ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 4 2021

УДК 517.988.68

АЛГОРИТМЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ЛИНИЙ РАЗРЫВА С НОВЫМ ТИПОМ УСРЕДНЕНИЯ

А. Л. Агеев, Т. В. Антонова

Рассматривается некорректно поставленная задача локализации (определения положения) линий разрыва функции двух переменных. Считается, что вне линий разрыва функция гладкая, а в каждой точке на линии имеет разрыв первого рода. Для равномерной сетки с шагом τ предполагается, что в каждом узле известны средние значения на квадрате со стороной τ от возмущенной функции. Возмущенная функция приближает точную функцию в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ с известным уровнем возмущения δ. Конструируются глобальные дискретные регуляризирующие алгоритмы аппроксимации линий разрыва по зашумленным данным. Предложен новый подход к построению методов усреднения для решения задачи локализации. Использование нового типа усреднения позволяет построить регуляризирующие алгоритмы без использования производной усредняющей функции. Разработана и использована новая методика получения оценок. Эта методика применима для широкого класса новых методов с неклассической областью усреднения. На классах функций с кусочно-линейными линиями разрыва проведены оценки точности локализации и других важных характеристик регуляризирующего алгоритма. Показано, что новые алгоритмы в некоторых ситуациях экономичнее по числу операций по сравнению с методами, которые были исследованы авторами в предшествующих работах.

Ключевые слова: некорректная задача, метод регуляризации, линии разрыва, глобальная локализация, дискретизация, порог разделимости.

A. L. Ageev, T. V. Antonova. Algorithms for localizing discontinuity lines with a new type of averaging.

We consider the ill-posed problem of localizing (finding the position of) the discontinuity lines of a function of two variables. It is assumed that the function is smooth outside the discontinuity lines and has a discontinuity of the first kind at each point of these lines. The average values of the perturbed function on a square $\tau \times \tau$ are assumed to be known at each node of a uniform grid with step τ. The perturbed function with a given perturbation level δ approximates the exact function in the space $L_2(\mathbb{R}^2)$. Global discrete regularizing algorithms are constructed for the localization of the discontinuity lines from noisy data. A new approach to the construction of averaging methods for solving the localization problem is proposed. The use of a new type of averaging allows one to construct regularizing algorithms without using the derivative of the averaging function. A new technique is developed and used for deriving estimates. This technique is applicable to a wide range of new methods with a nonclassical averaging domain. On classes of functions with piecewise linear discontinuity lines, estimates of the localization error and other important characteristics of the regularizing algorithm are obtained. It is shown that the new algorithms in some situations are more economical in terms of the number of operations compared to the methods that were investigated by the authors in previous works.

Keywords: ill-posed problem, regularization method, discontinuity lines, global localization, discretization, separability threshold.

MSC: 65J22, 68U10

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-5-18

Введение

На изображениях, возникающих в прикладных задачах, границы объектов часто являются линиями, на которых функция двух переменных (изображение) терпит разрыв первого рода (линии разрыва), а вне линий разрыва функция гладкая. Предполагается, что точная функция f неизвестна, а в каждом узле равномерной сетки с шагом τ известны средние значения на квадрате со стороной τ функции f^δ, $\|f^\delta - f\|_{L_2} \le \delta$, $L_2 := L_2(\mathbb{R}^2)$; уровень возмущения δ также известен. Легко видеть, что в этой постановке линии разрыва функции f^δ могут не аппроксимировать линии разрыва точной функции f, т. е. задача аппроксимации линий разрыва некорректно поставлена [1–3].

Подобные задачи привлекают большое внимание исследователей (см., например, [4; 5; 6, гл. 10]). Первые локальные оценки точности аппроксимации линий разрыва для алгоритмов усреднения были получены в [7], обобщающий глобальный теоретический анализ алгоритмов локализации кусочно-линейных линий разрыва проведен в [8]. Актуальность рассматриваемой темы подчеркивают также работы [9–11].

В большинстве алгоритмов локализации линий разрыва для подавления шума используются усреднения. На непрерывном уровне эти усреднения являются интегралами, а после дискретизации — это усреднения, определяемые конечным числом коэффициентов, которые можно представить в виде матрицы (маски). Обычно все усреднения получаются сдвигом вдоль осей координат (иногда также усреднения проводятся в плоскости, повернутой на некоторый угол относительно исходной плоскости, — усреднения с “поворотом”). При этом, если размерность маски достаточно большая, то вычисление усреднений является наиболее затратной частью алгоритма. Поэтому построение новых алгоритмов, в которых усреднения реализуются экономичнее, чем в известных методах, представляется актуальным.

В настоящей работе при построении алгоритма для решения задачи локализации кусочно-линейных линий разрыва предложены новые формулы вычисления вспомогательных функций (усреднений): изменена область, по которой проводится усреднение; не используется производная усредняющей функции. При этом методика получения оценок точности локализации, разработанная в [7; 8], для анализа новых методов не подходит. Предлагаемая авторами новая методика применима для исследования широких классов новых методов с неклассической областью усреднения. Отработка новых подходов к проведению оценок точности локализации является одной из основных целей настоящей работы.

В разд. 1 вводятся условия на линии разрыва, дается постановка задачи и вводятся непрерывные и дискретные вспомогательные функции (усреднения). В разд. 2 приводятся вспомогательные оценки. В разд. 3 конструируются глобальные дискретные алгоритмы аппроксимации, доказывается основная теорема. В разд. 4 приведены экономичные формулы для вычисления дискретных вспомогательных функций для алгоритмов из работы [8] и проводится сравнение по экономичности этих алгоритмов и алгоритмов настоящей работы.

1. Постановка задачи, дискретизация вспомогательных функций

Пусть функция $f(x,y)$ двух переменных в квадрате $\mathfrak{D}$ имеет конечное число l линий разрыва Γ_k, которые являются отрезками; вне этих отрезков функция f гладкая (точные условия на функцию f выписаны ниже). Для удобства будем предполагать, что функция f вне квадрата $\mathfrak{D}=\{(x,y)\colon |x|\le d, |y|\le d\}$, $d>0$, равна нулю и не имеет скачка на границе $\mathfrak{D}$ (это условие непринципиально и может быть снято). Предполагаем, что отрезки Γ_k, $k=1,\dots,l$, образуют замкнутый контур; обозначим $\Gamma=\cup_{k=1}^{l}\Gamma_k$, $|\Gamma_k|$ — длина отрезка Γ_k. Отрезки, имеющие общие концы, назовем смежными. Пусть отрезки занумерованы так, что Γ_k,Γ_{k+1} смежные; через ϑ_k обозначим наименьший положительный угол между этими отрезками. Введем величину

$$\Theta_k=\begin{cases}(\sin\vartheta_k)^{-1}, & 0<\vartheta_k<\pi/2,\\ 1, & \pi/2\le\vartheta_k<\pi.\end{cases} \tag{1.1}$$

В следующем определении приведены условия гладкости для функции f вне множества Γ.

О п р е д е л е н и е 1. Введем линейное множество $MV_0(\mathbb{R})$ функций $g\in L_2(\mathbb{R})$ одной переменной с конечным числом разрывов первого рода: на любом отрезке таком, что соответствующий интервал не содержит точек разрыва, функция g абсолютно непрерывна; функция g ограничена на $\mathbb{R}$; функция g' ограничена на $\mathbb{R}$. Определим линейное множество $MV_0(\mathbb{R}^2)$, состоящее из функций[1] двух переменных $f(x,y) \in L_2(\mathbb{R}^2)$, для которых выполнены следующие условия: для всех y функция $f(\cdot,y)$ принадлежит множеству $MV_0(\mathbb{R})$, для всех x функция $f(x,\cdot)$ принадлежит множеству $MV_0(\mathbb{R})$.

Заметим, что в работе [12] рассматривалось множество $MV(\mathbb{R})$, в котором функция g' почти всюду ограничена на $\mathbb{R}$, а в работе [8] было определено множество $MV(\mathbb{R}^2)$, в котором для почти всех y функция $f(\cdot,y)$ принадлежит множеству $MV(\mathbb{R})$, для почти всех x функция $f(x,\cdot)$ принадлежит множеству $MV(\mathbb{R})$, т. е. условия гладкости в настоящей работе несколько более сильные, чем в работе [8].

Введем понятие скачка функции f на отрезках разрыва $\Gamma_k,\ k=1,2,\dots,l$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть отрезок Γ_k не параллелен оси OX. Определим скачок $\Delta_x(x,y) = f(x+0,y) - f(x-0,y) \neq 0$ функции f в точках $(x,y) \in \Gamma_k$ (исключая концы отрезка). Пусть отрезок Γ_k не параллелен оси OY. Определим скачок $\Delta_y(x,y) = f(x,y+0) - f(x,y-0) \neq 0$ функции f в точках $(x,y) \in \Gamma_k$ (исключая концы отрезка). Если отрезок Γ_k параллелен оси OX, то в точках $(x,y) \in \Gamma_k$ скачок $\Delta_x(x,y)$ не определен. Если отрезок Γ_k параллелен оси OY, то соответственно не определен скачок $\Delta_y(x,y)$ в точках $(x,y) \in \Gamma_k$.

З а м е ч а н и е 1. Легко видеть, что для функции $f \in MV_0(\mathbb{R}^2)$ определение 2 корректно. При этом, если отрезок Γ_k не параллелен осям OX и OY, то в точках $(x,y) \in \Gamma_k$ существуют скачки $\Delta_x(x,y),\ \Delta_y(x,y)$, причем $|\Delta_x(x,y)| = |\Delta_y(x,y)|$.

Введем класс функций $\mathfrak{M}$, на котором будут проводиться оценки точности работы алгоритмов локализации линий разрыва.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть функция $f \in MV_0(\mathbb{R}^2)$ имеет линию разрыва $\Gamma = \cup_{k=1}^{l}\Gamma_k$. Класс $\mathfrak{M}$ состоит из таких функций f, дополнительно удовлетворяющих следующим условиям:

(i) задано положительное число r такое, что для всех $(x,y) \in \mathfrak{D}$ имеем $|f(x,y)| \le r$; для $(x,y) \notin \Gamma$ выполнены неравенства $|f'_x(x,y)| \le r$, $|f'_y(x,y)| \le r$; для $(x,y) \in \Gamma$ существуют и ограничены величины $|f'_x(x\pm 0,y)| \le r$, $|f'_y(x,y\pm 0)| \le r$;

(ii) заданы положительные числа $L,\ \Delta^{\min}$: $0 < l \le L$, $\min\{|\Delta_x(x,y)|\colon (x,y) \in \Gamma_k, k = 1,2,\dots,l, \Gamma_k \nparallel OX\} \ge \Delta^{\min}$, $\min\{|\Delta_y(x,y)|\colon (x,y) \in \Gamma_k, k=1,2,\dots,l, \Gamma_k \nparallel OY\} \ge \Delta^{\min}$;

(iii) заданы положительные числа Θ и S: $\max\limits_{1\le k\le l} \Theta_k \le \Theta$, $\quad \min\limits_{1\le k\le l} |\Gamma_k| \ge S$.

Таким образом, класс корректности $\mathfrak{M}$ зависит от параметров $r, L, \Delta^{\min}, \Theta, S$. Для краткости будем опускать эти параметры в обозначении класса. Без ограничения общности можно считать, что $r=1$, что мы и будем делать в дальнейшем.

Введем в квадрате $\mathfrak{D}$ равномерную сетку $T = \{(x^n, y^m)\}$ с шагом τ (условия на τ выписаны в теореме), т. е. $x^n = -d + n\tau$, $y^m = -d + m\tau$, где $n = 0,1,\dots,M$, $m = 0,1,\dots,M$, $M = 2d/\tau$. (Без ограничения общности будем считать, что M — целое число, поскольку всегда можно подходящим образом увеличить d.)

Постановка задачи. Пусть $f \in \mathfrak{M}$, функция $f^\delta \in L_2(\mathbb{R}^2)$ такова, что $\|f - f^\delta\|_{L_2} \le \delta$. По уровню погрешности δ и значениям $f^\delta_{n,m}$ в точках равномерной сетки $T = \{(x^n, y^m)\}$ с заданным шагом τ, которые связаны с функцией f^δ соотношением

$$f^\delta_{n,m} = \frac{1}{\tau^2} \int\limits_{y^m}^{y^m+\tau} \int\limits_{x^n}^{x^n+\tau} f^\delta(\xi,\eta)\, d\xi d\eta, \tag{1.2}$$

требуется аппроксимировать множество Γ подмножеством точек сетки T с оценкой точности приближения.

З а м е ч а н и е 2. Постановка задачи не вполне описана, так как необходимо определить понятие “аппроксимировать”. Это понятие введено в формулировке теоремы, где дана оценка

[1] Для получения оценок удобнее считать, что функции заданы на $\mathbb{R}^2$, несмотря на то что они имеют конечный носитель.

не только близости точек сетки, найденных алгоритмом, к множеству линий разрыва, но и их количества.

При построении регулярных методов локализации для подавления шума используется идея усреднения возмущенных значений $f^{\delta}_{n,m}$. Сначала введем и исследуем вспомогательные функции (усреднения): две непрерывные функции и их дискретные аналоги.

Для проведения усреднения определим класс непрерывных усредняющих функций двух переменных. Пусть множество Ω состоит из финитных функций $\omega(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, удовлетворяющих условиям:

(a) функция ω имеет непрерывную производную по каждой переменной; положим $C=\max\{|\omega'_x(x,y)|,|\omega'_y(x,y)|\colon (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$;

(b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\omega(x,y)dxdy=1$;

(c) $\omega(x,y)=0$ для $(x,y)\notin[0,1]\times[0,1]$.

В силу условий $(a),(c)$ константа C существует, и для всех $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ справедливо $|\omega(x,y)|\le 2C$. Ясно, что $\omega\in W^1_1(\mathbb{R}^2)$ (здесь $W^1_1(\mathbb{R}^2)$ — соболевское пространство функций). Положим

$$\omega_{\lambda_1\lambda_2}(x,y)=\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\,\omega\Big(\frac{x}{\lambda_1},\frac{y}{\lambda_2}\Big),\quad \lambda_1,\lambda_2>0.$$

Введем вспомогательные функции (усреднения) непрерывного аргумента при отсутствии возмущений:

$$F^l(x,y)=F^l_{\lambda_1\lambda_2}(x,y)=I_{\lambda_1\lambda_2}(x+\lambda_1+\tau,y-\tau)-I_{\lambda_1\lambda_2}(x-\tau,y+\lambda_2+\tau),\quad (x,y)\in\mathfrak{D},\tag{1.3}$$

$$F^r(x,y)=F^r_{\lambda_1\lambda_2}(x,y)=I_{\lambda_1\lambda_2}(x+\lambda_1+\tau,y+\lambda_2+\tau)-I_{\lambda_1\lambda_2}(x-\tau,y-\tau),\quad (x,y)\in\mathfrak{D},\tag{1.4}$$

где

$$I_{\lambda_1\lambda_2}(x,y)=\int\limits_{y-\lambda_2}^{y}\int\limits_{x-\lambda_1}^{x}f(\xi,\eta)\omega_{\lambda_1\lambda_2}(x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta.$$

При вычислении функции F^l усреднение проводится в прямоугольниках со сторонами λ_1 по x и λ_2 по y, расположенных в четвертой и второй четвертях (если точку (x,y) перенести в начало координат); при вычислении функции F^r усреднение проводится в прямоугольниках того же размера, расположенных в первой и третьей четвертях. На рис. 1 изображена ситуация, когда при вычислении функций F^l и F^r отрезки разрыва не пересекаются с областью усреднения.

Перейдем к построению соответствующих дискретных вспомогательных функций, причем вместо точной функции f используем заданные величины f^{δ}_{ij}. Дискретные значения усредняющей функции для функции двух переменных будем вычислять по формуле $\Lambda^{i,j}_{\lambda_1\lambda_2}=\omega_{\lambda_1\lambda_2}(i\tau,j\tau)\tau^2$, где $0\le i\le n_1$, $0\le j\le n_2$. Параметры n_1,n_2 будут определены ниже как функции уровня погрешности δ и шага сетки τ. При этом параметры должны быть определены таким образом, чтобы шаг τ был меньше λ_1 и λ_2.

Дискретные вспомогательные функции $G^{\delta l}$, $G^{\delta r}$ вычисляются в точках (x^n,y^m) сетки T по формулам

$$G^{\delta l}(x^n,y^m)=G^{\delta,l,n_1n_2}_{\lambda_1\lambda_2}(x^n,y^m)=K^{\delta,n_1n_2}_{\lambda_1\lambda_2}(x^{n+n_1+1},y^{m-1})-K^{\delta,n_1n_2}_{\lambda_1\lambda_2}(x^{n-1},y^{m+n_2+1}),\tag{1.5}$$

$$G^{\delta r}(x^n,y^m)=G^{\delta,r,n_1n_2}_{\lambda_1\lambda_2}(x^n,y^m)=K^{\delta,n_1n_2}_{\lambda_1\lambda_2}(x^{n+n_1+1},y^{m+n_2+1})-K^{\delta,n_1n_2}_{\lambda_1\lambda_2}(x^{n-1},y^{m-1}),\tag{1.6}$$

где

$$K^{\delta,n_1n_2}_{\lambda_1\lambda_2}(x^n,y^m)=\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_1}\Lambda^{i,j}_{\lambda_1\lambda_2}\,f^{\delta}_{n-i,m-j}.\tag{1.7}$$

Напомним, что величина C введена в определении класса Ω.

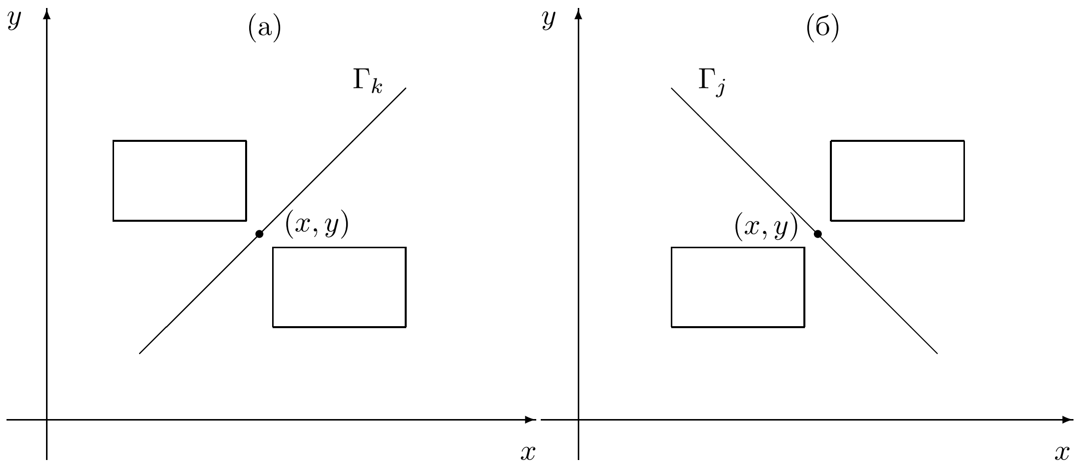

Рис. 1. Неклассические области усреднения: (а) для отрезка разрыва Γ_k, лежащего в первой и третьей четвертях; прямоугольники — носители усреднения для вычисления $F^l(x,y)$; (б) для отрезка разрыва Γ_j, лежащего во второй и четвертой четвертях; прямоугольники — носители усреднений для вычисления $F^r(x,y)$.

Лемма 1. *Пусть зафиксированы усредняющая функция* $\omega \in \Omega$ *и натуральные числа* n_1, n_2. *Тогда в условиях рассматриваемой задачи при* $\lambda_1 = n_1\tau,\ \lambda_2 = n_2\tau$ *для всех* $(x^n, y^m) \in T$ *справедливы следующие оценки*:

$$\left|G^{\delta l}(x^n,y^m) - F^l(x^n,y^m)\right| \le \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + A_0\tau\Big(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\Big),$$

$$\left|G^{\delta r}(x^n,y^m) - F^r(x^n,y^m)\right| \le \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + A_0\tau\Big(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\Big), \quad A_0 = 2C.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим разность

$$K^{\delta,n_1n_2}_{\lambda_1\lambda_2}(x^n,y^m) - I_{\lambda_1\lambda_2}(x^n,y^m) = \sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_1}\Lambda^{i,j}_{\lambda_1\lambda_2} f^\delta_{n-i,m-j} - \int\limits_{y^m-\lambda_2}^{y^m}\int\limits_{x^n-\lambda_1}^{x^n} f(\xi,\eta)\omega_{\lambda_1\lambda_2}(x^n-\xi,y^m-\eta)\,d\xi d\eta.$$

Разбивая интегралы на сумму интегралов по тем же квадратам, что и в (1.2), подставляя выражение для $f^\delta_{n-i,m-j}$ и используя обозначение $\Delta f = f^\delta - f$, получаем

$$K^{\delta,n_1n_2}_{\lambda_1\lambda_2}(x^n,y^m) - I_{\lambda_1\lambda_2}(x^n,y^m) = \sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_1}\int\limits_{y^m-j\tau}^{y^m-(j-1)\tau}\int\limits_{x^n-i\tau}^{x^n-(i-1)\tau} f(\xi,\eta)\Big[\frac{\Lambda^{i,j}_{\lambda_1\lambda_2}}{\tau^2} - \omega_{\lambda_1\lambda_2}(x^n-\xi,y^m-\eta)\Big]d\xi d\eta$$

$$+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{\Lambda^{i,j}_{\lambda_1\lambda_2}}{\tau^2}\int\limits_{y^m-j\tau}^{y^m-(j-1)\tau}\int\limits_{x^n-i\tau}^{x^n-(i-1)\tau}\Delta f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta. \tag{1.8}$$

Поскольку для всех i,j имеем $|\Lambda^{i,j}_{\lambda_1\lambda_2}| \le 2C\tau^2/(\lambda_1\lambda_2)$ и $\|\Delta f\|_{L_2} \le \delta$, то, используя неравенство Коши — Буняковского, второе слагаемое оценим следующим образом:

$$\left|\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{\Lambda^{i,j}_{\lambda_1\lambda_2}}{\tau^2}\int\limits_{y^m-j\tau}^{y^m-(j-1)\tau}\int\limits_{x^n-i\tau}^{x^n-(i-1)\tau}\Delta f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right|$$

$$\leq \frac{2C}{\lambda_1\lambda_2} \int\limits_{y^m-\lambda_2}^{y^m} \int\limits_{x^n-\lambda_1}^{x^n} |\Delta f(\xi,\eta)| d\xi d\eta \leq \frac{2C}{\lambda_1\lambda_2} \delta\, (\lambda_1\lambda_2)^{1/2} = \frac{2C}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}}\delta.$$

Перейдем к оценке первого слагаемого в правой части (1.8). По формуле конечных приращений для функции двух переменных [13, гл. V, п. 183]

$$|\omega_{\lambda_1\lambda_2}(i\tau, j\tau) - \omega_{\lambda_1\lambda_2}(x^n-\xi, y^m-\eta)|$$

$$\leq \tau |(\omega_{\lambda_1\lambda_2})'_x(\theta_1,\theta_2) + (\omega_{\lambda_1\lambda_2})'_y(\theta_1,\theta_2)| \leq C\tau\Big(\frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1\lambda_2^2}\Big), \tag{1.9}$$

где $\theta_1 \in ((i-1)\tau, i\tau)$, $\theta_2 \in ((j-1)\tau, j\tau)$. Подставляя выражение для $\Lambda^{i,j}_{\lambda_1\lambda_2}$, используя оценку (1.9) и условие (i) на функцию f, для первого слагаемого в правой части (1.8) получаем

$$\Big| \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \int\limits_{y^m-j\tau}^{y^m-(j-1)\tau} \int\limits_{x^n-i\tau}^{x^n-(i-1)\tau} f(\xi,\eta) \Big[\frac{\Lambda^{i,j}_{\lambda_1\lambda_2}}{\tau^2} - \omega_{\lambda_1\lambda_2}(x^n-\xi, y^m-\eta)\Big] d\xi d\eta \Big|$$

$$\leq C\tau\Big(\frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1\lambda_2^2}\Big) \sup_{(x,y)\in\mathfrak{D}} |f| \,\Big| \int\limits_{y^m-\lambda_2}^{y^m} \int\limits_{x^n-\lambda_1}^{x^n} d\xi d\eta \Big| \leq C\tau\Big(\frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1\lambda_2^2}\Big)\lambda_1\lambda_2 = C\tau\Big(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\Big).$$

Поскольку рассматривалась разность при любых значениях x^n, y^m, то лемма доказана.

2. Вспомогательные оценки

Пусть U_1, U_2 — множества точек из $\mathbb{R}^2$. Положим

$$\rho(U_1;U_2) = \inf\{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\colon\ (x_1,y_1)\in U_1,\ (x_2,y_2)\in U_2\}.$$

В следующей лемме приведены оценки сверху для функций F^l, F^r, определенных формулами (1.3), (1.4), в точках $(x,y)\in\mathfrak{D}$, расположенных вне некоторой окрестности множества Γ.

Лемма 2. *Пусть зафиксирована усредняющая функция $\omega\in\Omega$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для положительных λ_1,λ_2 в точках $(x,y)\in\mathfrak{D}$ таких, что $\rho((x,y);\Gamma)\geq\sqrt{(\lambda_1+\tau)^2+(\lambda_2+\tau)^2}$ имеют место оценки*

$$|F^l(x,y)| \leq 2(\lambda_1+\lambda_2+2\tau), \quad |F^r(x,y)| \leq 2(\lambda_1+\lambda_2+2\tau).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выполнении условия $\rho((x,y);\Gamma)\geq\sqrt{(\lambda_1+\tau)^2+(\lambda_2+\tau)^2}$ линия разрыва Γ не пересекается с кругом с центром в точке $(x,y)\in\mathfrak{D}$ радиуса $\sqrt{(\lambda_1+\tau)^2+(\lambda_2+\tau)^2}$, в котором лежат области интегрирования при вычислении функций $F^l(x,y)$, $F^r(x,y)$ по формулам (1.3), (1.4). Покажем справедливость первой оценки. Вторая оценка доказывается аналогично. Поскольку в области интегрирования при вычислении функции F^l по формуле (1.3) функция f непрерывна в области интегрирования, то для каждого слагаемого можно применить обобщенную теорему о среднем для функции двух переменных [14, гл. XVI, п. 592, 7°]. Используя условие (b) на функцию ω, для первого слагаемого в (1.3) получаем

$$I_{\lambda_1\lambda_2}(x+\lambda_1+\tau, y-\tau) = \int\limits_{y-\lambda_2-\tau}^{y-\tau} \int\limits_{x+\tau}^{x+\lambda_1+\tau} f(\xi,\eta)\omega_{\lambda_1\lambda_2}(x-\xi+\lambda_1+\tau, y-\eta-\tau) d\xi d\eta$$

$$= f(\tilde{x},\tilde{y}) \int\limits_{y-\lambda_2-\tau}^{y-\tau} \int\limits_{x+\tau}^{x+\lambda_1+\tau} \omega_{\lambda_1\lambda_2}(x-\xi+\lambda_1+\tau, y-\eta-\tau) d\xi d\eta = f(\tilde{x},\tilde{y}),$$

где $\tilde{x} \in (x+\tau, x+\lambda_1+\tau),\ \tilde{y} \in (y-\lambda_2-\tau, y-\tau)$.

Аналогично для второго слагаемого в формуле (1.3) имеем

$$I_{\lambda_1\lambda_2}(x-\tau, y+\lambda_2+\tau) = \int\limits_{y+\tau}^{y+\lambda_2+\tau} \int\limits_{x-\lambda_1-\tau}^{x-\tau} f(\xi,\eta)\omega_{\lambda_1\lambda_2}(x-\xi-\tau, y-\eta+\lambda_2+\tau)d\xi d\eta = f(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}),$$

где $\tilde{\tilde{x}} \in (x-\lambda_1-\tau, x-\tau),\ \tilde{\tilde{y}} \in (y+\tau, y+\lambda_2+\tau)$.

Таким образом,

$$F^l(x,y) = f(\tilde{x},\tilde{y}) - f(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}). \tag{2.1}$$

Поскольку функция f и ее производные f'_x, f'_y непрерывны, то, используя формулу конечных приращений для функции двух переменных [13, гл. V, п. 183], выводим $F^l(x,y) = (\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}})f'_x(\theta_1,\theta_2) + (\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}})f'_y(\theta_1,\theta_2)$, где $\theta_1 \in (\tilde{\tilde{x}}, \tilde{x}) \subset (x-\lambda_1-\tau, x+\lambda_1+\tau)$, $\theta_2 \in (\tilde{y}, \tilde{\tilde{y}}) \subset (y-\lambda_2-\tau, y+\lambda_2+\tau)$. Используя условие (i) на функцию f, получаем требуемую оценку

$$|F^l(x,y)| \le 2(\lambda_1+\tau) + 2(\lambda_2+\tau) = 2(\lambda_1+\lambda_2+2\tau).$$

Лемма доказана.

Пусть задан вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l)$, $\varepsilon_k > 0$. Определим отрезок Γ_k^ε как часть отрезка Γ_k без окрестностей концов радиуса ε_{k-1}, ε_k; положим $\Gamma^\varepsilon = \cup_{k=1}^l \Gamma_k^\varepsilon$. Введем для всех $(x,y) \in \mathfrak{D}$

$$\nu((x,y);\Gamma) = \inf\{\ \max\{|x-\bar{x}|, |y-\bar{y}|\} \colon (\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma\}.$$

Получим оценки снизу для функций F^l, F^r, определенных формулами (1.3), (1.4), в точках сетки T, близких к Γ^ε. Напомним, что величина $\Delta^{\min}$ входит в определение класса $\mathfrak{M}$, Θ_k определены формулой (1.1), τ — шаг сетки T.

Лемма 3. *Пусть зафиксирована усредняющая функция $\omega \in \Omega$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для любых положительных λ_1, λ_2 при выполнении условия разделимости*

$$\min_{1\le k,j\le l,\ k\ne j} \rho(\Gamma_k^\varepsilon; \Gamma_j^\varepsilon) \ge \sqrt{(\lambda_1+\tau)^2 + (\lambda_2+\tau)^2} + \sqrt{2}\tau,\ \text{где } \varepsilon_k = \Theta_k(\sqrt{(\lambda_1+\tau)^2 + (\lambda_2+\tau)^2} + \sqrt{2}\tau),$$

в точках $(x,y) \in \mathfrak{D}$ таких, что $\nu((x,y);\Gamma^\varepsilon) \le \tau$, имеет место хотя бы одна из оценок:

$$\text{либо } |F^l(x,y)| \ge \Delta^{\min} - 2(\lambda_1+\lambda_2+4\tau), \quad \text{либо } |F^r(x,y)| \ge \Delta^{\min} - 2(\lambda_1+\lambda_2+4\tau).$$

Доказательство. Условие $\min\limits_{1\le k,j\le l,\ k\ne j} \rho(\Gamma_k^\varepsilon; \Gamma_j^\varepsilon) \ge \sqrt{(\lambda_1+\tau)^2 + (\lambda_2+\tau)^2} + \sqrt{2}\tau$ гарантирует, что в круге с центром в точке $(x,y) \in \mathfrak{D}$ такой, что $\nu((x,y);\Gamma_k^\varepsilon) \le \tau$, радиуса $\sqrt{(\lambda_1+\tau)^2 + (\lambda_2+\tau)^2}$ функция f имеет разрывы только на линии Γ_k. Причем в зависимости от угла наклона отрезка Γ_k функция f непрерывна в области интегрирования либо при вычислении функции F^l (см. формулу (1.3) и рис. 1(а)), либо при вычислении функции F^r (см. формулу (1.4) и рис. 1(б)). Пусть имеет место первый вариант. В этом случае для функции F^l справедливо разложение (2.1), поскольку при его получении требовалась непрерывность функции f в области интегрирования в формуле (1.3). Имеем

$$F^l(x,y) = f(\tilde{x},\tilde{y}) - f(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}),$$

где $\tilde{x} \in (x+\tau, x+\lambda_1+\tau),\ \tilde{y} \in (y-\lambda_2-\tau, y-\tau),\ \tilde{\tilde{x}} \in (x-\lambda_1-\tau, x-\tau),\ \tilde{\tilde{y}} \in (y+\tau, y+\lambda_2+\tau)$.

Из условия $\nu((x,y);\Gamma_k^\varepsilon) \le \tau$ следует, что существует точка $(\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma_k^\varepsilon$ такая, что $|x-\bar{x}| \le \tau$, $|y-\bar{y}| \le \tau$. Используя формулу конечных приращений для функции двух переменных [13, гл.V, п.183] и дополнительно предполагая, что отрезок Γ_k не параллелен оси OX, получаем

$$f(\tilde{x},\tilde{y}) = f(\bar{x}+0, \bar{y}) + (\tilde{x}-\bar{x})f'_x(\theta_1,\theta_2) + (\tilde{y}-\bar{y})f'_y(\theta_1,\theta_2),$$

$$f(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}}) = f(\bar{x}-0,\bar{y}) + (\tilde{\tilde{x}}-\bar{x})f'_x(\theta_3,\theta_4) + (\tilde{\tilde{y}}-\bar{y})f'_y(\theta_3,\theta_4),$$

где $\theta_1 \in (\bar{x},\tilde{x})$, $\theta_2 \in (\bar{y},\tilde{y})$, $\theta_3 \in (\bar{x},\tilde{\tilde{x}})$, $\theta_4 \in (\bar{y},\tilde{\tilde{y}})$.

Аналогично, предполагая, что отрезок Γ_k не параллелен оси OY, имеем

$$f(\tilde{x},\tilde{y}) = f(\bar{x},\bar{y}-0) + (\tilde{x}-\bar{x})f'_x(\theta_1,\theta_2) + (\tilde{y}-\bar{y})f'_y(\theta_1,\theta_2),$$

$$f(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}}) = f(\bar{x},\bar{y}+0) + (\tilde{\tilde{x}}-\bar{x})f'_x(\theta_3,\theta_4) + (\tilde{\tilde{y}}-\bar{y})f'_y(\theta_3,\theta_4),$$

где $\theta_1 \in (\bar{x},\tilde{x})$, $\theta_2 \in (\bar{y},\tilde{y})$, $\theta_3 \in (\bar{x},\tilde{\tilde{x}})$, $\theta_4 \in (\bar{y},\tilde{\tilde{y}})$. Поскольку

$$|f(\bar{x}+0,\bar{y}) - f(\bar{x}-0,\bar{y})| = |f(\bar{x},\bar{y}-0) - f(\bar{x},\bar{y}+0)| \le \Delta^{\min},$$

$$|\tilde{x}-\bar{x}| \le \lambda_1 + 2\tau, \quad |\tilde{\tilde{x}}-\bar{x}| \le \lambda_1 + 2\tau, \quad |\tilde{y}-\bar{y}| \le \lambda_2 + 2\tau, \quad |\tilde{\tilde{y}}-\bar{y}| \le \lambda_2 + 2\tau,$$

то, учитывая условие (i) на функцию f, получаем требуемую оценку.

Лемма доказана.

Напомним, что величина C введена в условиях на функцию ω, величина $\Delta^{\min}$ входит в определение класса $\mathfrak{M}$; $A_0 = 2C$. Пусть положительные константы D_1, D_2 удовлетворяют условию

$$D_1 D_2 \ge \Big(\frac{4A_0}{P}\Big)^2, \quad \text{где} \quad P = \frac{\Delta^{\min}}{2}.$$

Введем константы

$$B_0 = \min\Big\{\frac{D_1}{14},\ D_2,\ \frac{P}{6A_0}\Big(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}\Big)^{-1}\Big\}, \quad \delta_0 = \frac{P}{4(2D_1 + D_2)}.$$

Обозначим $\lceil z \rceil = [z] + 1$, где $[z]$ — целая часть числа z. Положим

$$n_1 = n_1(\tau,\delta) = \Big\lceil \frac{D_1\delta}{\tau} \Big\rceil, \quad n_2 = n_2(\tau,\delta) = \Big\lceil \frac{D_2\delta}{\tau} \Big\rceil. \tag{2.2}$$

Напомним, что (см. формулировку леммы 1)

$$\lambda_1 = n_1\tau, \quad \lambda_2 = n_2\tau. \tag{2.3}$$

Ниже нам понадобятся очевидные оценки, которые сформулируем в виде отдельного утверждения.

Утверждение. *Пусть шаг τ заданной равномерной сетки T удовлетворяет условию $\tau \le B_0\delta$, тогда при связи параметров (2.2), (2.3) для λ_1, λ_2 выполнены следующие оценки сверху и снизу*:

$$D_1\delta \le \lambda_1 \le D_1\delta + \tau \le (D_1 + B_0)\delta \le 2D_1\delta, \quad D_2\delta \le \lambda_2 \le D_2\delta + \tau \le (D_2 + B_0)\delta \le 2D_2\delta.$$

Справедливость этих оценок следует из связи параметров (2.2), (2.3) и определения константы B_0. □

В точках (x^n, y^m) сетки T определим функцию

$$H^\delta(x^n,y^m) = \max\{|G^{\delta l}(x^n,y^m)|, |G^{\delta r}(x^n,y^m)|\}. \tag{2.4}$$

Лемма 4. *Пусть зафиксирована усредняющая функция $\omega \in \Omega$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для всех $\delta \le \delta_0$, $\tau \le B_0\delta$ при связи параметров (2.2), (2.3) и выполнении условия разделимости*

$$\min_{1\le k,j\le l,\ k\ne j} \rho(\Gamma^\varepsilon_k;\Gamma^\varepsilon_j) \ge \sqrt{(\lambda_1+\tau)^2 + (\lambda_2+\tau)^2} + \sqrt{2}\tau, \text{ где } \varepsilon_k = \Theta_k\big(\sqrt{(\lambda_1+\tau)^2 + (\lambda_2+\tau)^2} + \sqrt{2}\tau\big),$$

для значения функции H^δ в точке $(x^n,y^m) \in T$ имеют место оценки

(1) *если* $\rho((x^n,y^m);\Gamma) \ge \sqrt{(\lambda_1+\tau)^2 + (\lambda_2+\tau)^2}$, *то* $H^\delta(x^n,y^m) < P$,

(2) *если* $\nu((x^n,y^m);\Gamma^\varepsilon) \le \tau$, *то* $H^\delta(x^n,y^m) > P$.

Доказательство. Покажем справедливость (1). Для точек сетки (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma) \geq \sqrt{(\lambda_1+\tau)^2+(\lambda_2+\tau)^2}$, используя оценки лемм 1 и 2, выводим

$$H^\delta(x^n, y^m) \leq \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + A_0\tau\Big(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\Big) + 2(\lambda_1+\lambda_2+2\tau).$$

При данном выборе параметров, используя оценки для λ_1, λ_2 из утверждения и учитывая соотношение между D_1, D_2, имеем неравенство $A_0\delta/(\lambda_1\lambda_2)^{1/2} \leq P/4$; используя дополнительно условие на τ, получаем $A_0\tau(1/\lambda_1+1/\lambda_2) \leq P/6$; поскольку $\delta \leq \delta_0$, имеем $2(\lambda_1+\lambda_2+2\tau) < P/2$. Следовательно, $H^\delta(x^n, y^m) < \dfrac{11}{12}P < P$.

Перейдем к доказательству (2). Для точек $(x^n, y^m)\colon \nu((x^n, y^m); \Gamma^\varepsilon) \leq \tau$, используя оценки лемм 1 и 3, получаем

$$H^\delta(x^n, y^m) \geq \Delta^{\min} - \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} - A_0\tau\Big(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\Big) - 2(\lambda_1+\lambda_2+4\tau).$$

Поскольку $P = \Delta^{\min}/2$ и $2(\lambda_1+\lambda_2+4\tau) < P/2$, то, учитывая оценки из доказательства п. (1) настоящей леммы, имеем

$$H^\delta(x^n, y^m) > \Delta^{\min} - \frac{11}{12}P = \frac{13}{12}P > P.$$

Лемма доказана.

3. Алгоритм локализации линий разрыва

Изложенный ниже метод локализации определяет множество T^δ точек сетки T, аппроксимирующих множество Γ. Алгоритм включает в себя условие прореживания, которое обеспечивает корректную аппроксимацию линий разрыва. Обозначим через $N = N(T^\delta)$ количество точек множества T^δ. Договоримся, если $T^\delta = \varnothing$, считать $\rho((x^n, y^m); T^\delta) = \infty$ для любой точки (x^n, y^m) сетки T. Напомним, что функция H^δ определена в (2.4); условие на величины D_1, D_2 введено перед утверждением в предыдущем разделе; константы $L, \Delta^{\min}, \Theta, S$ введены в определении класса $\mathfrak{M}$. Алгоритм локализации в своей работе использует параметры

$$n_1 = n_1(\tau, \delta) = \Big\lceil \frac{D_1\delta}{\tau} \Big\rceil, \quad n_2 = n_2(\tau, \delta) = \Big\lceil \frac{D_2\delta}{\tau} \Big\rceil, \quad \lambda_1 = n_1\tau, \quad \lambda_2 = n_2\tau \tag{3.1}$$

и величину порога $P = \Delta^{\min}/2$.

Для упрощения выражений в оценках предположим, что $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Вопрос выбора оптимального соотношения между λ_1 и λ_2 требует дополнительного исследования.

Алгоритм $\Pi D(\delta, f^\delta_{n,m})$

Подготовка к циклу. Положим $N := 0$; $T^\delta := \varnothing$.

Цикл перебора точек (x^n, y^m) *сетки* T. Если в процессе перебора не рассмотренных точек сетки T не осталось, то конец цикла.

Пусть (x^n, y^m) — текущая точка. Если $H^\delta(x^n, y^m) > P$ и $\rho((x^n, y^m); T^\delta) > 3\sqrt{2}(\lambda_1+\tau)$, то $N := N+1$; $T^\delta := T^\delta \cup (x^n, y^m)$, и продолжаем цикл;

иначе — продолжаем цикл.

Заметим, что выше сформулирован целый класс алгоритмов. Чтобы получить конкретный метод, нужно зафиксировать усредняющую функцию $\omega \in \Omega$ и правило перебора точек. Далее будем считать, что конкретное правило перебора и усредняющая функция выбраны и зафиксированы.

Пусть U_1, U_2 — множества точек из $\mathbb{R}^2$. Введем меру близости множества U_1 к множеству U_2

$$\mu(U_1; U_2) = \sup_{(x_1,y_1)\in U_1} \inf_{(x_2,y_2)\in U_2} \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Положим

$$D = \sqrt{2}D_1, \quad \bar{\delta}_0 = \min\Big\{\delta_0,\ \frac{S}{9D\Theta}\Big\}, \quad \tau_0(\delta) = B_0\delta, \quad h(\delta) = 4D\delta. \tag{3.2}$$

Теорема. *В условиях рассматриваемой задачи для всех* $\delta \le \bar{\delta}_0$, $\tau \le \tau_0(\delta)$ *при связи параметров* (3.1) *и выполнении условия разделимости*

$$\min_{1\le k,j\le l,\, k\ne j} \rho(\Gamma_k^\varepsilon;\Gamma_j^\varepsilon) \ge h(\delta),\ \text{где } \varepsilon_k = \Theta_k h(\delta),$$

алгоритм $\Pi D(\delta, f^\delta_{n,m})$ *построит множество точек* T^δ *такое, что*

(1) $\mu(T^\delta;\Gamma) \le 2D\delta$;

(2) $\mu(\Gamma;T^\delta) \le 4D(1+\Theta)\delta$;

(3) *для всех различных точек* $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in T^\delta$ *справедливо неравенство*

$$\rho((x_1,y_1);(x_2,y_2)) > 3D\delta;$$

(4) *множество* $T^\delta \ne \varnothing$ *и справедливы оценки*

$$\frac{1}{7D}\frac{|\Gamma|}{\delta} - \frac{8\Theta L}{7} \le N(T^\delta) \le \frac{1}{D}\frac{|\Gamma|}{\delta},$$

где $|\Gamma|$ *— длина линии разрыва* Γ, $|\Gamma| = \sum\limits_{k=1}^{l}|\Gamma_k|$.

Доказательство. Напомним, что $\lambda_1 \ge \lambda_2$. Используя оценки из утверждения и учитывая условие на шаг τ, имеем

$$\sqrt{(\lambda_1+\tau)^2+(\lambda_2+\tau)^2} + \sqrt{2}\tau \le \sqrt{2}(\lambda_1+2\tau) \le \sqrt{2}(D_1+3B_0)\delta < 2D\delta.$$

Ясно, что при выборе $h(\delta) = 4D\delta$ и при выполнении условия разделимости в настоящей теореме выполнено условие разделимости в лемме 4.

Докажем оценку (1). Из п. (1) леммы 4 следует, что $\mu(T^\delta;\Gamma) \le \sqrt{(\lambda_1+\tau)^2+(\lambda_2+\tau)^2} \le \sqrt{2}(\lambda_1+\tau)$. При выбранной связи параметров получаем требуемое неравенство.

Докажем оценку (2). Согласно алгоритму ΠD все Γ^ε можно покрыть кругами с центром в точках из множества T^δ радиусом $3\sqrt{2}(\lambda_1+\tau)+\sqrt{2}\tau$. Если это не так, то согласно п. (2) леммы 4 обязательно найдется точка сетки T, не принадлежащая множеству T^δ и находящаяся на расстоянии больше $3\sqrt{2}(\lambda_1+\tau)$ от множества T^δ, в которой функция H^δ больше порога P. Этого не может быть, поскольку в ходе работы алгоритма ΠD перебираются все точки сетки T. Следовательно, $\mu(\Gamma^\varepsilon;T^\delta) \le 3\sqrt{2}(\lambda_1+\tau)+\sqrt{2}\tau$ и $\mu(\Gamma;T^\delta) \le 3\sqrt{2}(\lambda_1+\tau)+\sqrt{2}\tau+\max_k\varepsilon_k$, где $\max_k\varepsilon_k = \Theta h(\delta)$. Учитывая условия на параметры, получаем требуемую оценку: $\mu(\Gamma;T^\delta) \le \sqrt{2}(3D_1+7B_0)\delta + 4D\Theta\delta \le 4D(1+\Theta)\delta$.

Докажем оценку (3). Пусть $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ — две различные точки множества T^δ. По построению множества T^δ алгоритмом ΠD справедливо неравенство

$$\rho((x_1,y_1);(x_2,y_2)) > 3\sqrt{2}(\lambda_1+\tau) > 3\sqrt{2}D_1\delta.$$

Докажем оценку (4). Согласно оценке в п. (1) леммы 4 круг с центром в точке из множества T^δ радиусом $\sqrt{2}(\lambda_1+\tau)$ обязательно содержит точку из Γ. Пусть $(x^n,y^m) \in T^\delta$, тогда существует $(x,y) \in \Gamma$ такая, что $\rho((x^n,y^m);(x,y)) \le \sqrt{2}(\lambda_1+\tau)$. Аналогично для $(x^{\bar{n}},y^{\bar{m}}) \in T^\delta$ существует $(\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma$ такая, что $\rho((x^{\bar{n}},y^{\bar{m}});(\bar{x},\bar{y})) \le \sqrt{2}(\lambda_1+\tau)$. Ясно, что $\rho((x,y);(\bar{x},\bar{y})) \ge \rho((x^{\bar{n}},y^{\bar{m}});(x^n,y^m)) - 2\sqrt{2}(\lambda_1+\tau)$. Используя оценку для первого слагаемого из доказательства п. (3) настоящей теоремы, имеем $\rho((x,y);(\bar{x},\bar{y})) > \sqrt{2}(\lambda_1+\tau) > D\delta$. Следовательно, справедлива *оценка сверху*

$$N(T^\delta) \le \frac{|\Gamma|}{\sqrt{2}(\lambda_1+\tau)} \le \frac{|\Gamma|}{D\delta}.$$

Получим *оценку снизу*. В доказательстве п. (2) показано, что все Γ^ε можно покрыть кругами с центром в точках из множества T^δ радиусом $3\sqrt{2}(\lambda_1+\tau)+\sqrt{2}\tau$. Поскольку $h(\delta)-(3\sqrt{2}(\lambda_1+\tau)+\sqrt{2}\tau)\geq 4D\delta-\sqrt{2}(3D_1+7B_0)\delta\geq (D/2)\delta>0$, то количество таких кругов на Γ_k^ε должно быть не меньше

$$\frac{|\Gamma_k^\varepsilon|}{2(3\sqrt{2}(\lambda_1+\tau)+\sqrt{2}\tau)}\geq\frac{|\Gamma_k|-\varepsilon_k-\varepsilon_{k-1}}{7D\delta}.$$

Поскольку $\max_k\varepsilon_k=\Theta h(\delta)$, то $\dfrac{|\Gamma_k^\varepsilon|}{2(3\sqrt{2}(\lambda_1+\tau)+\sqrt{2}\tau)}\geq\dfrac{|\Gamma_k|}{7D\delta}-\dfrac{8\Theta}{7}$. Суммируя по всем k, получаем требуемую оценку

$$N(T^\delta)\geq\frac{|\Gamma|}{7D\delta}-\frac{8\Theta L}{7}.$$

Теорема доказана.

4. Сравнение с известными методами

В этом разделе выведем более экономичные формулы для вычисления дискретных вспомогательных функций (усреднений) работы [8] и сравним их по экономичности с формулами для дискретных вспомогательных функций настоящей работы.

Для проведения усреднения по каждой переменной в работе [8] определено два класса непрерывных усредняющих функций одной переменной. В качестве одного класса выбрано множество ΦF, состоящее из финитных функций $\phi(t)$, $t\in\mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

(a) ϕ дважды непрерывно дифференцируема;

(b) существуют $0<b<1$, $0<a\leq 1$ такие, что $a\leq\phi(t)\leq 1$ для $t\in[-b,b]$;

(c) $\phi(t)=0$ для $t\notin[-1,1]$.

Второй класс усредняющих функций Ψ также состоит из финитных функций $\psi(t)$, $t\in\mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

(a') ψ непрерывно дифференцируема;

(b') $\displaystyle\int_{-1}^{1}\psi(t)dt=1$;

(c') $\psi(t)=0$ для $t\notin[-1,1]$; $\psi(t)\geq 0$ для $t\in[-1,1]$.

Положим

$$\phi_{\lambda_1}(t)=\phi\Big(\frac{t}{\lambda_1}\Big),\quad \psi_{\lambda_2}(t)=\frac{1}{\lambda_2}\psi\Big(\frac{t}{\lambda_2}\Big),\quad \lambda_1,\lambda_2>0.$$

Дискретные вспомогательные функции G_x^δ, G_y^δ в [8] вычисляются в точках (x^n,y^m) сетки T по формулам

$$G_x^\delta(x^n,y^m)=G_{x,\lambda_1\lambda_2}^{\delta,n_1n_2}(x^n,y^m)=\sum_{j=-n_2}^{n_2-1}\sum_{i=-n_1}^{n_1-1}\Lambda_{\lambda_1\lambda_2}^{i,j}\,f_{n+i,m+j}^\delta, \tag{4.1}$$

$$G_y^\delta(x^n,y^m)=G_{y,\lambda_1\lambda_2}^{\delta,n_1n_2}(x^n,y^m)=\sum_{i=-n_2}^{n_2-1}\sum_{j=-n_1}^{n_1-1}\Lambda_{\lambda_1\lambda_2}^{j,i}\,f_{n+i,m+j}^\delta, \tag{4.2}$$

где $\Lambda_{\lambda_1\lambda_2}^{i,j}=\phi'_{\lambda_1}(-i\tau)\psi_{\lambda_2}(-j\tau)\tau^2$, $\phi\in\Phi F,\psi\in\Psi$.

Области усреднения для этого метода приведены на рис. 2, который можно сравнить с рис. 1.

При выполнении следующего дополнительного условия на функцию ϕ возможна более экономичная реализация формул для вычисления усреднений:

(d) $\phi'(-1+t)=-\phi'(t)$.

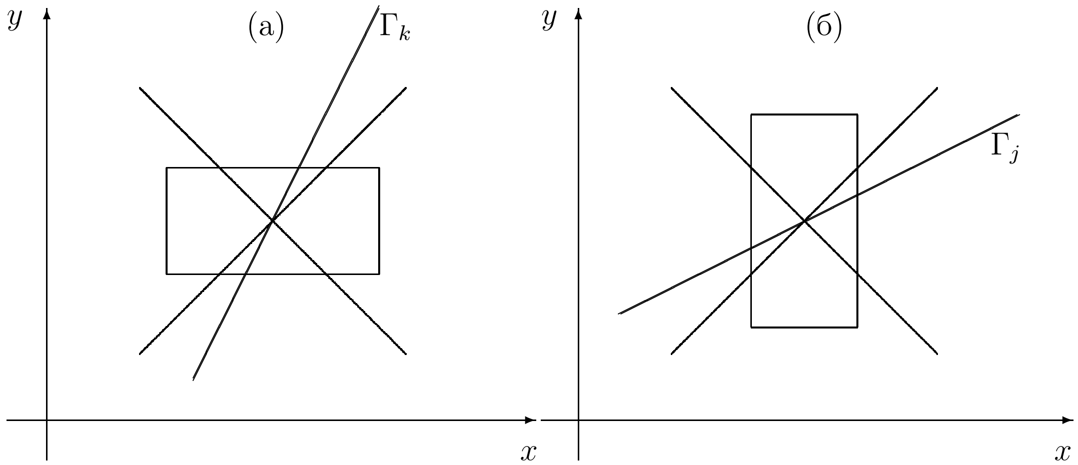

Рис. 2. Стандартная область усреднения (используемая в работе [8]): (а) для отрезка разрыва Γ_k ломаной, лежащего в вертикальном конусе (тангенс угла наклона по y меньше или равен единице); прямоугольник — носитель усреднения для вычисления G_x^δ с усредняющим ядром $\phi'_{\lambda_1}(x)\psi_{\lambda_2}(y)$; (б) для отрезка разрыва Γ_j ломаной, лежащего в горизонтальном конусе (тангенс угла наклона по x меньше или равен единице); прямоугольник — носитель усреднения для вычисления G_y^δ с усредняющим ядром $\phi'_{\lambda_1}(y)\psi_{\lambda_2}(x)$.

Нетрудно показать (разбить на две суммы и в одной сделать замену так, чтобы суммирование проходило по одинаковым индексам), что при выполнении условия (d) имеем

$$G_x^\delta(x^n, y^m) = \sum_{j=-n_2}^{n_2-1} \sum_{i=0}^{n_1-1} \Lambda^{i,j}_{\lambda_1\lambda_2} f^\delta_{n+i,m+j} - \sum_{j=-n_2}^{n_2-1} \sum_{i=0}^{n_1-1} \Lambda^{i,j}_{\lambda_1\lambda_2} f^\delta_{n-n_1+i,m+j},$$

$$G_y^\delta(x^n, y^m) = \sum_{i=-n_2}^{n_2-1} \sum_{j=0}^{n_1-1} \Lambda^{j,i}_{\lambda_1\lambda_2} f^\delta_{n+i,m+j} - \sum_{i=-n_2}^{n_2-1} \sum_{j=0}^{n_1-1} \Lambda^{j,i}_{\lambda_1\lambda_2} f^\delta_{n+i,m-n_1+j}.$$

Вводя функции

$$K_x^\delta(x^n, y^m) = \sum_{j=-n_2}^{n_2-1} \sum_{i=0}^{n_1-1} \Lambda^{i,j}_{\lambda_1\lambda_2} f^\delta_{n+i,m+j}, \quad K_y^\delta(x^n, y^m) = \sum_{i=-n_2}^{n_2-1} \sum_{j=0}^{n_1-1} \Lambda^{j,i}_{\lambda_1\lambda_2} f^\delta_{n+i,m+j}, \tag{4.3}$$

имеем

$$G_x^\delta(x^n, y^m) = K_x^\delta(x^n, y^m) - K_x^\delta(x^{n-n_1}, y^m), \quad G_y^\delta(x^n, y^m) = K_y^\delta(x^n, y^m) - K_y^\delta(x^n, y^{m-n_1}). \tag{4.4}$$

Количество операций для вычисления дискретных вспомогательных функций по формулам (4.4) примерно в два раза меньше, чем по формулам (4.1), (4.2).

Отметим, что в теореме 1 работы [8] и в аналогичной теореме настоящей работы показано, что точность аппроксимации методов [8] и настоящей работы имеет один порядок по δ.

Наиболее затратной частью при численной реализации методов локализации является вычисление усреднений. Поскольку в работе [8] используются две усредняющие функции, а в настоящей работе одна, то можно рассчитывать, что в некоторых ситуациях новые методы будут более экономичными. Сравним по экономичности вычислений методы настоящей работы с неклассической областью усреднения и методы работы [8], реализованные с помощью формул (4.4).

Основными при экономичной численной реализации методов работы [8] являются формулы (4.3), для методов настоящей работы — формулы (1.7). Нетрудно заметить, что число операций при вычислении по формуле (1.7) в четыре раза меньше, чем по формуле (4.3) (предполагается, что n_1, n_2 в этих формулах одинаковы).

В случае реализации формул (1.7), (4.3) с помощью БПФ реализация (1.7) требует двух преобразований Фурье (прямого и обратного), в то время как реализация (4.3) требует трех преобразований Фурье (одного прямого и двух обратных). Таким образом, и в этом случае новые методы оказываются экономичнее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
2. **Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
3. **Vasin V. V., Ageev A. L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995. 255 с.
4. **Малла С.** Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
5. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / ред. Я. А. Фурмана. М.: Физматлит, 2002. 596 с.
6. **Гонсалес Р., Вудс Р.** Цифровая обработка изображений. Изд. 3-е исправленное и дополненное. М.: Техносфера, 2012. 1104 с.
7. **Антонова Т.В.** Метод локализации линии разрыва приближенно заданной функции двух переменных // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 345–357.
8. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** К вопросу о глобальной локализации линий разрыва функции двух переменных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 2. С. 12–23. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-12-23 .
9. **Mafi M., Rajaei H., Cabrerizo M., and Adjouadi M.** A robust edge detection approach in the presence of high impulse noise intensity through switching adaptive median and fixed weighted mean filtering // IEEE Transactions on image processing. 2018. Vol. 27, no. 11. P. 5475–5489. doi: 10.1109/TIP.2018.2857448 .
10. **Al-nasrawi M., Deng G., Thai B.** Edge-aware smoothing through adaptive interpolation // Signal, Image and Video Processing. 2018. Vol. 12. P. 347—354. doi: 10.1007/s11760-017-1164-x .
11. **Чочиа П.А.** Контурно-ограниченное сглаживание, сохраняющее структуру // Информационные процессы. 2020. Т. 20, № 3. С. 193–204.
12. **Ageev A.L., Antonova T.V.** New methods for the localization of discontinuities of the first kind for functions of bounded variation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2013. Vol. 21. no. 2. P. 177–191.
13. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 1. 8-е изд. М.: Физматлит, 2003. 680 с.
14. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 3. 8-е изд. М.: Физматлит, 2003. 728 с.

Поступила 19.03.2021
После доработки 13.05.2021
Принята к публикации 17.05.2021

Агеев Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: ageev@imm.uran.ru

Антонова Татьяна Владимировна
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: tvantonova@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for the solution of ill-posed problems]. Moscow: Nauka Publ., 1979, 288 p.
2. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications.* Inverse and Ill-Posed Problems Series, Utrecht: VSP, 2002, 281 p. ISBN: 90-6764-367-X/hbk . Original Russian text published in Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya*, Moscow: Nauka Publ., 1978, 206 p.
3. Vasin V.V., Ageev A.L. Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995, 255 p. ISBN: 9789067641913 .
4. Mallat S. *A wavelet tour of signal processing: the sparse way.* NY: Acad. Press, 1999, 620 p. ISBN: 0-12-466606-X . Translated to Russian under the title *Veivlety v obrabotke signalov*, Moscow: Mir Publ., 2005, 671 p.
5. Furman Ya.A. (ed.). *Vvedenie v konturnyi analiz i ego prilozheniya k obrabotke izobrazhenii i signalov* [Introduction to contour analysis and its application to image and signal processing]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2002, 596 p. ISBN: 5-9221-0255-9 .
6. Gonzalez R.C., Woods R.E. *Digital image processing*, 3rd Ed., NJ: Pearson Prentice Hall, 2006, 976 p. ISBN: 978-0131687288 . Translated to Russian under the title *Tsifrovaya obrabotka izobrazhenii*, Izdanie 3-e ispravlennoe i dopolnennoe, Moscow: Tekhnosfera Publ., 2012, 1104 p.
7. Antonova T.V. Localization method for lines of discontinuity of an approximately defined function of two variables. *Numer. Analys. Appl.*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 285–296. doi: 10.1134/S1995423912040015 .
8. Ageev A.L., Antonova T.V. On the problem of global localization of discontinuity lines for a function of two variables. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2019, vol. 307, no. 1, pp. 1–12. doi: 10.1134/S0081543819070010 .
9. Mafi M., Rajaei H., Cabrerizo M., and Adjouadi M. A robust edge detection approach in the presence of high impulse noise intensity through switching adaptive median and fixed weighted mean filtering. *IEEE Transactions on image processing*, 2018, vol. 27, no. 11, pp. 5475–5489. doi: 10.1109/TIP.2018.2857448 .
10. Al-nasrawi M., Deng G., Thai B. Edge-aware smoothing through adaptive interpolation. *Signal, Image and Video Processing*, 2018, vol. 12, pp. 347–354. doi: 10.1007/s11760-017-1164-x .
11. Chochia P.A. Contour-limited smoothing preserving image structure. *Informatsionnyye protsessy*, 2020, vol. 20, no. 3. pp. 193–204 (in Russian).
12. Ageev A.L., Antonova T.V. New methods for the localization of discontinuities of the first kind for functions of bounded variation. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2013, vol. 21, no. 2, pp. 177–191. doi: 10.1515/jip-2012-0039 .
13. Fikhtenholtz G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Differential and Integral Calculus Course]. Vol. 1. Ed. 8, Moscow: Fizmatlit Publ., 2003, 680 p. ISBN: 5-9221-0156-0 .
14. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Differential and Integral Calculus Course]. Vol. 3. Ed. 8, Moscow: Fizmatlit Publ., 2003, 728 p. ISBN: 5-9221-0158-7 .

Received March 19, 2021
Revised May 13, 2021
Accepted May 17, 2021

Alexander Leonidivich Ageev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: ageev@imm.uran.ru .

Tatiana Vladimirovna Antonova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: tvantonova@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. L. Ageev, T. V. Antonova. Algorithms for localizing discontinuity lines with a new type of averaging, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 5–18 .