ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 28 № 1 2022

УДК 517.518.862

О ТОЖДЕСТВЕ БОРВЕЙНА И ВЕСОВЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ТУРАНА НА ОТРЕЗКЕ

М. А. Комаров

Пусть Π_n^* — класс алгебраических полиномов P степени n, имеющих все корни на отрезке $[-1,1]$ и обращающихся в нуль в точках 1 и -1. Пусть, кроме того, $w(x)=1-x^2$. Основной результат статьи можно сформулировать следующим образом: существует абсолютная константа $A>0$ такая, что

$$\|P'w^{1-s}\|_{C[-1,1]} > A\sqrt{n}\cdot\sqrt{1-\Delta_P^2}\,\|Pw^{-s}\|_{C[-1,1]}$$

для любых $P\in\Pi_n^*$ и $s\in[0,1]$, где $\Delta_P=\inf\bigl\{d\ge 0\colon \|Pw^{-s}\|_{C[-d,d]}=\|Pw^{-s}\|_{C[-1,1]}\bigr\}$. Это неравенство можно интерпретировать как весовой аналог классического неравенства П. Турана для производной полиномов с корнями на отрезке. Доказательство использует обобщение интересной формулы П. Борвейна для логарифмической производной таких полиномов. Оценка, полученная в работе, точна по порядку количества n и дополняет известные результаты В. Ф. Бабенко, С. А. Пичугова, С. П. Чжоу и других авторов.

Ключевые слова: логарифмическая производная полинома, весовое неравенство Турана.

M. A. Komarov. On Borwein's identity and weighted Turán type inequalities on a closed interval.

Let Π_n^* be the class of algebraic polynomials P of degree n having all zeros on the interval $[-1,1]$ and vanishing at the points 1 and -1. In addition, let $w(x)=1-x^2$. The main result of the paper can be formulated as follows: there is an absolute constant $A>0$ such that

$$\|P'w^{1-s}\|_{C[-1,1]} > A\sqrt{n}\cdot\sqrt{1-\Delta_P^2}\,\|Pw^{-s}\|_{C[-1,1]}$$

for any $P\in\Pi_n^*$ and $s\in[0,1]$, where $\Delta_P=\inf\bigl\{d\ge 0\colon \|Pw^{-s}\|_{C[-d,d]}=\|Pw^{-s}\|_{C[-1,1]}\bigr\}$. This inequality may be interpreted as a weighted analog of P. Turán's classical inequality for the derivative of polynomials with zeros on a closed interval. The proof uses a generalization of an interesting formula of P. Borwein concerning the logarithmic derivative of such polynomials. Our estimate is sharp in the order of the quantity n and complements well-known results of V. F. Babenko, S. A. Pichugov, S. P. Zhou, and others.

Keywords: logarithmic derivative of a polynomial, weighted Turán inequality.

MSC: 41A17

DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-127-138

1. Введение. Основные результаты

В 1982 г. П. Борвейн [1] установил интересное тождество[1]

$$m\Bigl\{x\in\mathbb{R}\colon \Bigl|\frac{P'(x)}{P(x)}\Bigr| \le \frac{\alpha}{|(b-x)(x-a)|}\Bigr\} = \frac{2\alpha}{n} \tag{1}$$

$$(\alpha>0,\quad -\infty<a<b<\infty),$$

справедливое для любого алгебраического полинома P степени n, все корни которого лежат в открытом интервале (a,b) вещественной прямой ($m\{\cdot\}$ обозначает меру указанного подмножества $\mathbb{R}$). Мы доказываем (см. разд. 3), что имеет место и более общее утверждение.

[1] Заметим, что правая часть формулы в оригинальной работе [1] набрана с опечаткой (вместо $2\alpha/n$ напечатано $2n/\alpha$).

Лемма 1. *Если $\alpha > 0$ и $-\infty < a \le b < \infty$, то соотношение* (1) *верно для любого полинома P степени n, все корни которого принадлежат замкнутому интервалу* $[a, b]$.

В силу леммы на классе Π_n полиномов степени n, все корни которых лежат на отрезке $[-1, 1]$, выполняется (точная) оценка (2).

Следствие 1. *Для любого полинома $P \in \Pi_n$ и любого $\varepsilon > 0$*

$$m\Big\{x \in [-1,1]\colon \Big|w(x)\frac{P'(x)}{nP(x)}\Big| \le \varepsilon\Big\} \le 2\varepsilon, \quad w(x) := 1 - x^2. \tag{2}$$

Равенство при $\varepsilon \in (0,1)$ достигается на полиномах $P_n(x) = (x^2-1)^{n/2}$, $n = 2, 4, \dots$, ибо $P_n'(x)/P_n(x) = nx/(x^2-1)$. Случай $\varepsilon \ge 1$ тривиален, так как левая часть в (2) не превосходит 2.

Напомним, что для полиномов P степени n, все корни которых вещественны, имеет место классическая формула (см. [2])

$$m\Big\{x \in \mathbb{R}\colon \Big|\frac{P'(x)}{P(x)}\Big| \ge \alpha\Big\} = \frac{2n}{\alpha} \quad (\alpha > 0). \tag{3}$$

Оценки сверху этой же меры на более широких классах полиномов и рациональных функций получены А. Макинтайром и В. Фуксом, А. А. Гончаром, Е. П. Долженко, Н. В. Говоровым и С. П. Грушевским (см. библиографию и недавние результаты в статье автора [3]).

Тождество (1) можно рассматривать как весовой аналог формулы (3), тогда как оценка (2), очевидно, есть весовой аналог следующего результата, установленного Н. В. Говоровым и Ю. П. Лапенко в 1978 г. [4]: если $P \in \Pi_n$, то при любом $\varepsilon > 0$ неравенство $|P'(x)/(nP(x))| > \varepsilon$ выполняется на всем отрезке $[-1, 1]$ вне исключительного множества $E \subset [-1, 1]$ такого, что

$$m(E) \le \frac{\sqrt{1+4\varepsilon^2}-1}{\varepsilon} \tag{4}$$

(равенство снова достигается для полиномов P_n). Интересно, что при $\varepsilon \to 0$ порядки оценок (2), (4) совпадают: $(\sqrt{1+4\varepsilon^2}-1)/\varepsilon \sim 2\varepsilon$.

В [4] доказано также, что для полиномов с корнями, лежащими в полукруге $U = \{z\colon |z| \le 1, \operatorname{Im} z \ge 0\}$, неравенство $|P'(x)/(nP(x))| > \varepsilon$ имеет место вне множества $E \subset [-1, 1]$ меры

$$m(E) \le 70e\varepsilon. \tag{5}$$

В статьях автора [5; 6] оценки Говорова и Лапенко эффективно применялись для построения обобщений классического неравенства П. Турана [7]

$$\|P'\| > C\sqrt{n}\,\|P\|, \quad P \in \Pi_n, \quad C := 1/6, \quad \|f\| := \|f\|_{C[-1,1]}, \tag{6}$$

и его интегрального аналога $\|P'\|_{L_r[-1,1]} > A_r\sqrt{n}\,\|P\|_{L_r[-1,1]}$ (доказанного в случае $r = 2$ А. К. Вармой [8], а для произвольного $r > 0$ С. П. Чжоу [9]). Так, в [5] с помощью (5) неравенство (6) распространено на полиномы с корнями, лежащими в полукруге U:

$$\|P'\| > C\sqrt{n}\,\|P\|, \quad C := \frac{2}{3\sqrt{210e}}, \tag{7}$$

а в [6] при помощи (4) найдена точная оценка типа Турана в пространстве $L_0[-1, 1]$:

$$\|P'\|_0 \ge \frac{ne}{4}\,\|P\|_0, \quad P \in \Pi_n, \quad \|f\|_0 := \exp\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \ln|f(x)|\,dx\right)$$

(экстремальны вновь полиномы P_n, как и в неравенствах (2), (4)). Интересно отметить, что согласно результату П. Ю. Глазыриной [10] для комплексных полиномов P степени не выше n

выполняется оценка типа Маркова $\|P'\|_0 \le ne\,\|P\|_0$, равенство в которой достигается при $P(x) = x^n \in \Pi_n$. Тем самым, на классе Π_n верна точная двусторонняя оценка

$$\frac{ne}{4}\,\|P\|_0 \le \|P'\|_0 \le ne\,\|P\|_0, \quad P \in \Pi_n.$$

Используя (5) и оценку из [2], Т. Эрдейи [11] обобщил неравенство (7) на классы $\mathcal{P}_{n,k}$ полиномов степени n, имеющих не менее $n-k$ корней в U и хотя бы один корень на отрезке $[-1,1]$:

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_{n,k}} \frac{\|P'\|}{\|P\|} \asymp \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k+1}}, \quad k = 0,\dots,n.$$

Возникает естественная задача: применить следствие 1 (весовой аналог оценки (4)) к построению весовых аналогов неравенства Турана (6). Наше решение этой задачи представлено ниже в теореме 1 и (см. разд. 2) предложении 1. Напомним, что первый результат такого рода был установлен В. Ф. Бабенко и С. А. Пичуговым [12] в 1986 г.:

$$\max_{-1\le x\le 1} \bigl|P'(x)\sqrt{1-x^2}\bigr| > \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2e}}\,\|P\|, \quad P \in \Pi_n. \tag{8}$$

В 1999 г. В. Ксяо и С. П. Чжоу [13] доказали, что для любой непрерывной кусочно монотонной функции $W(x)$ найдется константа $C > 0$ (зависящая лишь от W) такая, что

$$\|P'W\| > C\sqrt{n}\,\|PW\|, \quad P \in \Pi_n.$$

Это верно и для так называемых A^*-весов [14]. Весовые неравенства Турана в интегральных метриках получены в работах [6; 15; 16] и др.

Сформулируем наш основной результат. При $n \ge 2$ для любого полинома P вида

$$P \in \Pi_n, \quad P(+1) = P(-1) = 0 \tag{9}$$

и любого $s \in [0,1]$ положим

$$\Delta(P,s) = \inf\bigl\{d \ge 0\colon \max_{-d\le x\le d} \bigl|P(x)w^{-s}(x)\bigr| = \|Pw^{-s}\|\bigr\},$$

где $w(x) = 1 - x^2$. Иными словами, Δ — это расстояние от множества точек абсолютного максимума функции $P(x)(1-x^2)^{-s}$ по отрезку $[-1,1]$ до середины этого отрезка. Ввиду (9) норма $\|Pw^{-s}\|$ конечна при всех $0 \le s \le 1$, а в случае $s < 1$ получаем $\Delta(P,s) < 1$.

Теорема 1. *Если $s \in [0,1]$ и $n \ge \max\{4; 12s^2\}$, то для любого полинома вида (9) имеем*

$$\|P'w^{1-s}\| > \sqrt{n}\,\frac{2\sqrt{1-\Delta^2}}{7\sqrt{6}}\,\|Pw^{-s}\|, \tag{10}$$

где $w(x) = 1 - x^2$, $\Delta = \Delta(P,s)$.

При $s = 0$ можно увеличить константу и убрать требование делимости $P(x)$ на $1 - x^2$:

Теорема 2. *Для любого полинома $P \in \Pi_n$, $n = 1, 2, \dots$, имеем*

$$\max_{-1\le x\le 1} \bigl|P'(x)(1-x^2)\bigr| > \sqrt{n}\,\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{2\sqrt{6}}\,\|P\|, \tag{11}$$

где $\Delta = \inf\{d \ge 0 : \max_{-d\le x\le d} |P(x)| = \|P\|\}$.

Вопрос о точности оценок (10), (11) и возникающие здесь задачи обсуждаются в разд. 2.

В завершение вводной части отметим, что в отличие от случая отрезка $K = [-1,1]$ для полиномов P, все n корней которых лежат на заданном *выпуклом* компакте $K \subset \mathbb{C}$, имеющем *непустую внутренность*, нижняя граница нормы $\|P'\|_{C(K)}$, как показал С. Д. Ревес (2006), имеет порядок 1 относительно n: $\|P'\|_{C(K)} > A\,n\|P\|_{C(K)}$, $A = A(K) > 0$. В частных случаях, когда K есть круг, эллипс или ромб, этот порядок ранее устанавливался соответственно в работах П. Турана, Я. Эрёда, Т. Эрдейи. Подробную библиографию и интегральные аналоги этого результата см. в статье [17].

2. О точности оценок

Покажем, что при каждом фиксированном $0 \le s \le 1$ существуют последовательности полиномов Q_n, $n = 1, 2, \ldots$ ($\deg Q_n \asymp n$), вида (9), для которых при $n \to \infty$

$$\rho_{s,n} := \frac{\|Q_n' w^{1-s}\|}{\|Q_n w^{-s}\|} \asymp \sqrt{n} \cdot \sqrt{1 - \Delta_{s,n}^2} \quad (\Delta_{s,n} := \Delta(Q_n, s)),$$

а значит, оценки (10), (11) точны по порядку количества n.

П р и м е р 1. Пусть $Q_n(x) = (1 - x^2)^n$. При всех $0 \le s \le 1$ имеем

$$\|Q_n w^{-s}\| = \max_{-1 \le x \le 1} (1 - x^2)^{n-s} = 1, \quad \Delta_{s,n} = 0,$$

а максимум модуля функции $Q_n'(x) w^{1-s}(x) = -2n(1 - x^2)^{n-s} x$ на отрезке $[-1, 1]$ достигается в точке $x = 1/\sqrt{2n + 1 - 2s}$. Тем самым при $n \to \infty$ верно $\|Q_n' w^{1-s}\| \asymp \sqrt{n}$ и

$$\rho_{s,n} \asymp \sqrt{n} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{1 - \Delta_{s,n}^2}.$$

П р и м е р 2. Пусть $Q_n(x) = x^n (1 - x^2)^2$. При любом $0 \le s \le 1$ имеем

$$\Delta_{s,n} = \sqrt{\frac{n}{n + 4 - 2s}},$$

ибо производная функции $Q_n(x) w^{-s}(x) \equiv x^n (1 - x^2)^{2-s}$ равна $x^{n-1}(1 - x^2)^{1-s}(n - (n + 4 - 2s)x^2)$. В частности, $\|Q_n w^{-s}\| = \Delta_{s,n}^n (1 - \Delta_{s,n}^2)^{2-s} \asymp n^{s-2}$, $n \to \infty$.

Оценим норму функции

$$Q_n'(x) w^{1-s}(x) \equiv x^{n-1}(1 - x^2)^{2-s}(n + 4)(b^2 - x^2) =: F(x),$$

где $b := \sqrt{n}/\sqrt{n + 4}$; в силу четности ее модуля можем считать $x \ge 0$.

Если $x \in [b, 1]$, то

$$1 - x^2 \le \frac{n + 8}{n} x^2 - 1,$$

$$|F(x)| < n x^{n-1} \Big(\frac{n + 8}{n} x^2 - 1 \Big)^{3-s} \le n \Big(\frac{n + 8}{n} - 1 \Big)^{3-s} < 8^3 n^{s-2}.$$

Если $x \in [0, b]$, то $0 \le n - (n + 4)x^2 \le n(1 - x^2)$,

$$|F(x)| \le n x^{n-1} (1 - x^2)^{3-s} =: H(x).$$

Но $H'(x) = n x^{n-2} (1 - x^2)^{2-s} (n - 1 - (n + 5 - 2s)x^2)$, причем

$$c := \sqrt{\frac{n - 1}{n + 5 - 2s}} < b,$$

а значит, $\max_{0 \le x \le b} H(x) = H(c) < n(1 - c^2)^{3-s} < 6^3 n^{s-2}$.

Видим, что $|F(x)| < 8^3 n^{s-2}$ на всем отрезке $[-1, 1]$. Порядок точен, ибо $F(\sqrt{n/(n+5)}) > 0.4(n + 5)^{s-2}$. Итак, при $n \to \infty$ и любом s имеем $\|Q_n' w^{1-s}\| \asymp n^{s-2}$ и, следовательно,

$$\rho_{s,n} \asymp 1 \asymp \sqrt{n} \cdot \sqrt{1 - \Delta_{s,n}^2}.$$

З а м е ч а н и е 1. Множитель $\sqrt{n}\sqrt{1 - \Delta^2}$ в (10) не отделен от нуля на последовательностях полиномов p_n, для которых $1 - \Delta(p_n, s) = o(n^{-1})$, $n \to \infty$. Например, если $s = 0$ и

$$p_n(x) = 2\cos(n \arccos x) - 1 - x^2, \quad n = 2, 4, 6, \ldots$$

(нетрудно видеть, что $p_n \in \Pi_n$, $p_n(+1) = p_n(-1) = 0$), то $1 - \Delta = O(n^{-2})$ и $\sqrt{n}\sqrt{1-\Delta^2} = O(\sqrt{n^{-1}})$. Небезынтересно следующее: найдется ли абсолютная константа $A > 0$ такая, что $\|P'w^{1-s}\| > A\|Pw^{-s}\|$, $0 \le s \le 1$, для любого полинома вида (9)? В связи с теоремой 2 возникает подобный вопрос: существует ли оценка вида

$$\|P'w\| = \max_{-1\le x\le 1} \bigl|P'(x)(1-x^2)\bigr| > A_0\|P\|, \quad P \in \Pi_n \quad (A_0 = \text{const} > 0)? \tag{12}$$

Исследование этих вопросов требует более тонкой техники, нежели наш анализ, основанный на неравенстве (2). Здесь мы отметим две более слабые оценки:

$$\|P'w\| > (6\sqrt{n^3})^{-1}\|P\|, \quad P \in \Pi_n;$$

$$\|P'w\| > (2\sqrt{6n})^{-1}\|P\|, \quad P \in \Pi_n, \quad P(+1) = P(-1) = 0. \tag{13}$$

Первая вытекает из (6) ввиду неравенства [18, p. 73]: $\|p\| \le n^2\|pw\|$ ($\deg p = n-1$). Вторая следует из (11), ибо если полином P степени n удовлетворяет условиям $P(+1) = P(-1) = 0$, а его абсолютный максимум, $\|P\|$, достигается в точке $\xi \in (-1,1)$, то

$$-1 + n^{-2} \le \xi \le 1 - n^{-2}. \tag{14}$$

З а м е ч а н и е 2. Задача о наибольшей степени $t = t^*(\sigma)$ в неравенстве вида

$$\|P'w^\sigma\| > c\,n^t\,\|P\|, \quad P \in \Pi_n, \quad 0 \le \sigma \le 1,$$

где константа $c > 0$ не зависит от n и P, также представляет интерес. Оценки (6), (8) показывают, что $t^*(\sigma) = 1/2$ при всех $0 \le \sigma \le 1/2$. С другой стороны, $t^*(1) \le 0$ (см. пример 2). Возникает гипотеза о том, что $t^*(\sigma) = 1 - \sigma$ при $\sigma > 1/2$. В разд. 5 мы докажем

Предложение 1. *При любых $n = 1, 2, \ldots$ и $\sigma \in (1/2, 1)$ имеем*

$$\|P'w^\sigma\| > \frac{4}{21}(1-\sigma)n^{\frac{1-\sigma}{2-\sigma}}\,\|P\|, \quad P \in \Pi_n.$$

Отметим одно простое следствие для случая $\sigma = 1$ (ср. (12), (13)):

Следствие 2. *При любом $\varepsilon \in (0, 1/2)$ имеем*

$$\|P'w\| > \frac{1}{7}\varepsilon\, n^{-\varepsilon}\,\|P\|,$$

если производная P' полинома $P \in \Pi_n$ удовлетворяет условиям $P'(+1) = P'(-1) = 0$. Выбрав, в частности, $\varepsilon := (\ln n)^{-1}$, $n > e^2$, получим оценку

$$\|P'w\| > (7e\ln n)^{-1}\,\|P\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $|P'(y)| = \|P'\|$ $(-1 < y < 1)$. Положим $r := |y|$. Из (14) следует $r \le 1 - (n-1)^{-2}$ (отметим, что ввиду $P \in \Pi_n$ и $P'(+1) = P'(-1) = 0$ необходимо $n \ge 4$). При любом $0 < \sigma < 1$ имеем

$$\|u\|_{C[-r,r]} = \|u\|, \quad u(x) := |P'(x)|(1-x^2)^\sigma,$$

поскольку в точках $z \in [-1,1] \setminus [-r,r]$

$$u(z) \le |P'(y)|(1-z^2)^\sigma = u(y)\bigl((1-z^2)/(1-r^2)\bigr)^\sigma < u(y) \le \|u\|.$$

Но $|P'(x)|(1-x^2) \ge u(x)(1-r^2)^{1-\sigma} \ge u(x)(1-r)^{1-\sigma}$ при $x \in [-r,r]$. Следовательно,

$$\|P'w\| \ge \|P'w\|_{C[-r,r]} \ge \|u\|(1-r)^{1-\sigma} > \|u\|\,n^{2\sigma-2} = \|P'w^\sigma\|\,n^{2\sigma-2},$$

и искомая оценка вытекает из предложения 1, ибо, выбрав $\sigma := 1 - 3\varepsilon/4$, получаем

$$\frac{1-\sigma}{2-\sigma} + (2\sigma - 2) = \frac{3\varepsilon}{4+3\varepsilon} - \frac{3\varepsilon}{2} > \frac{6\varepsilon}{11} - \frac{3\varepsilon}{2} > -\varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 1/2). \qquad \square$$

3. Доказательство леммы 1

Если $a = b$, т. е. $P(x) = \mathrm{const}.(x-a)^n$, то равенство (1) выполняется очевидным образом.

В случае $a < b$ утверждение леммы эквивалентно следующему:

$$m_{\alpha,P} := m\Big\{x \in \mathbb{R}\colon \Big|(1-x^2)\frac{P'(x)}{P(x)}\Big| \le \alpha\Big\} = \frac{2\alpha}{n} \quad (\alpha > 0), \quad P \in \Pi_n. \tag{15}$$

С учетом результата Борвейна достаточно доказать (15) для полиномов вида

$$P(x) = (x+1)^k (x-1)^l q(x), \quad q \in \Pi_{n-k-l}, \quad q(+1)q(-1) \ne 0, \tag{16}$$

где $k, l = 0, 1, \ldots$ и $1 \le k + l \le n$ (в случае $k + l = n$ полагаем $q(x) \equiv 1$).

Проведем элементарное рассуждение от противного. Предположим, что для данного полинома (16) и $\alpha > 0$ при некотором $\epsilon > 0$ справедливо

$$m_{\alpha,P} \ge \frac{2\alpha}{n} + \epsilon \tag{17}$$

вместо (15). Выбрав произвольное $\tau > 0$ такое, что

$$\sqrt{\tau} < \min\Big\{\frac{1}{2}; \frac{\epsilon}{12n}\Big\}, \tag{18}$$

построим полином

$$Q(x) := (x + 1 - \tau)^k (x - 1 + \tau)^l q(x).$$

Все его корни лежат внутри интервала $(-1, 1)$, поэтому

$$m\Big\{x\colon \Big|(1-x^2)\frac{Q'(x)}{Q(x)}\Big| \le \alpha + \tilde\epsilon\Big\} = \frac{2(\alpha + \tilde\epsilon)}{n}, \quad \tilde\epsilon := \frac{\epsilon}{4} \tag{19}$$

(для краткости мы пишем “$x :$” вместо “$x \in \mathbb{R} :$”). Положим

$$h_f(x) := (1-x^2)\frac{f'(x)}{f(x)}, \quad R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

В тех точках вещественной оси, в которых одновременно $|h_Q| > \alpha + \tilde\epsilon$ и $|h_R| < \tilde\epsilon$, имеем

$$|h_P| \ge |h_Q| - |h_P - h_Q| = |h_Q| - |h_R| > (\alpha + \tilde\epsilon) - \tilde\epsilon = \alpha,$$

так что

$$\big\{x : |h_P| \le \alpha\big\} \subseteq \big\{x : |h_Q| \le \alpha + \tilde\epsilon\big\} \cup \big\{x : |h_R| \ge \tilde\epsilon\big\}.$$

Отсюда (см. (17) и (19))

$$m\big\{x : |h_R| \ge \tilde\epsilon\big\} \ge \Big(\frac{2\alpha}{n} + \epsilon\Big) - \Big(\frac{2\alpha}{n} + \frac{\epsilon}{2n}\Big) = \epsilon\Big(1 - \frac{1}{2n}\Big). \tag{20}$$

С другой стороны,

$$\frac{R'(x)}{R(x)} = \frac{k}{x+1} + \frac{l}{x-1} - \frac{k}{x+1-\tau} - \frac{l}{x-1+\tau} = \frac{-k\tau}{(x+1)(x+1-\tau)} + \frac{l\tau}{(x-1)(x-1+\tau)},$$

$$(1-x^2)\frac{R'(x)}{R(x)} = \frac{k\tau(x-1)}{x+1-\tau} - \frac{l\tau(1+x)}{x-1+\tau} = (k-l)\tau - \frac{k\tau(2-\tau)}{x+1-\tau} - \frac{l\tau(2-\tau)}{x-1+\tau},$$

и при всех $x \in \mathbb{R}\backslash I$, где

$$I := (-1 + \tau - \sqrt{\tau}, -1 + \tau + \sqrt{\tau}) \cup (1 - \tau - \sqrt{\tau}, 1 - \tau + \sqrt{\tau})$$

(ввиду (18), $-1+\tau+\sqrt{\tau} < 0 < 1-\tau-\sqrt{\tau}$), имеем $|x+1-\tau| \geq \sqrt{\tau}$ и $|x-1+\tau| \geq \sqrt{\tau}$. Следовательно, при $x \in \mathbb{R}\backslash I$

$$\big|h_R(x)\big| \leq |k-l|\tau + (k+l)\frac{\tau(2-\tau)}{\sqrt{\tau}} < n\sqrt{\tau} + 2n\sqrt{\tau} < \epsilon/4 = \tilde{\epsilon}$$

(см. (18)). Тем самым

$$m\big\{x : \big|h_R(x)\big| \geq \tilde{\epsilon}\big\} \leq m(I) = 4\sqrt{\tau} < \frac{\epsilon}{3n} < \epsilon\Big(1-\frac{1}{2n}\Big). \tag{21}$$

Противоречие с неравенством (20). Итак, неравенство (17) невозможно.

Аналогично, используя включение $\big\{x\colon |h_Q| \leq \alpha - \tilde{\epsilon}\big\} \subseteq \big\{x\colon |h_P| \leq \alpha\big\} \cup \big\{x\colon |h_R| \geq \tilde{\epsilon}\big\}, \tilde{\epsilon} = \epsilon/4$, установим, что неравенство $m_{\alpha,P} \leq (2\alpha/n) - \epsilon$ ($\epsilon > 0$) также невозможно. Следовательно, $m_{\alpha,P} = 2\alpha/n$.

Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1

Если $\Delta = 1$, то оценка (10) тривиальна. Далее предполагаем $\Delta = \Delta(P,s) < 1$.

Ближайшую к $x=0$ точку максимума модуля функции $g(x) := P(x)(1-x^2)^{-s}$ на отрезке $[-1,1]$ обозначим через a. Можем считать $a \leq 0$, так что $-1 < a \equiv -\Delta \leq 0$. Очевидно, точка a — критическая для $g(x)$, т. е.

$$P'(a)(1-a^2)^{-s} - sP(a)(1-a^2)^{-s-1}(-2a) = 0.$$

Ввиду $P(a) \neq 0$ и $a = -\Delta$ это равносильно

$$(1-a^2)\frac{P'(a)}{P(a)} = 2s\Delta. \tag{22}$$

Следовательно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, точка a принадлежит множеству вида

$$E_\varepsilon := \Big\{x \in [-1,1]\colon \Big|(1-x^2)\frac{P'(x)}{nP(x)}\Big| < \varepsilon\Big\} \tag{23}$$

в том и только том случае, когда $\varepsilon > \dfrac{2s\Delta}{n}$.

Возьмем

$$\varepsilon := \delta := -\frac{2s\Delta}{3n} + \sqrt{\Big(\frac{2s\Delta}{3n}\Big)^2 + \frac{1-\Delta^2}{6n}}; \tag{24}$$

в определенном смысле этот выбор оптимален (см. ниже анализ основного (1-го) случая).

Неравенство $\delta > 2s\Delta/n$ эквивалентно $(n+40s^2)\Delta^2 < n$, поэтому $a \in E_\delta$ (см. (23)), если и только если

$$\Delta = |a| < \Delta^*, \quad \Delta^* := \sqrt{\frac{n}{n+40s^2}}.$$

Далее, в силу элементарных оценок

$$\Delta^* \geq \sqrt{\frac{n}{n+(40/12)\,n}} > \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (n \geq 12s^2),$$

$$\delta \leq \frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\sqrt{6n}} \leq \frac{1}{\sqrt{6n}} \leq \frac{1}{\sqrt{24}} \quad (n \geq 4)$$

и неравенства (2) получаем

$$\delta < \Delta^*, \quad m(E_\delta) \leq 2\delta < 1 \quad (n \geq \max\{4; 12s^2\}).$$

В частности, значение Δ принадлежит одному из трех промежутков: $[\delta, \Delta^*)$, $[0, \delta)$ или $[\Delta^*, 1)$, первые два из которых непусты при всех $s \in [0,1]$, а третий — при $s \neq 0$.

С л у ч а й 1: $\delta \le \Delta < \Delta^*$. Ввиду $\Delta < \Delta^*$ имеем $a \in E_\delta$. Найдется точка $\nu > a$ такая, что

$$[a, \nu) \subset E_\delta \quad \text{и} \quad \Big|(1-\nu^2)\frac{P'(\nu)}{nP(\nu)}\Big| = \delta,$$

т. е. ν — ближайшая к a справа граничная точка множества E_δ. Следовательно,

$$\|P'w^{1-s}\| \ge |(1-\nu^2)^{1-s}P'(\nu)| = n\delta|g(\nu)| \ge n\delta\bigg(|g(a)| - \int_a^\nu |g'(x)|dx\bigg) = n\delta\bigg(\|Pw^{-s}\| - \int_a^\nu |g'(x)|dx\bigg).$$

При $x \in (a, \nu) \subset E_\delta$ имеем $|P'(x)| < n\delta|P(x)|(1-x^2)^{-1}$, поэтому

$$|g'(x)| = \left|\frac{P'(x)}{(1-x^2)^s} + \frac{2sxP(x)}{(1-x^2)^{s+1}}\right| < \|Pw^{-s}\|\frac{n\delta + 2sj}{1-x^2},$$

$$\int_a^\nu |g'(x)|dx < \|Pw^{-s}\|(n\delta + 2sj)\int_a^\nu \frac{dx}{1-x^2} \quad (j := \max\{|a|, |\nu|\}).$$

Но $-a = \Delta \ge \delta$ (по условию случая) и $\nu - a < m(E_\delta) \le 2\delta$, так что

$$|\nu| \le |a| = \Delta = j, \quad \int_a^\nu \frac{dx}{1-x^2} < b\delta, \quad b := \frac{2}{1-\Delta^2} \quad (b \ge 2).$$

Отсюда

$$\frac{\|P'w^{1-s}\|}{\|Pw^{-s}\|} > n\,f(\delta), \quad f(y) := y - b(ny + 2s\Delta)y^2. \tag{25}$$

Нетрудно проверить, что

$$f'(\delta) = 1 - 3b\delta^2 n - 4b\delta s\Delta = 0,$$

и максимум функции $f(y)$ на множестве $y > 0$ достигается именно при $y = \delta$ (в этом смысле выбор (24) оптимален). Выразив $b\delta^2 n$ из $f'(\delta) = 0$, получим соотношения $f(\delta) = \delta(1 - b\delta^2 n - 2s\Delta b\delta) = (2/3)(\delta - s\Delta b\delta^2)$ и $b\delta^2 < 1/(3n)$. Следовательно, из (25) с учетом $\Delta < 1$ имеем

$$\frac{\|P'w^{1-s}\|}{\|Pw^{-s}\|} > \frac{2}{3}\Big(n\delta - \frac{s}{3}\Big). \tag{26}$$

Оценим δ снизу, а $s/3$ — сверху. Представим выражение (24) в виде

$$\delta = -\frac{2s\Delta}{3n} + \frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\sqrt{6n}}\sqrt{1+c}, \quad \text{где} \quad c := \frac{8s^2\Delta^2}{3n(1-\Delta^2)}.$$

По условию случая $\Delta^2 < n/(n+40s^2)$, а значит, $c < 1/15$. Функция $\sqrt{1+c} - \sqrt{c}$ $(c > 0)$ убывает и при $c = 1/15$ равна $\sqrt{0.6}$, поэтому $\sqrt{1+c} > \sqrt{0.6} + \sqrt{c}$ $(0 < c < 1/15)$ и

$$\delta > \sqrt{0.6}\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\sqrt{6n}} = \frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\sqrt{10n}}. \tag{27}$$

С другой стороны, исходя из $\Delta < \Delta^*$ и $s^2 \le n/12$ имеем

$$1 - \Delta^2 > 1 - (\Delta^*)^2 = \frac{40s^2}{n + 40s^2} \ge \frac{40s^2}{n + (40/12)n} = \frac{120}{13n}\,s^2,$$

так что

$$\frac{1}{3}\cdot s<\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{12}}\frac{\sqrt{n}\,\sqrt{1-\Delta^2}}{\sqrt{10}}<\frac{2}{5}\frac{\sqrt{n}\,\sqrt{1-\Delta^2}}{\sqrt{10}}.$$

Применяя к (26) последнюю оценку наряду с (27), получим искомое:

$$\frac{\|P'w^{1-s}\|}{\|Pw^{-s}\|}>A\sqrt{n}\sqrt{1-\Delta^2},\quad A=\frac{2}{5\sqrt{10}}\approx 0.1265>\frac{2}{7\sqrt{6}}\approx 0.1166.$$

С л у ч а й 2: $0\le\Delta<\delta$. Справедливо $\nu-a<2\delta$, $-\delta<a\le 0$, $\delta<a+2\delta\le 2\delta$, поэтому

$$\int\limits_a^{\nu}\frac{dx}{1-x^2}<\int\limits_a^{a+2\delta}\frac{dx}{1-x^2}\le\int\limits_0^{2\delta}\frac{dx}{1-x^2}<\frac{2\delta}{1-(2\delta)^2}\quad\text{и}\quad j<2\delta.$$

Вместо (25) получаем

$$\frac{\|P'w^{1-s}\|}{\|Pw^{-s}\|}>n\delta\Big(1-(n\delta+4s\delta)\frac{2\delta}{1-(2\delta)^2}\Big)=n\delta\Big(1-\frac{(n+4s)2\delta^2}{1-4\delta^2}\Big).\tag{28}$$

Ввиду неравенств $\delta\le 1/\sqrt{6n}$, $s\le\sqrt{n}/\sqrt{12}$ и $n\ge 4$

$$(n+4s)2\delta^2\le\frac{n+4s}{3n}\le\frac{1}{3}\Big(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\Big),\quad 1-4\delta^2\ge 1-\frac{4}{6n}\ge\frac{5}{6}.$$

Отсюда

$$1-\frac{(n+4s)2\delta^2}{1-4\delta^2}\ge 1-\frac{2}{5}\Big(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)>0.36905.$$

Применяя еще оценку (27) (которая верна при всех $\Delta<\Delta^*$), приходим к искомому:

$$\frac{\|P'w^{1-s}\|}{\|Pw^{-s}\|}>A\sqrt{n}\sqrt{1-\Delta^2},\quad A=\frac{0.36905}{\sqrt{10}}\approx 0.1167>\frac{2}{7\sqrt{6}}.$$

С л у ч а й 3: $\Delta\ge\Delta^*$. Здесь $\sqrt{40}\,s\Delta\ge\sqrt{n}\sqrt{1-\Delta^2}$, следовательно (см. (22)),

$$\Big|(1-a^2)\frac{P'(a)}{P(a)}\Big|=2s\Delta\ge\frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\Delta^2}}{\sqrt{10}}>0.3\sqrt{n}\sqrt{1-\Delta^2}.$$

Но $|P(a)|=(1-a^2)^s\|Pw^{-s}\|$ по определению точки a, значит,

$$\|P'w^{1-s}\|\ge(1-a^2)^{1-s}|P'(a)|>0.3\sqrt{n}\sqrt{1-\Delta^2}\|Pw^{-s}\|.$$

Теорема 1 доказана полностью.

З а м е ч а н и е 3. Для доказательства теоремы 2 нужно лишь немного модифицировать предыдущее рассуждение. Отбросив тривиальную возможность $\Delta=1$ (которая имеет место, в частности, при $n=1$), будем считать $\Delta<1$ и $n\ge 2$. Ввиду $s=0$ имеем $\Delta^*=1$, значит, рассмотреть нужно только два случая: $\delta_1\le\Delta<1$ и $0\le\Delta<\delta_1$, где

$$\delta_1:=\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\sqrt{6n}}\equiv\delta.$$

В первом случае из оценки (25), в которой полагаем $s=0$, $\delta=\delta_1$, следует

$$\frac{\|P'w\|}{\|P\|}\ge n\delta_1\Big(1-\frac{2n\delta_1^2}{1-\Delta^2}\Big)=\frac{2}{3}n\delta_1=\sqrt{n}\,\frac{2\sqrt{1-\Delta^2}}{3\sqrt{6}}.$$

Во втором — из неравенств (28), $2n\delta_1^2<1/3$ и $1-4\delta_1^2>1-4/(6n)\ge 2/3$ ($n\ge 2$) получаем

$$\frac{\|P'w\|}{\|P\|}>n\delta_1\Big(1-\frac{2n\delta_1^2}{1-4\delta_1^2}\Big)>\sqrt{n}\,\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{2\sqrt{6}}.$$

Оценка (11) доказана.

5. Доказательство предложения 1

При $0<\sigma<1$ определим положительную величину

$$\delta=\delta(\sigma):=\Big(\frac{1-\sigma}{n2^{1-\sigma}(3-\sigma)}\Big)^{\frac{1}{2-\sigma}}; \tag{29}$$

нетрудно проверить, что $\delta<1/2$. Будем считать, что $\|P\|=|P(a)|$, где $a\in[-1,0]$.

Очевидно, $P'(a)=0$ или $a=-1$, поэтому

$$a\in E(\sigma):=\Big\{x\in[-1,1]\colon \Big|(1-x^2)^{\sigma}\frac{P'(x)}{nP(x)}\Big|<\delta\Big\}\quad(0<\sigma<1).$$

Согласно (2) и неравенству

$$\Big|(1-x^2)\frac{P'(x)}{nP(x)}\Big|\le\Big|(1-x^2)^{\sigma}\frac{P'(x)}{nP(x)}\Big|,\quad -1\le x\le 1\quad(0<\sigma<1),$$

имеем $E(\sigma)\subset E_\delta$ (см. (23)) и $m(E(\sigma))\le 2\delta<1$. Найдется точка $\nu>a$ такая, что

$$[a,\nu)\subset E(\sigma)\quad\text{и}\quad\Big|(1-\nu^2)^{\sigma}\frac{P'(\nu)}{nP(\nu)}\Big|=\delta.$$

Следовательно,

$$\|P'w^{\sigma}\|>\big|(1-\nu^2)^{\sigma}P'(\nu)\big|=n\delta|P(\nu)|\ge n\delta\Big(\|P\|-\int\limits_a^{\nu}|P'(x)|dx\Big),$$

где $|P'(x)|<n\delta\|P\|(1-x^2)^{-\sigma}$, $x\in(a,\nu)\subset E(\sigma)$.

Учитывая $\nu-a\le m(E(\sigma))\le 2\delta$ и $0<1-2\delta<1$, получаем

$$\frac{1}{n\delta\|P\|}\int\limits_a^{\nu}|P'(x)|dx<\int\limits_a^{\nu}\frac{dx}{(1-x^2)^{\sigma}}\le\int\limits_{1-2\delta}^{1}\frac{dx}{(1-x^2)^{\sigma}}<\int\limits_{1-2\delta}^{1}\frac{dx}{(1-x)^{\sigma}}=\gamma\delta^{1-\sigma},\quad\gamma:=\frac{2^{1-\sigma}}{1-\sigma}.$$

Таким образом,

$$\|P'w^{\sigma}\|>n\|P\|\,v(\delta),\quad v(y):=y-n\gamma y^{3-\sigma}.$$

Но, очевидно, $v'(\delta)=0$. Отсюда с учетом (29) и $1/2<\sigma<1$ выводим $n\gamma\delta^{2-\sigma}=1/(3-\sigma)$,

$$v(\delta)=\delta-\frac{\delta}{3-\sigma}=\delta\,\frac{2-\sigma}{3-\sigma}=n^{-\frac{1}{2-\sigma}}\Big(\frac12\Big)^{\frac{1-\sigma}{2-\sigma}}\Big(\frac{1-\sigma}{3-\sigma}\Big)^{\frac{1}{2-\sigma}}\,\frac{2-\sigma}{3-\sigma}$$

$$>n^{-\frac{1}{2-\sigma}}\,\frac{1-\sigma}{\sqrt[3]{2}}\,\frac{2-\sigma}{(3-\sigma)^2}>n^{-\frac{1}{2-\sigma}}\,\frac{1-\sigma}{\sqrt[3]{2}}\,\frac{6}{25}>n^{-\frac{1}{2-\sigma}}\,\frac{4(1-\sigma)}{21}.$$

Предложение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Borwein P.** The size of $\{x: r_n'/r_n\ge 1\}$ and lower bounds for $\|e^{-x}-r_n\|$ // J. Approx. Theory. 1982. Vol. 36, no. 1. P. 73–80. doi: 10.1016/0021-9045(82)90072-7 .
2. **Macintyre A.J., Fuchs W.H.J.** Inequalities for the logarithmic derivatives of a polynomial // J. London Math. Soc. 1940. Vol. 15, no. 2. P. 162–168. doi: 10.1112/jlms/s1-15.3.162 .
3. **Komarov M.A.** Distribution of the logarithmic derivative of a rational function on the line // Acta Math. Hungar. 2021. Vol. 163, no. 2. P. 623–639. doi: 10.1007/s10474-020-01102-w .

4. **Говоров Н.В., Лапенко Ю.П.** Оценки снизу модуля логарифмической производной многочлена // Мат. заметки. 1978. Т. 23, вып. 4. С. 527–535.
5. **Komarov M.A.** Reverse Markov inequality on the unit interval for polynomials whose zeros lie in the upper unit half-disk // Analysis Math. 2019. Vol. 45, no. 4. P. 817–821. doi: 10.1007/s10476-019-0009-y .
6. **Komarov M.A.** The Turán-type inequality in the space L_0 on the unit interval // Analysis Math. 2021. Vol. 47, no. 4. P. 843–852. doi: 10.1007/s10476-021-0097-3 .
7. **Turán P.** Über die Ableitung von Polynomen // Compos. Math. 1939. Vol. 7. P. 89–95. URL: https://eudml.org/doc/88754 .
8. **Varma A.K.** An analogue of some inequalities of P. Turán concerning algebraic polynomials having all zeros inside $[-1,+1]$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 55, no. 2. P. 305–309. doi: 10.1090/S0002-9939-1976-0396878-7 .
9. **Zhou S.P.** An extension of the Turán inequality in L_p-space for $0 < p < 1$ // J. Math. Res. Expos. 1986. Vol. 6, no. 2. P. 27–30. doi: 10.3770/j.issn:1000-341X.1986.02.010 .
10. **Глазырина П.Ю.** Неравенство братьев Марковых в пространстве L_0 на отрезке // Мат. заметки. 2005. Т. 78, вып. 1. С. 59–65. doi: 10.4213/mzm2562 .
11. **Erdélyi T.** Turán-type reverse Markov inequalities for polynomials with restricted zeros // Constr. Approx. 2021. Vol. 54, no. 1. P. 35–48. doi: 10.1007/s00365-020-09509-y .
12. **Бабенко В.Ф., Пичугов С.А.** Точное неравенство для производной тригонометрического полинома, имеющего только вещественные нули // Мат. заметки. 1986. Т. 39, вып. 3. С. 330–336.
13. **Xiao W., Zhou S.P.** On weighted Turán type inequality // Glas. Math. Ser. III. 1999. Vol. 34(54), no. 2. P. 197–202. URL: https://web.math.pmf.unizg.hr/glasnik/vol_34/no2_07.html .
14. **Yu D., Wei B.** On Turán type inequality with doubling weights and A^* weights // J. Zhejiang Univ. Sci. A. 2005. Vol. 6, no. 7. P. 764–768. doi: 10.1631/jzus.2005.A0764 .
15. **Underhill B., Varma A.K.** An extension of some inequalities of P. Erdös and P. Turán concerning algebraic polynomials // Acta Math. Hungar. 1996. Vol. 73, no. 1–2. P. 1–28. doi: 10.1007/BF00058939 .
16. **Wang J.L., Zhou S.P.** The weighted Turán type inequality for generalized Jacobi weights // Bull. Aust. Math. Soc. 2002. Vol. 66, no. 2. P. 259–265. doi: 10.1017/S0004972700040107 .
17. **Глазырина П.Ю., Ревес С.Д.** Неравенства Турана — Эрёда, обратные к неравенству Маркова, для L^q-нормы по границе плоской выпуклой области // Тр. МИАН. 2018. Т. 303. С. 87–115. doi: 10.1134/S0371968518040088 .
18. **Baran M.** Markov inequality on sets with polynomial parametrization // Ann. Polon. Math. 1994. Vol. 60, no. 1. P. 69–79. doi: 10.4064/ap-60-1-69-79 .

Поступила 2.09.2021

После доработки 8.11.2021

Принята к публикации 15.11.2021

Комаров Михаил Анатольевич

канд. физ.-мат. наук

Владимирский государственный университет

г. Владимир

e-mail: kami9@yandex.ru

REFERENCES

1. Borwein P. The size of $\{x : r_n'/r_n \geq 1\}$ and lower bounds for $\|e^{-x} - r_n\|$. *J. Approx. Theory*, 1982, vol. 36, no. 1, pp. 73–80. doi: 10.1016/0021-9045(82)90072-7 .
2. Macintyre A.J., Fuchs W.H.J. Inequalities for the logarithmic derivatives of a polynomial. *J. London Math. Soc.*, 1940, vol. 15, no. 2, pp. 162–168. doi: 10.1112/jlms/s1-15.3.162 .
3. Komarov M.A. Distribution of the logarithmic derivative of a rational function on the line. *Acta Math. Hungar.*, 2021, vol. 163, no. 2, pp. 623–639. doi: 10.1007/s10474-020-01102-w .
4. Govorov N.V., Lapenko Yu.P. Lower bounds for the modulus of the logarithmic derivative of a polynomial. *Math. Notes*, 1978, vol. 23, no. 4, pp. 288–292. doi: 10.1007/BF01786958 .
5. Komarov M.A. Reverse Markov inequality on the unit interval for polynomials whose zeros lie in the upper unit half-disk. *Anal. Math.*, 2019, vol. 45, no. 4, pp. 817–821. doi: 10.1007/s10476-019-0009-y .

6. Komarov M.A. The Turán-type inequality in the space L_0 on the unit interval. *Anal. Math.*, 2021, vol. 47, no. 4, pp. 843–852. doi: 10.1007/s10476-021-0097-3 .
7. Turán P. Über die Ableitung von Polynomen. *Compos. Math.*, 1940, vol. 7, no. 89, pp. 89–95. Available on: https://eudml.org/doc/88754 .
8. Varma A.K. An analogue of some inequalities of P. Turán concerning algebraic polynomials having all zeros inside $[-1,+1]$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1976, vol. 55, no. 2, pp. 305–309. doi: 10.1090/S0002-9939-1976-0396878-7 .
9. Zhou S.P. An extension of the Turán inequality in L_p-space for $0 < p < 1$. *J. Math. Res. Expos.*, 1986, vol. 6, no. 2, pp. 27–30. doi: 10.3770/j.issn:1000-341X.1986.02.010 .
10. Glazyrina P.Yu. The Markov brothers inequality in the space L_0 on a closed interval. *Math. Notes*, 2005, vol. 78, no. 1, pp. 53–58. doi: 10.1007/s11006-005-0098-8 .
11. Erdélyi T. Turán-type reverse Markov inequalities for polynomials with restricted zeros. *Constr. Approx.*, 2021, vol. 54, no. 1, pp. 35–48. doi: 10.1007/s00365-020-09509-y .
12. Babenko V.F., Pichugov S.A. An exact inequality for the derivative of a trigonometric polynomial having only real zeros. *Math. Notes*, 1986, vol. 39, no. 3, pp. 179–182. doi: 10.1007/BF01170244 .
13. Xiao W., Zhou S. On weighted Turán type inequality. *Glas. Mat., III. Ser.*, 1999, vol. 34, no. 2, pp. 197–202.
14. Yu D., Wei B. On Turán type inequality with doubling weights and A^* weights. *J. Zheijang Univ. Sci. A*, 2005, vol. 6, no. 7, pp. 764–768. doi: 10.1631/jzus.2005.A0764 .
15. Underhill B., Varma A.K. An extension of some inequalities of P. Erdös and P. Turán concerning algebraic polynomials. *Acta Math. Hung.*, 1996, vol. 73, no. 1-2, pp. 1–28. doi: 10.1007/BF00058939 .
16. Wang J.L., Zhou S.P. The weighted Turán type inequality for generalized Jacobi weights. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 259–265. doi: 10.1017/S0004972700040107 .
17. Glazyrina P.Yu., Révész Sz.Gy. Turán-Erőd type converse Markov inequalities on general convex domains of the plane in the boundary L^q norm. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, vol. 303, pp. 78–104. doi: 10.1134/S0081543818080084 .
18. Baran M. Markov inequality on sets with polynomial parametrization. *Ann. Polon. Math.*, 1994, vol. 60, no. 1, pp. 69–79. doi: 10.4064/ap-60-1-69-79 .

Received September 2, 2021
Revised November 8, 2021
Accepted November 15, 2021

Mikhail Anatol'evich Komarov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Vladimir State University, Vladimir, 600000 Russia, e-mail: kami9@yandex.ru .

Cite this article as: M. A. Komarov. On Borwein's identity and weighted Turán type inequalities on a closed interval, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 127–138 .