \equiv 1 \pmod{17}$, то $a \in \{-16, 1, 18\}$. При $a = -16$ получаем, что $b = 19$ и $\langle\lambda, \alpha_1\rangle = -35$; это приводит к противоречию. Если $a = 1$, то $b = 18$ и вес $\lambda = -17\omega_1 + 18\omega_2$ опять лежит в одной орбите относительно группы Вейля с μ. При $a = 18$ имеем $b = 17$ и $\lambda = \omega_1 + 17\omega_2$. Ввиду леммы 2.1 в этом случае $\lambda \in \mathbf{X}(\varphi)$ тогда и только тогда, когда $\mu \in \mathbf{X}(\varphi^*)$.

Теперь осталось определить, для каких 17-ограниченных представлений φ вес μ принадлежит $\mathbf{X}(\varphi)$. В силу результатов [9] множество $\mathbf{X}(\varphi)$ совпадает с аналогичным множеством для неприводимого представления группы типа A_2 (и ее алгебры Ли) в характеристике 0 со старшим весом $\omega(\varphi)$. Поэтому из описания доминантных весов неприводимых представлений полупростых алгебр Ли в характеристике 0 (см. [3, гл. VIII, §7, предложение 5]) следует, что $\mu \in \mathbf{X}(\varphi)$ тогда и только тогда, когда уравнение

$$\omega - \mu = x\alpha_1 + y\alpha_2 \tag{2.2}$$

имеет решение с целыми неотрицательными числами x и y. Уравнение (2.2) равносильно системе двух равенств

$$a_1 = 17 + 2x - y, \quad a_2 = 1 + 2y - x. \tag{2.3}$$

Пусть $0 \leq a_1, a_2 \leq 16$, и система (2.3) имеет искомое решение. Тогда выполняются следующие соотношения:

$$2x - y < 0, \quad 2y - x \leq 15, \quad 2x - y \equiv 2y - x (\mod 3), \quad 2y - x \geq -2(2x - y). \tag{2.4}$$

Отсюда следует, что $2x - y \geq -7$. Теперь нетрудно заключить, что справедливо одно из следующих утверждений:

$a)$ $2x - y = -7, 2y - x = 14, x = 0, y = 7, (a_1, a_2) = (10, 15)$;

$b)$ $2x - y = -6, 2y - x = 12, x = 0, y = 6, (a_1, a_2) = (11, 13)$;

$c)$ $2x - y = -6, 2y - x = 15, x = 1, y = 8, (a_1, a_2) = (11, 16)$;

$d)$ $2x - y = -5, 2y - x = 10, x = 0, y = 5, (a_1, a_2) = (12, 11)$;

$e)$ $2x - y = -5, 2y - x = 13, x = 1, y = 7, (a_1, a_2) = (12, 14)$;

$f)$ $2x - y = -4, 2y - x = 8, x = 0, y = 4, (a_1, a_2) = (13, 9)$;

$g)$ $2x - y = -4, 2y - x = 11, x = 1, y = 6, (a_1, a_2) = (13, 12)$;

$h)$ $2x - y = -4, 2y - x = 14, x = 2, y = 8, (a_1, a_2) = (13, 15)$;

$i)$ $2x - y = -3, 2y - x = 6, x = 0, y = 3, (a_1, a_2) = (14, 7)$;

$j)$ $2x - y = -3, 2y - x = 9, x = 1, y = 5, (a_1, a_2) = (14, 10)$;

$k)$ $2x - y = -3, 2y - x = 12, x = 2, y = 7, (a_1, a_2) = (14, 13)$;

$l)$ $2x - y = -3, 2y - x = 15, x = 3, y = 9, (a_1, a_2) = (14, 16)$;

$m)$ $2x - y = -2, 2y - x = 4, x = 0, y = 2, (a_1, a_2) = (15, 5)$;

$n)$ $2x - y = -2, 2y - x = 7, x = 1, y = 4, (a_1, a_2) = (15, 8)$;

$o)$ $2x - y = -2, 2y - x = 10, x = 2, y = 6, (a_1, a_2) = (15, 11)$;

$p)$ $2x - y = -2, 2y - x = 13, x = 3, y = 8, (a_1, a_2) = (15, 14)$;

$q)$ $2x - y = -1, 2y - x = 2, x = 0, y = 1, (a_1, a_2) = (16, 3)$;

$r)$ $2x - y = -1, 2y - x = 5, x = 1, y = 3, (a_1, a_2) = (16, 6)$;

$s)$ $2x - y = -1, 2y - x = 8, x = 2, y = 5, (a_1, a_2) = (16, 9)$;

$t)$ $2x - y = -1, 2y - x = 11, x = 3, y = 7, (a_1, a_2) = (16, 12)$;

$u)$ $2x - y = -1, 2y - x = 14, x = 4, y = 9, (a_1, a_2) = (16, 15)$.

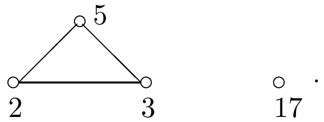
Отсюда и из леммы 2.1 вытекает утверждение предложения, а значит, п. (2) теоремы 1. □

Пункт (3) теоремы 1 следует из п. (2), так как ограничения на L двух взаимно дуальных 17-ограниченных неприводимых представлений группы $\mathbf{L}$ переставляются внешним автоморфизмом группы L. □

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда в силу леммы 1.1 и [6, табл. 1] $\overline{G} \cong Sp_4(4)$, $Sp_4(4):2$ или $Sp_4(4):4$ и граф $\Gamma(\overline{G})$ имеет вид



Отсюда $\pi_1(G) = \{2, 3, 5\}$ и $\pi_2(G) = \pi_2(\overline{G}) = \{17\}$. Ввиду леммы 1.1 $\pi(F(G)) \subseteq \{2, 3, 5\}$ и элемент порядка 17 из G действует свободно на $F(G)$. Предположим, что $F(G) \neq 1$. Применяя лемму 1.2 и таблиц 3- и 5-модулярных характеров Брауэра группы $Sp_4(4)$ из [12], получим, что не существует неприводимых $Soc(\overline{G})$-модулей в характеристиках 3 и 5 со свободным действием элемента порядка 17. Поэтому $F(G) = O_2(G)$.

Положим $G_1 = Soc(\overline{G})$. Пусть x — элемент порядка 17 из G_1. Тогда в стандартном KG_1-модуле элемент x имеет собственные значения t, t^4, t^{-1} и t^{-4}, где t — элемент порядка 17 из K^*. Известно, что все веса неприводимого $Sp_4(K)$-модуля со старшим весом ω_2 лежат в орбите старшего веса относительно группы Вейля. Положим

$$\mu_1 = \omega_1, \quad \mu_2 = 2\omega_1, \quad \mu_3 = \omega_2, \quad \mu_4 = 2\omega_2, \quad \mu_5 = \omega_1 + \omega_2,$$

$$\mu_6 = \omega_1 + 2\omega_2, \quad \mu_7 = 2\omega_1 + 2\omega_2, \quad \mu_8 = 2\omega_1 + \omega_2, \quad \mu_9 = 3\omega_1, \quad \mu_{10} = 3\omega_1,$$

$M_i = M(\mu_i)$ для $1 \leq i \leq 10$. Обозначим через φ_i представление, реализующееся в модуле M_i. Используя теорему Стейнберга о тензорном произведении, а также теорему 28 и следствие теоремы 41 из [8], можно определить собственные значения элемента x на всех неприводимых KG_1-модулях. Это позволяет установить, что множество S модулей со свободным действием элемента x (с точностью до изоморфизма) состоит из модулей M_i, $1 \leq i \leq 10$. Из [8, теорема 28] вытекает, что орбиты действия группы $\mathrm{Out}(G_1) \cong \mathbb{Z}_4$ на множестве S имеют вид

$$\{M_1, M_2, M_3, M_4\}, \quad \{M_5, M_6, M_7, M_8\}, \quad \{M_9, M_{10}\}.$$

Известно, что $GF(4)$ является полем разложения всех неприводимых K-представлений группы G_1 (см. [26]). Представления φ_9 и φ_{10} могут быть реализованы над полем $GF(2)$, так как они инвариантны относительно морфизма, определяемого возведением элементов поля K в квадрат. При $1 \leq i \leq 10$ представление φ_i не инвариантно относительно этого морфизма и, значит, не может быть реализовано над $GF(2)$. Чтобы завершить доказательство, используем [20, теорема VII.1.16].

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоногов В.А.** Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990. 380 с.
2. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. Гл. IV–VI. М.: Мир, 1972. 334 с.
3. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли, гл. VII–VIII. М.: Мир, 1978. 342 с.
4. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
5. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных трипримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 150–158.
6. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 142–159.
7. **Кэртис Ч., Райнер И.** Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969. 668 с.
8. **Р. Стейнберг R.** Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975. 262 с.
9. **И.Д. Супруненко.** Сохранение систем весов неприводимых представлений алгебраической группы и алгебры Ли типа A_l с ограниченными старшими весами при редукции по модулю p // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1983. № 2. С. 18–22.
10. **Arad Z., W. Herford W.** Classification of finite groups with a CC-subgroup // Comm. Algebra 2004. Vol. 32, no. 6. P. 2087–2098.
11. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
12. An atlas of Brauer characters / C. Jansen [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1995. 327 p.
13. **Baranov A.A., Osinovskaya A.A., Suprunenko I.D.** Modular representations of the special linear groups with small weight multiplicities // J. Algebra. 2014. Vol. 397. P. 225–251.
14. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407).

15. **Craven D.A.** Representation theory of finite groups: a guidebook. Universitext. Cham: Springer, 2019. 294 p.
16. **Dipper R.** On the decomposition matrices of the finite general linear groups II // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 292, no. 1. P. 123–133.
17. **Dornhoff L.** Group representation theory. Pt. B: modular representation theory. NY: Marcell Dekker, 1972. 256 p.
18. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Ver. 4.11.1. 2021. URL: http://www.gap-system.org .
19. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin etc.: Springer, 1967. 453 S.
20. **Huppert B., Blackburn N.** Finite groups II. Berlin: Springer-Verlag, 1982. 531 p.
21. **Iiyori N., Yamaki H.** Prime graph components of the simple groups of Lie type over the fields of even characteristic // J. Algebra. 1993. Vol. 155, no. 2. P. 335–343; Corrigenda // J. Algebra. 1996. Vol. 181, no. 2. P. 659.
22. **Jantzen J.C.** Representations of algebraic groups, Second Edition. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2003. 576 p.
23. **Lucido M.S.** Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1999. Vol. 102. P. 1–22; addendum // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 2002. Vol. 107. P. 189–190.
24. **Mortimer B.** The modular permutation representations of the known doubly transitive groups // Proc. London Math. Soc. (3) 1980. Vol. 41, no. 1. P. 1–20.
25. **Simpson W., Frame J.S.** The character tables for $SL(3,q)$, $SU(3,q^2)$, $PSL(3,q)$, $PSU(3,q^2)$ // Canad. J. Math. 1973. Vol. 25, no. 3 P. 486–494.
26. **R. Steinberg.** Representations of algebraic groups // Nagoya Math. J. 1963. Vol. 22. P. 33–56.
27. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.

Поступила 16.11.2021
После доработки 14.12.2021
Принята к публикации 20.12.2021

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Супруненко Ирина Дмитриевна
д-р физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник
Институт математики НАН Беларуси
г. Минск, Беларусь
e-mail: suprunenko@im.bas-net.by

Храмцов Игорь Владимирович
канд. физ.-мат. наук
старший инженер-программист
ООО “Яндекс Технологии”
г. Москва
e-mail: ihramtsov@gmail.com

REFERENCES

1. Belonogov V.A. *Predstavleniya i kharaktery v teorii konechnykh grupp* [Representations and characters in the theory of finite groups]. Sverdlovsk: UrO AN SSSR Publ., 1990, 380 p. ISBN: 9785769100758.

2. Bourbaki N. *Groupes et algèbres de Lie* (*Chapt. IV–VI*). Paris: Hermann, 1968, 282 p. doi: 10.1007/978-3-540-34491-9 . Translated into Russian under the title *Gruppy i algebry Li* (*glavy IV–VI*, Moscow: Mir Publ., 1972, 334 p.

3. Bourbaki N. *Groupes et algèbres de Lie, Chaps. VII–VIII.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2006, 265 p. doi: 10.1007/978-3-540-33977-9 . Translated into Russian under the title *Gruppy i algebry Li, glavy VII–VIII*, Moscow: Mir Publ., 1978, 342 p.

4. Kondrat'ev A.S. Prime graph components of finite simple groups. *Math. USSR Sb.*, 1990, vol. 67, no. 1, pp. 235–247. doi: 10.1070/SM1990v06n01ABEN001363 .

5. Kondrat'ev A.S., Khramtsov I.V. On finite triprimary groups. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 3, pp. 150–158 (in Russian).

6. Kondrat'ev A.S., Khramtsov I.V. On finite tetraprimary groups. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 279, no. 1, pp. 43–61. doi: 10.1134/S0081543812090040 .

7. Curtis C.W., Reiner I. *Representation theory of finite groups and associative algebras.* American Mathematical Society, 2006, 689 p. ISBN: 978-0821840665 . Translated into Russian under the title *Teoriya predstavlenii konechnykh grupp i assotsiativnykh algebr*, Moscow: Nauka Publ., 1969, 668 p.

8. Steinberg R. *Lectures on Chevalley groups.* American Mathematical Society, 2016, 160 p. ISBN: 978-1470431051 . Translated into Russian under the title *Lektsii o gruppakh Shevalle*, Moscow: Mir Publ., 1975, 262 p.

9. Suprunenko I.D. The invariance of the weight systems of algebraic groups and Lie algebras of type A_l with restricted highest weights under reduction modulo *p*. *Izv. Akad. Nauk BSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 1983, no. 2, pp. 18–22 (in Russian).

10. Arad Z., Herfort W. Classification of finite groups with a CC-subgroup. *Comm. Algebra*, 2004, vol. 32, no. 6, pp. 2087–2098. doi: 10.1081/AGB-120037209 .

11. Conway J.H. et al. *Atlas of finite groups.* Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN: 0198531990 .

12. Jansen C. et al. *An atlas of Brauer characters.* Oxford : Clarendon Press, 1995, 327 p. ISBN: 0198514816 .

13. Baranov A.A., Osinovskaya A.A., Suprunenko I.D. Modular representations of the special linear groups with small weight multiplicities. *J. Algebra*, 2014, vol. 397, pp. 225–251. doi: 10.1016/j.jalgebra.2013.08.032 .

14. Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M. *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups.* London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 407. Cambridge: Cambridge University Press, 2013, 438 p. doi: 10.1017/CBO9781139192576 .

15. Craven D.A. *Representation theory of finite groups: a guidebook.* Universitext. Cham: Springer, 2019. 294 p. ISBN: 98-3-030-21791-4.

16. Dipper R. On the decomposition numbers of the finite general linear groups. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1985, vol. 292, no. 1, pp. 123–133. doi: 10.1090/S0002-9947-1985-0805956-7 .

17. Dornhoff L.L. *Group representation theory. Part B: Modular representation theory.* NY: M. Dekker, 1971, 256 p. ISBN: 0824711483 .

18. The GAP Group, *GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Ver. 4.11.1. 2021.* Available on: http://www.gap-system.org .

19. Huppert B. *Endliche Gruppen I.* Berlin etc.: Springer, 1967, 793 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3 .

20. Huppert B., Blackburn N. *Finite groups II.* Berlin; NY: Springer, 1982, 531 p. ISBN: 0387106324 .

21. Iiyori N., Yamaki H. Prime graph components of the simple groups of Lie type over the fields of even characteristic. *J. Algebra*, 1993, vol. 155, no. 2, pp. 335–343; Corrigenda. *J. Algebra*, 1996, vol. 181, no. 2, p. 659. doi: 10.1006/jabr.1996.0140 .

22. Jantzen J.C. *Representations of algebraic groups: second edition.* Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2003, 576 p. ISBN: 978-0-8218-4377-2 .

23. Lucido M.S. Prime graph components of finite almost simple groups. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 1999, vol. 102, pp. 1–22; Addendum. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 2002, vol. 107, pp. 189–190.

24. Mortimer B. The modular permutation representations of the known doubly transitive groups. *Proc. London Math. Soc.*, 1980, vol. 41, no. 1, pp. 1–20. doi: 10.1112/plms/s3-41.1.1 .

25. Simpson W., Frame J.S. The character tables for $SL(3,q)$, $SU(3,q^2)$, $PSL(3,q)$, $PSU(3,q^2)$. *Canad. J. Math.*, 1973, vol. 25, no. 3, pp. 486–494. doi: 10.4153/CJM-1973-049-7 .

26. Steinberg R. Representations of algebraic groups. *Nagoya Math. J.*, 1963, vol. 22, pp. 33–56. doi: 10.1017/S0027763000011016 .
27. Williams J. Prime graph components of finite groups. *J. Algebra*, 1981, vol. 69, no. 2, pp. 487–513. doi: 10.1016/0021-8693(81)90218-0 .

Received November 16, 2021
Revised December 14, 2021
Accepted December 20, 2021

Funding Agency: The first author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. № 20-01-00456) and by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University); the second author was supported by the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (the State Research Programme "Convergence-2025").

Anatolii Semenovich Kondrat'ev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru .

Irina Dmitrievna Suprunenko, Dr. Phys.-Math. Sci., Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 200072 Belarus, e-mail: suprunenko@im.bas-net.by .

Igor Vladimirovich Khramtsov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), OOO "Yandex Tehnology", Moscow, 119021 Russia, e-mail: ihramtsov@gmail.com .

Cite this article as: A. S. Kondrat'ev, I. D. Suprunenko, I. V. Khramtsov. On finite 4-primary groups having a disconnected Gruenberg–Kegel graph and a composition factor isomorphic to $L_3(17)$ or $Sp_4(4)$, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 139–155 .