ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 4 2021

УДК 512.55

# ПИРСОВСКИЕ СЛОИ ПОЛУКОЛЕЦ КОСЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

**М. В. Бабенко, В. В. Чермных**

Известно, что произвольное полукольцо с единицей изоморфно полукольцу сечений своего пирсовского пучка. Конструкция пучка Пирса активно использовалась при изучении алгебр с нетривиальным множеством центральных идемпотентов. В частности, имеется много результатов, в которых кольцо или полукольцо описываются в терминах их пирсовских слоев. В статье изучаются полукольца с некоторыми дополнительными свойствами на аннуляторы, такие как риккартовы, строго риккартовы, квазибэровские полукольца. Основным объектом статьи является полукольцо косых многочленов $R = S[x, \varphi]$ над полукольцом $S$. Пусть $R$ — строго риккартово, риккартово без нильпотентных элементов или квазибэровское полукольцо, эндоморфизм $\varphi$ является инъективным или жестким. Нами получены характеризации полукольца $R$. При этом устанавливаются связи $R$ со свойствами полукольца $S$ и пирсовских слоев полукольца $R$ или $S$.

Ключевые слова: полукольцо косых многочленов, пирсовские слои, риккартово полукольцо, квазибэровское полукольцо.

**M. V. Babenko, V. V. Chermnykh. Pierce stalks of semirings of skew polynomials.**

It is known that an arbitrary semiring with unity is isomorphic to the semiring of sections of its Pierce sheaf. The structure of the Pierce sheaf was actively used in the study of algebras with a nontrivial set of central idempotents. In particular, there are many results in which rings or semirings are described in terms of their Pierce stalks. Semirings with some additional conditions on the annihilators such as Rickart, strongly Rickart, and quasi-Baer semirings are studied in the paper. The main object of study is a semiring $R = S[x, \varphi]$ of skew polynomials over the semiring $S$. Let $R$ be a strongly Rickart, Rickart without nilpotent elements, or quasi-Baer semiring, and let an endomorphism $\varphi$ be injective or rigid. Characterizations of the semiring $R$ are obtained. Connections are established between $R$ and the properties of the semiring $S$ and the Pierce stalks of the semiring $R$ or $S$.

Keywords: semiring of skew polynomials, Pierce stalks, Rickart semiring, quasi-Baer semiring.

**MSC:** 16Y60

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-48-60

## Введение

В 1967 году Р. С. Пирс предложил конструкцию пучка колец, основанную на булевом пространстве кольца [1]. В той же статье было доказано, что любое кольцо изоморфно кольцу глобальных сечений своего пирсовского пучка. Пирсовский пучок активно применялся при изучении колец, обладающих нетривиальной булевой алгеброй центральных идемпотентов (например, [2–4]). Первоначально пирсовский пучок использовался как аппарат для изучения алгебраических свойств колец. В некоторых случаях были получены характеризации колец в терминах свойств их пирсовского пучка — пирсовских слоев, топологических свойств базисного и накрывающего пространств. Особо отметим результаты А. А. Туганбаева [5, гл. 13] о связях колец и их пирсовских слоев, при доказательстве которых использовалась чисто алгебраическая техника, т. е. без привлечения топологических свойств пучков. В [6] построен полукольцевой аналог пирсовского пучка и доказана изоморфность пирсовского представления. В статьях [7; 8] получены характеризации полуколец свойствами их пирсовских слоев.

В настоящей работе изучаются пирсовские слои полуколец косых многочленов. Пусть $\mathcal{P}$ — такой класс полуколец, что полукольцо $S$ принадлежит $\mathcal{P}$ в точности тогда, когда каждый пирсовский слой полукольца $S$ лежит в $\mathcal{P}$. В пп. (5), (6) предложения 2 указаны условия, при которых полукольцо косых многочленов $S[x, \varphi]$ принадлежит классу $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда в $\mathcal{P}$ лежит полукольцо косых многочленов над каждым пирсовским слоем полукольца $S$. В дальнейшем этот результат позволяет устанавливать связь между полукольцом многочленов и пирсовскими слоями полукольца многочленов или коэффициентов. Основными результатами статьи являются теоремы 1–3, дающие характеризации соответственно строго риккартова, риккартова без нильпотентных элементов и квазибэровского полуколец косых многочленов в терминах пирсовских слоев.

## 1. Первоначальные понятия

*Полукольцом* называется непустое множество $S$ с операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, если $\langle S,+\rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0, $\langle S,\cdot\rangle$ — полугруппа с нейтральным элементом 1, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и $0a=0=a0$ для любого $a\in S$. Предполагается, что все рассматриваемые нами полукольца с единицей, отличной от нуля.

Пусть $S$ — полукольцо, $\varphi$ — эндоморфизм полукольца $S$, $R=S[x,\varphi]$ — множество всех многочленов от переменной $x$ и с коэффициентами из $S$. Сложение $+$ многочленов определяется обычным образом, а умножение — исходя из правила $xa=\varphi(a)x$. Непосредственно проверяется, что $S[x,\varphi]$ является полукольцом, которое называется *левым полукольцом косых многочленов*.

Идемпотент $e$ полукольца $S$ называется *дополняемым*, если для некоторого $e^{\perp}\in S$ выполняется $e+e^{\perp}=1$ и $ee^{\perp}=0$. Если при этом идемпотент $e$ является центральным (выполняется $es=se$ для любого $s\in S$), то его дополнение $e^{\perp}$ задается однозначно и также является центральным дополняемым идемпотентом. Множество всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца $S$ обозначим через $BS$. Со сложением $e\oplus f=ef^{\perp}+e^{\perp}f$ и обычным полукольцевым умножением получаем булево кольцо $\langle BS,\oplus,\cdot\rangle$.

Пусть $M$ — максимальный идеал кольца $BS$. Введем на полукольце $S$ отношение

$$a\equiv b(\rho_M)\Leftrightarrow ae^{\perp}=be^{\perp} \text{ для некоторого } e\in M.$$

Это отношение является конгруэнцией на полукольце $S$, которая называется *пирсовской* конгруэнцией. Факторполукольцо $S/\rho_M$ по пирсовской конгруэнции называется *пирсовским слоем* полукольца $S$.

Для многочленов

$$f=f_0+f_1x+f_2x^2+\ldots+f_kx^k,\quad g=g_0+g_1x+g_2x^2+\ldots+g_mx^m,$$

где $f_i,g_j\in S$, и произвольного $n\in\mathbb{N}$ положим

$$f\equiv_n g\Longleftrightarrow f_0=g_0,\ldots,f_{n-1}=g_{n-1}.$$

В частности, $f\equiv_1 g\Longleftrightarrow f_0=g_0$. Стандартно проверяется, что $\equiv_n$ является конгруэнцией на $R=S[x,\varphi]$, а ее класс нуля есть идеал $Rx^n$. Очевиден также изоморфизм $S\cong R/\equiv_1$.

**Предложение 1.** *Пусть $\varphi$ — инъективный эндоморфизм полукольца $S$, $f$ — многочлен из $R=S[x,\varphi]$ со свободным членом $f_0$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $h_n\colon R\to R/\equiv_n$ — естественный эпиморфизм. Тогда справедливы утверждения:*

(1) *если $h_n(f)$ — центральный дополняемый идемпотент в $h_n(R)$, то $f_0$ — центральный дополняемый идемпотент в $R$, $f_0=\varphi(f_0)$ и $h_n(f)=h_n(f_0)$;*

(2) *если $f$ — центральный дополняемый идемпотент в $R$, то $f\in S$ и $f=\varphi(f)$;*

(3) *множество $BR$ всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца $R$ совпадает с множеством $\beta S$ всех таких центральных дополняемых идемпотентов $e$ полукольца $S$, что $\varphi(e)=e$;*

(4) *множество $Bh_n(R)$ всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца $h_n(R)$ совпадает с $h_n(\beta S)\cong\beta S$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Случай $h_n(f) = 0$ очевиден, поэтому пусть $h_n(f) \neq 0$. Из $f \equiv_n f^2$ следует $f_0 = f_0^2$. Если $f_0 = 0$, то для младшего (ненулевого) члена $ax^k$, $0 < k < n$, получаем, что у $f^2$ член $k$-й степени равен нулю; противоречие. Очевидно, $f_0$ лежит в центре полукольца $S$. Из $h_n(f)h_n(x) = h_n(x)h_n(f)$ следует $f_0x = xf_0 = \varphi(f_0)x$, поэтому $f_0$ — центральный идемпотент полукольца $R$ и $f_0 = \varphi(f_0)$. Можно считать, что многочлен $f$ имеет вид $f_0 + f_1x + \ldots + f_{n-1}x^{n-1}$, а дополнение к $h_n(f)$ — класс $h_n(g)$ для $g = g_0 + g_1x + \ldots + g_{n-1}x^{n-1}$. Из равенств

$$h_n(f)h_n(g) = h_n(0), \tag{1.1}$$

$$h_n(f) + h_n(g) = h_n(1) \tag{1.2}$$

получаем

$$f_0g_0 = 0, \quad f_0 + g_0 = 1, \quad f_i + g_i = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Ясно, что $g_0$ является центральным идемпотентом и $\varphi(g_0) = g_0$. Индукцией покажем, что $f_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n-1$. Из (1.1) имеем $0 = f_0g_1 + f_1\varphi(g_0) = f_0g_1 + f_1g_0$. Отсюда $0 = g_0(f_0g_1 + f_1g_0) = f_1g_0$ и $0 = f_0(f_0g_1 + f_1g_0) = f_0g_1$. Далее, $0 = f_0(f_1 + g_1) = f_0f_1$. Следовательно, $0 = f_1g_0 + f_0f_1 = f_1(g_0 + f_0) = f_1$, база индукции установлена. Из (1.1) в силу индуктивного предположения следует $0 = f_0g_k + f_kg_0$. Отсюда $0 = g_0(f_0g_k + f_kg_0) = f_kg_0$ и $0 = f_0(f_0g_k + f_kg_0) = f_0g_k$. Кроме того $0 = f_0(f_k + g_k) = f_0f_k$. Таким образом, из (1.2) следует $0 = f_kg_0 + f_kf_0 = f_k(g_0 + f_0) = f_k$. Получили, что $h_n(f) = h_n(f_0)$.

(2) Пусть $n$ — целое число, большее степени многочлена $f$. Рассмотрим естественный эпиморфизм $h_n\colon R \to R/\equiv_n$. Тогда $h_n(f)$ — центральный дополняемый идемпотент в $h_n(R)$. По п. (1) $h_n(f) = h_n(f_0)$, откуда $f = f_0 \in S$ и $\varphi(f) = \varphi(f_0) = f_0 = f$.

(3) Включение $BR \subseteq \beta S$ доказано в п. (2). Любой $e \in \beta S$ является дополняемым идемпотентом в $R$, а условие $\varphi(e) = e$ влечет $ex = xe$, и поскольку $e$ перестановочен с любым элементом из $S$, то $e$ — центральный элемент в $R$.

(4) Следует из пп. (1), (3). □

Заметим, что для произвольного полукольца $S$ и его эндоморфизма $\varphi$ включение $e \in \beta S$ влечет $e^\perp \in \beta S$; это следует из единственности дополнения у любого центрального дополняемого идемпотента полукольца $S$. Далее непосредственно устанавливается, что множество $\beta S$ является подкольцом с единицей кольца $\langle BS, \oplus, \cdot \rangle$. Примеры, показывающие, что $\beta S$ может быть собственным подкольцом $BS$, находятся легко. Например, рассмотрим перестановку атомов полной атомной булевой решетки $L$. Она продолжается до автоморфизма $\varphi$ решетки $L$. Атомы, не являющиеся неподвижными при исходной перестановке, не будут лежать в $\beta L$.

Пусть $\varphi$ — инъективный эндоморфизм полукольца $S$ и $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$. По предложению 1 выполняется $BS = BR \cong Bh_n(R)$. Пусть $M$ — максимальный идеал кольца $BS$, $\alpha_M, \rho_M, \xi_M$ — пирсовские конгруэнции на полукольцах $S, R$ и $h_n(R)$ соответственно. Обозначим через $P(A)$ множество всех пирсовских конгруэнций на полукольце $A$. Тогда отображения

$$s\colon P(S) \to P(R), \quad s(\alpha_M) = \rho_M, \quad t\colon P(S) \to P(h_n(R)), \quad t(\alpha_M) = \xi_M,$$

задают биекции между множествами пирсовских конгруэнций на полукольцах $S, R$ и $h_n(R)$.

Для максимального идеала $M$ кольца $BS$ множество конечных сумм $SM = \{\sum a_ie_i : a_i \in S, e_i \in M\}$ образует идеал полукольца $S$, порожденный идемпотентами из $M$, а также является классом нуля пирсовской конгруэнции $\alpha_M$.

Пусть $\mathcal{P}$ — класс полуколец, удовлетворяющих условию: полукольцо $S$ принадлежит $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда каждый пирсовский слой полукольца $S$ принадлежит $\mathcal{P}$.

**Предложение 2.** *Пусть* $\varphi$ *— инъективный эндоморфизм полукольца* $S$, $R = S[x,\varphi]$, $\varphi(e) = e$ *для любого* $e \in BS$, $M$ *— максимальный идеал кольца* $BS$. *Тогда справедливы утверждения*:

(1) $\varphi(SM) \subseteq SM$;

(2) $\varphi$ *индуцирует естественный инъективный эндоморфизм* $\bar{\varphi}$ *пирсовского слоя* $S/\alpha_M$;

(3) $R/\rho_M \cong (S/\alpha_M)[x,\bar{\varphi}]$;

(4) $h_n(R)/\xi_M \cong (S/\alpha_M)[x,\bar{\varphi}]/\equiv_n$;

(5) $R \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (S/\alpha_M)[x,\bar{\varphi}] \in \mathcal{P}$ *для каждого пирсовского слоя* $S/\alpha_M$;

(6) $h_n(R) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (S/\alpha_M)[x,\bar{\varphi}]/\equiv_n \in \mathcal{P}$ *для каждого пирсовского слоя* $S/\alpha_M$.

Доказательство. (1) Пусть $m = a_1e_1 + \ldots + a_ke_k \in SM$ для $a_i \in S, e_i \in M$. Тогда $\varphi(m) = \varphi(a_1)e_1 + \ldots + \varphi(a_k)e_k \in SM$.

(2) Элементы факторполукольца $S/\alpha_M$ обозначим через $\bar{a}$. Стандартно проверяется, что отображение $\bar{\varphi} : S/\alpha_M \to S/\alpha_M$, заданное правилом $\bar{\varphi}(\bar{a}) = \overline{\varphi(a)}$, корректно и является эндоморфизмом полукольца $S/\alpha_M$. Пусть $\bar{a},\bar{b} \in S/\alpha_M$ такие, что $\bar{\varphi}(\bar{a}) = \bar{\varphi}(\bar{b})$. Тогда $\varphi(a) \equiv \varphi(b)(\alpha_M)$, откуда $\varphi(a)e = \varphi(b)e$ для некоторого $e \in BS \setminus M$. Поскольку $\varphi(e) = e$, то $\varphi(ae) = \varphi(be)$. В силу инъективности $\varphi$ получаем $ae = be$. Отсюда $a \equiv b(\alpha_M)$, $\bar{a} = \bar{b}$, и $\bar{\varphi}$ — инъективный эндоморфизм.

(3) Элементы факторполукольца $R/\rho_M$ обозначим через $[f]$ для многочлена $f = f_0 + f_1x + \ldots + f_kx^k$. Рассмотрим соответствие $\gamma : R/\rho_M \to (S/\alpha_M)[x,\bar{\varphi}]$, при котором $\gamma([f]) = \bar{f}_0 + \bar{f}_1x + \ldots + \bar{f}_kx^k$. Если $[f] = [g]$ для $f, g \in R$, то $fe^{\perp} = ge^{\perp}$ для некоторого $e \in M$. Тогда для соответствующих коэффициентов многочленов $f$ и $g$ получаем $f_ie^{\perp} = g_ie^{\perp}$, следовательно, $\bar{f}_i = \bar{g}_i$. Показали, что $\gamma$ — отображение. Пусть сейчас $\bar{f}_0+\bar{f}_1x+\ldots+\bar{f}_kx^k = \bar{g}_0+\bar{g}_1x+\ldots+\bar{g}_kx^k$, где $k = \max\{\deg f, \deg g\}$. Тогда $f_i \equiv g_i(\alpha_M)$, т.е. $f_ie_i^{\perp} = g_ie_i^{\perp}$ для некоторых $e_i \in M$, $i = 0,\ldots,k$. Для элемента $e = (e_0^{\perp} \ldots e_k^{\perp})^{\perp} \in M$ имеем $fe^{\perp} = ge^{\perp}$, поэтому $f \equiv g(\rho_M)$ и $[f] = [g]$. Следовательно, $\gamma$ — инъективное отображение. Очевидно, что $\gamma$ — сюръективное отображение. Обычным образом проверяется, что $\gamma$ сохраняет полукольцевые операции.

(4) доказывается так же, как и п. (3).

(5) и (6) следуют из пп. (3), (4). □

Полукольцо называется *левым полукольцом Безу*, если каждый его конечно порожденный левый идеал является главным левым идеалом.

Пусть $\varphi$ — инъективный эндоморфизм полукольца $S$, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$, и пусть $R = S[x,\varphi]$ — левое полукольцо Безу. По [9, теорема 5] это равносильно тому, что каждый пирсовский слой $R/\rho_M$ полукольца $R$ является левым полукольцом Безу. Тогда по предложению 2 получаем, что $R$ — левое полукольцо Безу в точности тогда, когда левым полукольцом Безу является $(S/\alpha_M)[x,\bar{\varphi}]$ над любым пирсовским слоем $S/\alpha_M$. Аналогичное рассуждение можно провести для полуколец $A$, пирсовские слои которых принадлежат тому же классу, что и $A$.

Полукольцо $S$ называется:

*абелевым*, если каждый идемпотент из $S$ является центральным;

*полукольцом без нильпотентных элементов*, если для любого $a \in S$ $a^2 = 0$ влечет $a = 0$;

*заменяемым справа*, если для любых $a, b \in S$ таких, что $a + b = 1$, найдется дополняемый необязательно центральный идемпотент $e$ такой, что $e \in aS, e^{\perp} \in bS$.

Каждое из указанных полуколец принадлежит классу $\mathcal{P}$; это показано соответственно в [7, предложение 4; 8, предложение 3; 9, теорема 4].

Укажем еще и представитель класса $\mathcal{P}$. Полукольцо $S$, в котором для любого элемента $a$ найдется такой элемент $s \in S$, что $a = a^2s$, называется *строго регулярным.*

**Лемма 1.** *Для полукольца* $S$ *равносильны условия*:

(1) $S$ *— строго регулярное полукольцо*;

(2) *каждый пирсовский слой полукольца* $S$ *является строго регулярным полукольцом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) справедлива, поскольку факторполукольцо строго регулярного полукольца строго регулярно.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть каждый пирсовский слой $S/\alpha_M$, $M \in \operatorname{Max} BS$, строго регулярен. Пусть $a \in S$, его класс в слое $S/\alpha_M$ обозначим через $\bar{a}$. Для каждого $M \in \operatorname{Max} BS$ имеем $\bar{a}^2\bar{s}_M = \bar{a}$ для подходящего $s_M \in S$. Тогда $a^2 s_M e_M^{\perp} = ae_M^{\perp}$ для некоторого $e_M \in M$. Сумма всех главных идеалов $(e_M^{\perp})$ в кольце $BS$ (напомним, что операцию сложения в $BS$ мы обозначили через $\oplus$) является идеалом, не лежащим ни в одном максимальном идеале из $BS$. Поэтому $e_1^{\perp}u_1 \oplus \ldots \oplus e_k^{\perp}u_k = 1$ для некоторых $u_i \in BS$. Переходя к операциям полукольца $S$, получаем $e_1^{\perp}t_1 + \ldots + e_k^{\perp}t_k = 1$ для подходящих $t_i \in S$. Для соответствующих представителей $s_i \in \{s_M\}$ справедливы равенства $a^2 s_i e_i^{\perp} = ae_i^{\perp}$. Тогда $a^2(s_1e_1^{\perp}t_1 + \ldots + s_ke_k^{\perp}t_k) = a(e_1^{\perp}t_1 + \ldots + e_k^{\perp}t_k) = a$, и $S$ строго регулярно. $\square$

Лемма 1 и цитированные перед ней результаты позволяют получить следующее предложение, являющееся явным следствием предложения 2.

**Предложение 3.** *Пусть $\varphi$ — инъективный эндоморфизм полукольца $S$, $R = S[x, \varphi]$ и $\varphi(e) = e$ для $e \in BS$. Тогда справедливы утверждения*:

(1) *$R$ — левое полукольцо Безу* (*абелево, полукольцо без нильпотентных элементов, заменяемое справа, строго регулярное*) *тогда и только тогда, когда для каждого пирсовского слоя $S/\alpha_M$ полукольцо $(S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$ — левое полукольцо Безу* (*абелево, полукольцо без нильпотентных элементов, заменяемое справа, строго регулярное соответственно*);

(2) *$h_n(R)$ — левое полукольцо Безу* (*абелево, полукольцо без нильпотентных элементов, заменяемое справа, строго регулярное*) *тогда и только тогда, когда для каждого пирсовского слоя $S/\alpha_M$ полукольцо $(S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]/\equiv_n$ является левым полукольцом Безу* (*абелевым, полукольцом без нильпотентных элементов, заменяемым справа, строго регулярным соответственно*). $\square$

З а м е ч а н и е 1. Утверждение о строго регулярном полукольце отличается от остальных утверждений предложения 3. Оно лишь является формально верным, но мало что описывает. Дело в том, что для строгой регулярности полукольца $R$ необходима справедливость, допустим, равенства $x^2 f(x) = x$ для некоторого многочлена $f(x)$. По этой причине утверждение менее полезно, чем предваряющая его лемма 1.

## 2. Полукольца с условиями на аннуляторы

Далее нами используется техника, напрямую связанная с пирсовскими пучками. Дадим начальную информацию о пучковых представлениях и договоримся об обозначениях.

Пусть $S$ — произвольное полукольцо. Множество $\operatorname{Max} BS$ всех максимальных идеалов кольца $BS$ со стоуновской топологией образует пространство, являющееся нульмерным компактом (компактным хаусдорфовым пространством с базой открыто-замкнутых множеств); открытыми являются множества $D(A) = \{M \in \operatorname{Max} BS : M \not\supseteq A\}$ для произвольного идеала $A$ кольца $BS$, а множества вида $D(e)$, $e \in BS$, образуют базис открыто-замкнутых множеств.

Дизъюнктное объединение $P(S) = \dot\cup S/\alpha_M$ всех пирсовских слоев является топологическим пространством, называемым *накрывающим*, а пара $(P(S), \operatorname{Max} BS)$ образует *пирсовский пучок*. Для колец эта конструкция была введена Р. С. Пирсом [1], для полуколец — В. В. Чермных [6]. Непрерывные отображения из $\operatorname{Max} BS$ в $P(S)$ (каждая точка $M \in \operatorname{Max} BS$ отображается в "свой" пирсовский слой $S/\alpha_M$) называются *глобальными сечениями*. Глобальные сечения пирсовского пучка исчерпываются сечениями вида $\hat{s}$, $s \in S$, где $\hat{s}(M)$ — класс элемента $s$ в слое $S/\alpha_M$. Важными для применения пирсовских пучков к исследованию алгебр являются теоремы о представлениях: *каждое кольцо* (*полукольцо*) *с единицей изоморфно кольцу* (*соответственно полукольцу*) *всех глобальных сечений своего пирсовского пучка* [1, Theorem 4.4; 6, теорема 3].

Необходимые понятия и ссылки будем давать по мере необходимости. С деталями, связанными с пучковыми представлениями, можно ознакомиться в [10; 11].

**Лемма 2.** *Пусть $S$ — полукольцо, $A$ — идеал кольца $BS$. Тогда равносильны условия*:
(1) $D(A)$ — *открыто-замкнутое в* $\operatorname{Max} BS$ *множество*;
(2) $A$ — *главный идеал кольца* $BS$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $D(A)$ — открыто-замкнуто в $\operatorname{Max} BS$. Поскольку для любого $M \in D(A)$ выполняется $A \nsubseteq M$, то найдется элемент $e_M \in A \setminus M$. Семейство $T = \{D(e_M)\colon M \in D(A)\}$ покрывает $D(A)$. Пространство $\operatorname{Max} BS$ компактно, $D(A)$ замкнуто, поэтому выберем из $T$ конечное подпокрытие $\{D(e_1), \ldots, D(e_k)\}$. Получаем $D(A) = D(e_1) \cup \ldots \cup D(e_k) = D(e)$ для элемента $e = e_1 \vee \ldots \vee e_k$, и $A$ порождается как идеал в $BS$ элементом $e$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $A = eBS$ для некоторого $e \in BS$. Тогда $D(e) \cap D(e^{\perp}) = \varnothing$ и $D(e) \cup D(e^{\perp}) = \operatorname{Max} BS$, и $D(A) = D(e)$ — открыто-замкнуто в $\operatorname{Max} BS$. □

Левый идеал $\operatorname{ann}_l(A) = \{s \in S\colon sa = 0 \text{ для любого } a \in A\}$ полукольца $S$ называется *левым аннулятором* множества $A \subseteq S$; левый аннулятор элемента обозначается через $\operatorname{ann}_l(a)$. Если необходимо указать, в каком полукольце рассматривается аннулятор, то будем использовать обозначение вида $\operatorname{ann}_{l,S}(A)$. Полукольцо $S$ называется *риккартовым слева*, если для любого $a \in S$ найдется такой дополняемый идемпотент $e \in S$, что $\operatorname{ann}_l(a) = Se$. Элемент $s \in S$ называется *левым уравнителем* элементов $a, b \in S$, если $sa = sb$. Множество $\operatorname{eq}_l(a, b) = \{s \in S : sa = sb\}$ всех левых уравнителей элементов $a, b \in S$ является левым идеалом полукольца $S$. Полукольцо $S$ называется полукольцом *без левых уравнителей*, если $\operatorname{eq}_l(a, b) = 0$ для любых различных $a, b \in S$. Правосторонние понятия определяются симметричным образом, правый уравнитель обозначается $\operatorname{eq}_r(a, b)$. Полукольцо $S$ называется *строго риккартовым слева*, если для любых элементов $a, b \in S$ их левый уравнитель $\operatorname{eq}_l(a, b)$ порождается как левый идеал центральным дополняемым идемпотентом из $S$. Полукольцо $S$ называется *слабо симметрическим*, если для любых $a, b, c \in S$ $ac = bc$ равносильно $ca = cb$.

*Риккартовы справа и строго риккартовы справа полукольца* определяются симметричным образом.

**Лемма 3.** *Справедливы следующие утверждения*:
(1) *полукольцо строго риккартово слева в точности тогда, когда оно строго риккартово справа*;
(2) *строго риккартово слева полукольцо является слабо симметрическим.*

Доказательство. (1) Пусть $\operatorname{eq}_l(a, b) = Se$, $e \in BS$, и $r \in \operatorname{eq}_l(a, b)$. Тогда $r = se$ для некоторого $s \in S$. Из $ea = eb$ следует $ae = be$, $aes = bes$ и $ar = br$ в силу центральности $e$. Показали $\operatorname{eq}_l(a, b) \subseteq \operatorname{eq}_r(a, b)$. Аналогичными рассуждениями доказывается обратное включение, поэтому $\operatorname{eq}_r(a, b) = eS$.

(2) В силу п. (1) получаем слабую симметричность

$$ac = bc \Leftrightarrow c \in \operatorname{eq}_r(a, b) \Leftrightarrow c \in \operatorname{eq}_l(a, b) \Leftrightarrow ca = cb. \qquad \square$$

Учитывая лемму 3, договоримся в дальнейшем употреблять термин “*строго риккартово полукольцо*”.

В [8, теорема 1] получено описание строго риккартовых полуколец с использованием слабой симметричности и топологических свойств пирсовского пучка. Сейчас мы дадим новую характеризацию строго риккартовых полуколец.

**Предложение 4.** *Полукольцо $S$ строго риккартово тогда и только тогда, когда каждый пирсовский слой $S/\alpha_M$ — полукольцо без левых (равносильно, правых) уравнителей и* $\operatorname{eq}_l(a, b) \cap BS$ — *главный идеал кольца $BS$ для любых $a, b \in S$.*

Доказательство. Пусть $S$ — строго риккартово полукольцо, $S/\alpha_M$ — его произвольный пирсовский слой. Пусть $\hat{d}(M)\hat{a}(M) = \hat{d}(M)\hat{b}(M)$ для $d, a, b \in S$. Допустим, $\hat{d}(M) \neq \hat{0}(M)$. По свойствам пучков сечения $\widehat{da}$ и $\widehat{db}$ совпадают на некоторой открытой окрестности точки $M$. Тогда эти сечения совпадают и на некоторой открыто-замкнутой (например, базисной) окрестности $U$ точки $M$. Пусть $\hat{u}$ — характеристическое сечение множества $U$, совпадающее с единичным сечением на $U$ и с нулевым на $\operatorname{Max} BS \setminus U$. По условию $\mathrm{eq}_l(ua, ub) = Se$ для некоторого $e \in BS$. Заметим, что $uda = udb$, поскольку на $U$ равны сечения $\widehat{da}$ и $\widehat{db}$, а на $\operatorname{Max} BS \setminus U$ выполняется $\hat{u} = \hat{0}$. Элемент $u$ — центральный в $S$, поэтому $d \in \mathrm{eq}_l(ua, ub)$, откуда получаем $d = de$. Сечение $\hat{e}$ в каждом пирсовском слое принимает либо нулевое, либо единичное значение, и так как $\hat{0}(M) \neq \hat{d}(M) = \hat{d}(M)\hat{e}(M)$, то $\hat{e}(M) = \hat{1}(M)$. Имеем $\hat{a}(M) = \hat{e}(M)\hat{u}(M)\hat{a}(M) = \hat{e}(M)\hat{u}(M)\hat{b}(M) = \hat{b}(M)$, следовательно, пирсовский слой $S/\alpha_M$ — полукольцо без левых уравнителей. Далее, если $f \in \mathrm{eq}_l(a, b) \cap BS$, то для некоторого $s \in S$ выполняется $f = se$, откуда $fe = f$. Значит, $\mathrm{eq}_l(a, b) \cap BS$ — главный идеал в $BS$. *Необходимое условие* доказано.

*Обратно.* Пусть $a, b$ — произвольные элементы из $S$. Обозначим через $A = \mathrm{eq}_l(a, b) \cap BS$ — идеал кольца $BS$, а через $U$ — множество всех точек пространства $\operatorname{Max} BS$, в которых совпадают сечения $\hat{a}$ и $\hat{b}$. Справедливы импликации

$$\begin{aligned} M \in U \Leftrightarrow \hat{a}(M) = \hat{b}(M) \Leftrightarrow ea = eb \text{ для некоторого } e \in BS \setminus M \\ \Leftrightarrow A \nsubseteq M \Leftrightarrow M \in D(A), \end{aligned}$$

поэтому $U = D(A)$. По условию $A$ — главный идеал в $BS$, поэтому по лемме 2 $U$ — открыто-замкнутое множество в $\operatorname{Max} BS$. Рассмотрим характеристическое сечение множества $U$, равное $\hat{1}$ на $U$ и $\hat{0}$ на $\operatorname{Max} BS \setminus U$. Ясно, что оно имеет вид $\hat{e}$ для некоторого $e \in BS$. Поскольку $\hat{e}\hat{a} = \hat{e}\hat{b}$, то $e \in \mathrm{eq}_l(a, b)$. Пусть $s \in \mathrm{eq}_l(a, b)$, тогда $\hat{s}\hat{a} = \hat{s}\hat{b}$. По условию пирсовские слои — полукольца без левых уравнителей, следовательно, $\hat{s}(N) = \hat{0}(N)$ для каждого $N \notin U$. Отсюда получаем $\hat{s}\hat{e} = \hat{s}$, $se = s$, и $\mathrm{eq}_l(a, b) = Se$. Показали, что $S$ — строго риккартово полукольцо. $\square$

Замечание 2. Достаточное условие в предложении 4 симметрично, поскольку $\mathrm{eq}_l(a, b) \cap BS = \mathrm{eq}_r(a, b) \cap BS$.

Пусть $R = S[x, \varphi]$, $f = f_0 + f_1x + \ldots$, $g = g_0 + g_1x + \ldots \in R$ и $f_i \neq g_i$ — первая пара различных коэффициентов у $f, g$. Многочлены $\tilde{f} = f_ix^i + f_{i+1}x^{i+1} + \ldots$, $\tilde{g} = g_ix^i + g_{i+1}x^{i+1} + \ldots$ назовем *подходящей парой для* $f$ и $g$. Полукольцо $R = S[x, \varphi]$ назовем *полукольцом многочленов без левых* (*правых*) *слабых уравнителей*, если нулевой многочлен, и только он, является левым (правым) уравнителем подходящей пары многочленов $\tilde{f}, \tilde{g}$ для любых различных $f, g \in R$. Полукольцо $S$ называется *аддитивно сократимым*, если $a + c = b + c$ влечет $a = b$ для любых $a, b, c \in S$.

**Предложение 5.** *Пусть $\varphi$ — инъективный эндоморфизм полукольца $S$, $R = S[x, \varphi]$. Тогда справедливы утверждения*:

(1) *$S$ — полукольцо без левых* (*правых*) *уравнителей тогда и только тогда, когда $R$ — полукольцо без левых* (*правых*) *слабых уравнителей*;

(2) *если $S$ — аддитивно сократимое полукольцо и $R$ — полукольцо без левых* (*правых*) *слабых уравнителей, то $R$ — полукольцо без левых* (*правых*) *уравнителей.*

Доказательство. (1) Пусть $S$ — полукольцо без левых уравнителей и $f = f_0 + \ldots + f_ix^i + \ldots$, $g = g_0 + \ldots + g_ix^i + \ldots$ — неравные многочлены из $R$. Предположим, $h \neq 0$, $h_j$ — первый отличный от нуля его коэффициент, $f_i, g_i$ — первая пара различных коэффициентов многочленов $f$ и $g$ соответственно и $h\tilde{f} = h\tilde{g}$. Сравнивая младшие коэффициенты многочленов $h\tilde{f}$ и $h\tilde{g}$, имеем $h_j\varphi^j(f_i) = h_j\varphi^j(g_i)$. Поскольку $f_i \neq g_i$ влечет $\varphi^j(f_i) \neq \varphi^j(g_i)$ в силу инъективности $\varphi$, то получаем $h_j = 0$. Противоречие показывает, что $R$ — полукольцо без левых слабых уравнителей. Обратная импликация доказывается, если различные элементы из $S$ рассмотреть как подходящую пару многочленов нулевой степени.

(2) Пусть $S$ — аддитивно сократимое полукольцо и многочлены $h, f, g$ такие, как и в доказательстве п. (1), и для них выполняется $hf = hg$. Рассмотрим члены многочленов $hf$ и $hg$ степени $j + i$. Имеем

$$h_j\varphi^j(f_i) + \ldots + h_{j+i}\varphi^{j+i}(f_0) = h_j\varphi^j(g_i) + \ldots + h_{j+i}\varphi^{j+i}(g_0).$$

Учитывая равенство начальных коэффициентов многочленов $f$ и $g$ и пользуясь аддитивной сократимостью, получаем $h_j\varphi^j(f_i) = h_j\varphi^j(g_i)$, противоречие, как и в п. (1), следовательно, $R$ — полукольцо без левых уравнителей.

Отметим, что доказательство правосторонних случаев принципиально не отличается от левосторонних. После умножения на многочлен $h$ справа мы в обоих пунктах приходим к равенству $f_i\varphi^i(h_j) = g_i\varphi^i(h_j)$, все остальные рассуждения повторяются. □

**Теорема 1.** *Пусть $\varphi$ — инъективный эндоморфизм полукольца $S$, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$. Рассмотрим следующие условия*:

(1) $R = S[x, \varphi]$ *— строго риккартово полукольцо*;

(2) *каждый пирсовский слой полукольца $R$ является полукольцом без левых (равносильно, правых) уравнителей и $\mathrm{eq}_l(f, g) \cap BR$ является главным идеалом кольца $BR$ для любых $f, g \in R$*;

(3) *каждый пирсовский слой полукольца $R$ является полукольцом без левых (равносильно, правых) слабых уравнителей и $\mathrm{eq}_l(f, g) \cap BR$ является главным идеалом кольца $BR$ для любых $f, g \in R$*;

(4) *каждый пирсовский слой полукольца $S$ является полукольцом без левых (равносильно, правых) уравнителей и $\mathrm{eq}_l(a, b) \cap BS$ является главным идеалом кольца $BS$ для любых $a, b \in S$*;

(5) $S$ *— строго риккартово полукольцо.*

*Тогда* (1) ⇔ (2), (3) ⇔ (4) ⇔ (5), (2) ⇒ (3). *Если $S$ — аддитивно сократимое полукольцо (в частности, кольцо), то все пять условий равносильны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) ⇔ (2) и (4) ⇔ (5) доказываются прямым применением предложения 4, импликация (2) ⇒ (3) очевидна.

(3) ⇔ (4). Пусть каждый пирсовский слой $R/\rho_M$ — полукольцо без левых слабых уравнителей. По предложению 2 это равносильно тому, что для любого пирсовского слоя $S/\alpha_M$ полукольцо косых многочленов $(S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$ является полукольцом без левых слабых уравнителей, а это равносильно по предложению 5 условию, что каждый пирсовский слой полукольца $S/\alpha_M$ является полукольцом без левых уравнителей.

Покажем сейчас равносильность условий с уравнителями. Если $a, b \in S$, то, рассматривая их как многочлены из $R$, получаем $\mathrm{eq}_l(a, b) \cap BR = eBR$ для некоторого $e \in BR$, а с учетом предложения 1 $\mathrm{eq}_l(a, b) \cap BS = eBS$. Обратно, пусть каждый пирсовский слой $S/\alpha_M$ — полукольцо без левых уравнителей и $\mathrm{eq}_l(a, b) \cap BS$ — главный идеал в $BS$ для любых $a, b \in S$. Пусть $f = a_0 + \ldots + a_kx^k$ и $g = b_0 + \ldots + b_kx^k$, $k = \max(\deg f, \deg g)$, — произвольные многочлены из $R$. По условию $\mathrm{eq}_l(a_i, b_i) \cap BS = e_iBS$ для подходящих $e_i \in BS$, $i = 0 \ldots, k$. Положим $e = e_0 \cdot \ldots \cdot e_k$. Очевидно, $e \in \mathrm{eq}_l(f, g) \cap BS = \mathrm{eq}_l(f, g) \cap BR$. Если $u \in \mathrm{eq}_l(f, g) \cap BR$, то $ua_i = ub_i$, поэтому $u = e_iu$ для всех $i = 0, \ldots, k$. Получаем $u = e_0u \cdot \ldots \cdot e_ku = eu$, и $\mathrm{eq}_l(f, g) \cap BR = eBR$.

Наконец, в силу предложения 5 для аддитивно сократимого полукольца $S$ справедлива импликация (3) ⇒ (2). □

Похожая схема применяется при доказательстве утверждения для риккартовых полуколец без нильпотентных элементов.

**Теорема 2.** *Пусть $\varphi$ — инъективный эндоморфизм полукольца $S$, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$. Тогда равносильны следующие условия*:

(1) $R = S[x, \varphi]$ *— риккартово слева или справа полукольцо без нильпотентных элементов*;

(2) *каждый пирсовский слой полукольца $R$ является полукольцом без делителей нуля и $\mathrm{ann}_l(f) \cap BR$ является главным идеалом кольца $BR$ для любого $f \in R$*;

(3) *каждый пирсовский слой полукольца $S$ является полукольцом без делителей нуля и* $\mathrm{ann}_l(a) \cap BS$ *является главным идеалом кольца $BS$ для любого $a \in S$*;

(4) *$S$ — риккартово слева или справа полукольцо без нильпотентных элементов.*

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2). Из [8, предложение 4] условие (1) равносильно тому, что все пирсовские слои $R/\rho_M$ — полукольца без делителей нуля и $D(\mathrm{ann}_l(f) \cap BR)$ — открыто-замкнуто в $\mathrm{Max}\, BR$. Стандартно проверяется, что $\mathrm{ann}_l(f) \cap BR$ является идеалом кольца $BR$, причем главным по лемме 2.

(2) $\Rightarrow$ (3). По предложению 2 $(S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$ является полукольцом без делителей нуля для каждого пирсовского слоя $S/\alpha_M$. Очевидно, что $S/\alpha_M$ — полукольцо без делителей нуля. По предложению 1 $BR = BS$, поэтому $\mathrm{ann}_l(a) \cap BS$ является главным идеалом кольца $BS$ для любого $a \in S$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Непосредственно проверяется, что полукольцо косых многочленов с инъективным эндоморфизмом над полукольцом без делителей нуля является полукольцом без делителей нуля. Поэтому каждый пирсовский слой $R/\rho_M \cong (S/\alpha_M)[x, \bar{\varphi}]$ — полукольцо без делителей нуля. Условие на аннуляторы доказывается также, как и аналогичное утверждение об уравнителях в теореме 1, поскольку $\mathrm{ann}_l(a) = \mathrm{eq}_l(a, 0)$.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) по [8, предложение 4]. □

Полукольцо $S$ назовем *квазибэровским*, если для любого идеала $A$ из $S$ $\mathrm{ann}_l(A) = Se$ для некоторого дополняемого идемпотента $e \in S$. Квазибэровские кольца были определены в [12].

**Лемма 4.** *Для полукольца $S$ равносильны утверждения*:

(1) *$S$ — квазибэровское полукольцо*;

(2) *для любого левого идеала $L$ $\mathrm{ann}_l(L) = Se$ для некоторого дополняемого идемпотента $e \in S$*;

(3) *для любого правого идеала $R$ $\mathrm{ann}_r(R) = eS$ для некоторого дополняемого идемпотента $e \in S$*;

(4) *для любого идеала $A$ $\mathrm{ann}_r(A) = eS$ для некоторого дополняемого идемпотента $e \in S$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $L$ — левый идеал в $S$, тогда $LS$ — идеал, и тогда $\mathrm{ann}_l(L) = \mathrm{ann}_l(LS) = Se$.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) очевидна.

Такими же рассуждениями доказывается (3) $\Leftrightarrow$ (4).

(1) $\Rightarrow$ (3). Пусть $R$ — правый идеал, тогда $\mathrm{ann}_r(R)$ — идеал, поэтому

$$\mathrm{ann}_l(\mathrm{ann}_r(R)) = Se$$

для некоторого дополняемого идемпотента $e \in S$. Следовательно,

$$\mathrm{ann}_r(R) = \mathrm{ann}_r(\mathrm{ann}_l(\mathrm{ann}_r(R))) = \mathrm{ann}_r(Se) = e^{\perp}S.$$

(4) $\Rightarrow$ (2) доказывается симметрично предыдущей импликации. □

Эндоморфизм полукольца $S$ называется *жестким*, если $a\varphi(a) = 0$ влечет $a = 0$; полукольцо $S$ в этом случае называется *$\varphi$-жестким*. Полукольцо $S$ называется *коммутативным в нуле*, если для любых $a, b \in S$ $ab = 0$ влечет $ba = 0$.

**Лемма 5.** *Пусть $\varphi$ — жесткий эндоморфизм полукольца $S$. Тогда справедливы утверждения*:

(1) *$S$ коммутативно в нуле*;

(2) *каждый дополняемый идемпотент из $S$ централен*;

(3) *$\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) [13, лемма 1].

(2) По п. (1) $ese^{\perp} = 0$ для дополняемого идемпотента $e \in S$ и произвольного $s \in S$. Тогда $es = ese + ese^{\perp} = ese$. Симметрично показывается $se = ese$.

(3) Стандартно проверяется, что $\varphi(BS) \subseteq BS$ для любого эндоморфизма, сохраняющего единицу. Для жесткого эндоморфизма $\varphi$ условие $ab = 0$ равносильно $a\varphi(b) = 0$ [13, лемма 1]. Следовательно, $\mathrm{ann}_{l,BS}(e) = \mathrm{ann}_{l,BS}(\varphi(e))$ для любого $e \in BS$. По [14, теорема 2, п. (7)] получаем $e = \varphi(e)$. $\square$

**Предложение 6.** *Пусть $S$ — $\varphi$-жесткое полукольцо. Равносильны утверждения*:

(1) $S$ — *квазибэровское полукольцо*;

(2) $S[x, \varphi]$ — *квазибэровское полукольцо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $S$ — квазибэровское полукольцо, $\varphi$ — жесткий эндоморфизм. Пусть $A$ — идеал из $R = S[x, \varphi]$. Рассмотрим левый идеал $C$ всех коэффициентов многочленов из $A$. По лемме 4 $\mathrm{ann}_{l,S}(C) = Se$ для некоторого дополняемого идемпотента $e \in S$. Пусть $f \in \mathrm{ann}_{l,R}(A)$, $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$, и пусть $c$ — произвольный элемент из $C$. Тогда $c$ является коэффициентом некоторого многочлена $g = g_0 + \ldots + g_n x^n \in A$. Покажем, что $f_i g_j = 0$ для всех коэффициентов многочленов $f, g$. Из $f_0 g_0 = 0$ и $f_0 g_1 + f_1 \varphi(g_0) = 0$ получаем $f_0 g_1 \varphi(f_0 g_1) + f_1 \varphi(g_0) \varphi(f_0) \varphi(g_1) = 0$. В силу жесткости $\varphi$ условие $ab = 0$ равносильно условию $\varphi^i(a)\varphi^j(b) = \varphi^j(b)\varphi^i(a) = 0$ для любых целых $i, j \geq 0$ [13, лемма 3], поэтому $\varphi(g_0)\varphi(f_0) = 0$, откуда $f_0 g_1 \varphi(f_0 g_1) = 0$ и $f_0 g_1 = 0$. Пусть $f_0 g_j = 0$ для всех $j < r$. Имеем $f_0 g_r + f_1 \varphi(g_{r-1}) + \ldots + f_r \varphi^r(g_0) = 0$. Рассуждая, как и выше, замечаем, что каждое слагаемое, начиная со второго, обнуляется при умножении справа на $\varphi(f_0 g_r)$. Следовательно, $f_0 g_r = 0$, и по индукции $f_0 g_j = 0$ для любого коэффициента многочлена $g$. Вновь индукцией получаем, что $f_i g_j = 0$ для всех коэффициентов многочленов $f, g$. Тогда каждый коэффициент многочлена $f$ обнуляет при умножении слева произвольно выбранный элемент $c \in C$, поэтому $f_i \in \mathrm{ann}_{l,S}(C)$, что дает нам $f_i = f_i e$. Далее, $f_i e^{\perp} = 0$ влечет $f_i \varphi^i(e^{\perp}) = 0$. Отсюда $fe^{\perp} = 0$, следовательно, $fe = f$ и $\mathrm{ann}_{l,R}(A) \subseteq Re$. Для любого $h \in R$ очевидно выполняется $he \in \mathrm{ann}_{l,R}(A)$. Таким образом, $R$ — квазибэровское полукольцо.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $R$ — квазибэровское полукольцо и $A$ — идеал полукольца $S$. Рассмотрим правый идеал $B = A[x, \varphi]$ полукольца $R$. По условию $\mathrm{ann}_{r,R}(B) = eR$ для некоторого дополняемого идемпотента $e \in R$. Предположим, что $e = e_0 + \ldots + e_n x^n$, причем $n > 0$, $e_n \neq 0$. Тогда $e_n \varphi^n(e_n) = 0$, откуда следует $e_n = 0$, противоречие. Значит, $e \in S$, и по лемме 5 $e \in BS$. В силу п. (3) леммы 5 выполняется включение $eS \subseteq \mathrm{ann}_{r,S}(A)$. Пусть $Ad = 0$ для некоторого $d \in S$. Если $f = f_0 + \ldots + f_k x^k \in B$, то для любого $i$ имеем $f_i d = 0$, следовательно, $f_i \varphi^i(d) = 0$ по [13, лемма 1], поэтому $fd = 0$. Получаем $d = eh$ для некоторого $h \in R$, откуда $ed = e^2 h = d$. Доказали обратное включение, поэтому $\mathrm{ann}_{r,S}(A) = eS$. По лемме 4 $S$ — квазибэровское полукольцо. $\square$

Напомним [15, гл. V, § 4], что идеал булевой алгебры называется *полным*, если он содержит точные верхние грани всех своих подмножеств. Полный идеал булевой алгебры является главным. Полукольцо называется *бирегулярным*, если каждый главный идеал порождается центральным дополняемым идемпотентом.

**Предложение 7.** *Пусть $S$ — коммутативное в нуле полукольцо. Тогда равносильны утверждения*:

(1) $S$ — *квазибэровское полукольцо и для любого максимального идеала $A$ из $S$* $\mathrm{ann}_l(A) \neq 0$;

(2) $S$ — *бирегулярное полукольцо без нильпотентных элементов и любой максимальный идеал $M$ булевой алгебры $BS$ является полным*;

(3) *каждый пирсовский слой $S/\alpha_M$, $M \in \mathrm{Max}\, BS$, — простое полукольцо без делителей нуля и $M$ — полный идеал в $BS$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) $\Rightarrow$ (3). Рассмотрим пирсовский пучок $(P(S), \mathrm{Max}\, BS)$ полукольца $S$. Пучок $P(S)$ является компактным (терминологию и основные результаты о компактных пучках полуколец см. в [11, § 4.1]). Пусть $A_M$ — произвольный максимальный идеал пирсовского слоя $S/\alpha_M$. Полный прообраз $h_M^{-1}(A_M)$, где $h_M : S \to S/\alpha_M$ — канонический эпиморфизм, есть максимальный идеал $A$ полукольца $S$ [11, предложение 4.1.6]. По условию $\mathrm{ann}_l(A) = Se$ для некоторого ненулевого дополняемого идемпотента, а поскольку $S$ коммутативно в нуле, то $e \in BS$. Ясно, что $e \notin A$, поэтому $\hat{e}(M) = \hat{1}(M)$. Из $\hat{e}(M)A_M = \hat{0}(M)$ получаем, что $A_M$ — нулевой идеал слоя $S/\alpha_M$, поэтому произвольный пирсовский слой полукольца $S$ — простое полукольцо. Предположим сейчас, что пирсовский слой $S/\alpha_M$ содержит делители нуля: $\hat{b}(M)\hat{a}(M) = \hat{0}(M)$ для ненулевых $\hat{b}(M), \hat{a}(M)$. Тогда $baf = 0$ для некоторого $f \in BS \setminus M$. Заметим, что $\hat{f}(M) = \hat{1}(M)$, поэтому $\hat{f}(M)\hat{b}(M) \neq \hat{0}(M)$ и $fb \neq 0$. В силу коммутативности в нуле $fb \in \mathrm{ann}_l(Sa) = Se$ для некоторого ненулевого $e \in BS$, следовательно, $fb = se$. Если $\hat{e}(M) = \hat{0}(M)$, то $\hat{b}(M) = \hat{f}(M)\hat{b}(M) = \hat{0}(M)$, противоречие, поэтому $\hat{e}(M) = \hat{1}(M)$. Из $ea = 0$ получаем $\hat{0}(M) = \hat{e}(M)\hat{a}(M) = \hat{1}(M)\hat{a}(M) = \hat{a}(M)$, противоречие. Следовательно, любой пирсовский слой полукольца $S$ — полукольцо без делителей нуля. Пусть $M \in \mathrm{Max}\, BS$. Рассмотрим сначала случай, когда $\{e_i\}$ — множество всех ненулевых элементов из $M$. Тогда $\mathrm{ann}_l(SM) = Se$ для некоторого $e \in BS$. В силу простоты идеала $M$ либо $e \in M$, либо $e^\perp \in M$. Но в первом случае $e = ee = 0$, противоречие. Поэтому $e^\perp \in M$, и стандартно проверяется, что $e^\perp$ является точной верхней гранью множества $\{e_i\}$. Пусть сейчас $\{e_j\}$ — произвольное подмножество идемпотентов из $M$ и $A$ — идеал в $S$, порождаемый множеством $\{e_j\}$. Получаем $\mathrm{ann}_l(A) = Sf$ для некоторого $f \in BS$, откуда $A \subseteq Sf^\perp$ и $f^\perp$ — верхняя грань множества $\{e_j\}$. Пусть $g \in BS$ и $g$ — верхняя грань множества $\{e_j\}$. Тогда для любого $j$ получаем $g^\perp e_j \leq g^\perp g = 0$, откуда $g^\perp \in \mathrm{ann}_l(A) = Sf$ и $g^\perp = sf$ для некоторого $s \in S$. Далее, $g^\perp f = sf^2 = g^\perp$, потому $g^\perp \leq f$, откуда $f^\perp \leq g$. Показали, что $f^\perp$ — точная верхняя грань множества $\{e_j\}$. Кроме того, из $f^\perp \leq e^\perp$ получаем $f^\perp \in M$, следовательно, $M$ — полный идеал булевой алгебры $BS$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Следует из [8, теорема 3].

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $A$ — произвольный идеал бирегулярного полукольца $S$. В бирегулярном полукольце каждый идеал порождается некоторым множеством центральных дополняемых идемпотентов [11, предложение 3.2.10]. Пусть $K = \{e_i\} \subseteq BS$ — множество всех центральных дополняемых идемпотентов, лежащих в $A$. Непосредственно проверяется, что $K$ является идеалом булевой алгебры $BS$. Поскольку $K$ есть пересечение всех максимальных идеалов из $BS$, содержащих $K$, и каждый из них полон, то $K$ содержит центральный дополняемый идемпотент $e = \sup\{e_i\}$. Ясно, что $A = Se$, и поэтому $\mathrm{ann}_l(A) = Se^\perp$. Показали, что $S$ — квазибэровское полукольцо. Если дополнительно $A$ — максимальный идеал в $S$, то $e \neq 1$ и $\mathrm{ann}_l(A) = Se^\perp$ для ненулевого дополняемого идемпотента $e^\perp$. □

**Теорема 3.** *Пусть $S$ — $\varphi$-жесткое полукольцо и $M$ — полный идеал для любого $M \in \mathrm{Max}\, BS$. Тогда равносильны условия:*

(1) $R = S[x, \varphi]$ *— квазибэровское полукольцо и для любого максимального идеала $A$ из $S$* $\mathrm{ann}_l(A) \neq 0$;

(2) $S$ *— квазибэровское полукольцо и для любого максимального идеала $A$ из $S$* $\mathrm{ann}_l(A) \neq 0$;

(3) $S$ *— бирегулярное полукольцо без нильпотентных элементов*;

(4) *каждый пирсовский слой полукольца $S$ является простым полукольцом без делителей нуля.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 5 $\varphi$-жесткое полукольцо является коммутативным в нуле.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) по предложению 6.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) по предложению 7. □

## Заключение

1) Результаты статьи естественным образом переносятся на кольцо косых многочленов и на полукольцо многочленов $S[x]$.

2) Сильным требованием в основных утверждениях нашей работы является условие $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$. Хотелось бы выяснить, как будут меняться результаты при его ослаблении. Например, интересен случай, когда $\varphi$ — эндоморфизм (а в некоторых случаях, и автоморфизм) полукольца $S$, ограничение которого на $BS$ является нетождественным автоморфизмом.

3) Открытым остается вопрос о строении пирсовских слоев квазибэровского полукольца $R = S[x, \varphi]$ (см. теорему 3).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Pierce R.S.** Modules over commutative regular rings // Mem. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 70. P. 1–112. doi: 10.1090/memo/0070 .
2. **Burgess W.D., Stephenson W.** Pierce sheaves of non-commutative rings // Comm. Algebra. 1976. Vol. 39. P. 512–526. doi: 10.1080/00927877608822094 .
3. **Burgess W.D., Stephenson W.** Rings all of whose Pierce stalks are local // Canad. Math. Bull. 1979. Vol. 22, no 2. P. 159–164. doi: 10.4153/CMB-1979-022-8 .
4. **Beidar K.I., Mikhalev A.V. and Salavova C.** Generalized identities and semiprime rings with involution // Math. Z. 1981. Vol. 178. P. 37–62. doi: 10.1007/BF01218370 .
5. **Туганбаев А.А.** Теория колец. Арифметические кольца и модули. М.: МЦНМО. 2009. 472 с.
6. **Чермных В.В.** Пучковые представления полуколец // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 5. С. 185–186. doi: 10.1070/RM1993v048n05ABEH001078 .
7. **Марков Р.В., Чермных В.В.** О пирсовских слоях полуколец // Фундамент. и прикл. математика. 2014. Т. 19, № 2. С. 171–186. doi: 10.1007/s10958-016-2713-5 .
8. **Марков Р.В., Чермных В.В.** Полукольца, близкие к регулярным, и их пирсовские слои // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 213–221.
9. **Марков Р.В., Чермных В.В.** Пирсовские цепи полуколец // Вест. Сыктывкар. ун-та. 2012. Вып. 16. С. 88–103.
10. **Vechtomov E.M.** Rings and sheaves // J. Math. Sciences. 1995. Vol. 74, no. 1. P. 749–798. doi: 10.1007/BF02362842 .
11. **Чермных В.В.** Функциональные представления полуколец // Фундамент. и прикл. математика. 2012. Т. 17, № 3. С. 111–227. doi: 10.1007/s10958-012-1062-2 .
12. **Clark W.E.** Twisted matrix units semigroup algebras // Duke Math. J. 1967. Vol. 34. P. 417–424. doi:10.1215/S0012-7094-67-03446-1 .
13. **Масляев Д.А., Чермных В.В.** Полукольца косых многочленов Лорана // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 521–533. doi: 10.33048/semi.2020.17.033 .
14. **Вечтомов Е.М.** О булевых кольцах // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 2. С. 182–185. doi: 10.1007/BF01159890 .
15. Общая алгебра. Т. 2. / ред. Л. А. Скорняков. М.: Наука. 1991. 480 с.

Поступила 8.04.2021
После доработки 13.05.2021
Принята к публикации 15.06.2021

Бабенко Марина Владимировна
старший преподаватель
Вятский государственный университет
г. Киров
e-mail: marinka_ov@mail.ru

Чермных Василий Владимирович
д-р физ.-мат. наук, доцент
главный науч. сотрудник
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина
г. Сыктывкар
e-mail: vv146@mail.ru

**REFERENCES**

1. Pierce R.S. Modules over commutative regular rings. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1967, vol. 70, pp. 1–112. doi: 10.1090/memo/0070 .
2. Burgess W.D., Stephenson W. Pierce sheaves of non-commutative rings. *Comm. Algebra*, 1976, vol. 39, no. 1, pp. 51–75. doi: 10.1080/00927877608822094 .
3. Burgess W.D., Stephenson W. Rings all of whose Pierce stalks are local. *Canad. Math. Bull.*, 1979, vol. 22, no. 2, pp. 159–164. doi: 10.4153/CMB-1979-022-8 .
4. Beidar K.I., Mikhalev A.V. and Salavova C. Generalized identities and semiprime rings with involution. *Math. Z.*, 1981, vol. 178, no. 1, pp. 37–62. doi: 10.1007/BF01218370 .
5. Tuganbaev A.A. *Teoriya kolets: Arifmeticheskie kol'tsa i moduli* [Ring theory: Arithmetical rings and modules]. Moscow: MCNMO Publ., 2009, 472 p. ISBN: 978-5-94057-555-9 .
6. Chermnykh V.V. Sheaf representations of semirings. *Russian Math. Surveys*, 1993, vol. 48, no. 5, pp. 169–170. doi: 10.1070/RM1993v048n05ABEH001078 .
7. Markov R.V., Chermnykh V. V. On Pierce stalks of semirings. *J. Math. Sci.*, 2016, vol. 213, no. 2, pp. 243–253. doi: 10.1007/s10958-016-2713-5 .
8. Markov R.V., Chermnykh V.V. Semirings close to regular and their Pierce stalks. *Tr. Inst. Mat. Mekh. URO RAN*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 213–221 (in Russian).
9. Markov R.V., Chermnykh V.V. Pierce chains for semirings. *Vestnik Syktyvkarskogo Universiteta*, 2012, vol. 16, pp. 88–103 (in Russian).
10. Vechtomov E.M. Rings and sheaves. *J. Math. Sci.*, 1995, vol. 74, no. 1, pp. 749–798. doi: 10.1007/BF02362842 .
11. Chermnykh V.V. Functional representation of semirings. *J. Math. Sci.*, 2012, vol. 187, no. 2, pp. 187–267. doi: 10.1007/s10958-012-1062-2 .
12. Clark W.E. Twisted matrix units semigroup algebras. *Duke Math. J.*, 1967, vol. 34, no. 3, pp. 417–424. doi: 10.1215/S0012-7094-67-03446-1 .
13. Maslyaev D.A., Chermnykh V.V. Semirings of skew Laurent polynomials. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2020, vol. 17, pp. 521–533 (in Russian). doi: 10.33048/semi.2020.17.033 .
14. Vechtomov E.M. Boolean rings. *Math. Notes*, 1986, vol. 39, no. 2, pp. 101–103. doi: 10.1007/BF01159890 .
15. *Obshchaya algebra* [General algebra], vol. 2, L.A. Skornyakov (ed.). Moscow: Nauka Publ., 1991, 480 p. ISBN: 5-02-014427-4 .

Received April 8, 2021
Revised May 13, 2021
Accepted June 15, 2021

*Marina Vladimirovna Babenko,* Vyatka State University, Kirov, 610000 Russia, e-mail: marinka_ov@mail.ru .

*Vasiliy Vladimirovich Chermnykh,* Dr. Phys.-Math. Sci., Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, 167001 Russia, e-mail: vv146@mail.ru .

Cite this article as: M. V. Babenko, V. V. Chermnykh. Pierce stalks of semirings of skew polynomials, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 48–60 .