ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 4 2021

УДК 519.65

СПЛАЙНЫ СУББОТИНА В ЗАДАЧЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_p ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

В. Т. Шевалдин

Памяти Юрия Николаевича Субботина

Для линейных дифференциальных операторов $\mathcal{L}_2(D)$ второго порядка вида $D^2,\ D^2+\alpha^2,\ D^2-\beta^2$ $(\alpha,\beta>0)$ на бесконечной в обе стороны сетке узлов числовой оси рассмотрена задача Яненко—Стечкина—Субботина экстремальной интерполяции числовых последовательностей дважды дифференцируемыми функциями f с наименьшим значением нормы в пространстве L_p $(1\le p\le\infty)$ функции $\mathcal{L}_2(D)f$. С помощью параболических сплайнов Субботина и их аналогов для операторов $D^2+\alpha^2$ и $D^2-\beta^2$ (точки "склейки" которых расположены посредине между последовательными узлами интерполяции) в терминах шагов сетки для величин этой наименьшей нормы получены оценки сверху при любом значении $p:\ 1\le p\le\infty$.

Ключевые слова: сплайны Субботина, интерполяция, бесконечная сетка, дифференциальный оператор второго порядка.

V. T. Shevaldin. Subbotin's splines in the problem of extremal interpolation in the space L_p for second-order linear differential operators.

For second-order linear differential operators $\mathcal{L}_2(D)$ of the form $D^2,\ D^2+\alpha^2,\ D^2-\beta^2$ $(\alpha,\beta>0)$, the Yanenko–Stechkin–Subbotin problem of extremal interpolation of numerical sequences by twice differentiable functions f with the smallest value of the norm of the function $\mathcal{L}_2(D)f$ in the space L_p $(1\le p\le\infty)$ is considered on a grid of nodes of the numerical axis that is infinite in both directions. Subbotin's parabolic splines and their analogs for the operators $D^2+\alpha^2$ and $D^2-\beta^2$ (with knots lying in the middle between consecutive interpolation nodes) are used to derive upper bounds for the values of the smallest norm in terms of grid steps for any value of p, $1\le p\le\infty$.

Keywords: Subbotin's splines, interpolation, infinite grid, second-order differential operator.

MSC: 41A15
DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-255-262

Введение

Пусть на числовой оси $\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$ задана бесконечная в обе стороны сетка узлов $\Delta=\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ вида

$$a<\dots<x_{k-1}<x_k<x_{k+1}<\dots<b,$$

где $a=\inf\limits_k x_k,\ b=\sup\limits_k x_k$. Здесь $a\in\mathbb{R}$ или $a=-\infty$ и аналогично $b\in\mathbb{R}$ или $b=+\infty$. Величины $h_k=x_{k+1}-x_k$ $(k\in\mathbb{Z})$ называются шагами сетки Δ.

Для функции $f:\ (a;b)\to\mathbb{R}$ положим

$$f(x_k)=y_k\quad(k\in\mathbb{Z}),$$

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

где $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — произвольная последовательность действительных чисел. Разделенная разность порядка $n \in \mathbb{N}$ (см., например, [1, гл. 1]) определяется рекуррентно при помощи равенств

$$f[x_k] = [y_k] = y_k, \quad f[x_{k+1}, x_k] = [y_{k+1}, y_k] = \frac{[y_{k+1}] - [y_k]}{x_{k+1} - x_k},$$

$$\ldots, f[x_{k+n}, \ldots, x_k] = [y_{k+n}, \ldots, y_k] = \frac{[y_{k+n}, \ldots, y_{k+1}] - [y_{k+n-1}, \ldots, y_k]}{x_{k+n} - x_k} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Отметим очевидное равенство (см., например, [1, гл. 1])

$$f[x_{k+n}, \ldots, x_k] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad (\xi \in (x_k; x_{k+n})),$$

справедливое для любой функции f, у которой $f^{(n)} \in C(x_k; x_{k+n})$, и выражающее простейшую связь между разделенными разностями и соответствующими производными.

При любом $p:\ 1 \le p \le \infty$ рассмотрим класс последовательностей

$$Y_{n,p} = \big\{ y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}} :\ \|\{[y_{k+n}, \ldots, y_k]\}\|_{l_p} \le 1 \big\}$$

со стандартным определением нормы последовательности $\big\{[y_{k+n}, \ldots, y_k]\big\}_{k\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $l_p = l_p(\mathbb{Z})$.

Определим класс функций

$$F_{n,p}(y) = \big\{ f\colon f^{(n-1)} \in AC,\ f^{(n)} \in L_p(a;b),\ f(x_k) = y_k\ (k \in \mathbb{Z}) \big\}.$$

Здесь AC — класс абсолютно непрерывных функций, а норма функции g в пространстве $L_p = L_p(a;b)$ определена обычным образом:

$$\|g\|_{L_p} = \|g\|_{L_p(a;b)} = \begin{cases} \left(\int\limits_a^b |g(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in(a;b)} |g(t)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Задача экстремальной функциональной интерполяции в пространстве $L_p(a;b)$ на сетке Δ заключается в точном вычислении (или получении эффективных оценок снизу и сверху) величины

$$A_{n,p}(\Delta) = \sup_{y\in Y_{n,p}} \inf_{f\in F_{n,p}(y)} \|f^{(n)}\|_{L_p(a;b)} \quad (1 \le p \le \infty).$$

Для равномерной сетки узлов интерполяции (т. е. в случае $h_k = h$ $(k \in \mathbb{Z})$) задача вычисления величины $A_{n,p}(\Delta)$ хорошо известна. Ее в начале 60-х годов прошлого века поставили Н. Н. Яненко и С. Б. Стечкин, а полностью решил при любых $n \in \mathbb{N}$ и $p:\ 1 \le p \le \infty$ Ю. Н. Субботин [2; 3]. Для неравномерной сетки узлов Δ результатов по этой тематике значительно меньше, и они относятся только к случаям $n = 2$ и $n = 3$ при $p = \infty$ (см., например, совместные работы С. И. Новикова и автора, опубликованные в журнале в 2020 г.)

Цель настоящей работы — с помощью параболических сплайнов Субботина [4, гл. 1], у которых узлы “склейки” находятся посредине между узлами интерполяции, получить подобную оценку сверху для величины $A_{2,p}(\Delta)$ при остальных значениях $p:\ 1 \le p < \infty$. Кроме того, аналогичная задача рассмотрена для двух линейных дифференциальных операторов второго порядка вида $D^2 + \alpha^2$ и $D^2 - \beta^2$ $(\alpha, \beta > 0,\ D$ — символ дифференцирования).

1. Оценка сверху величин $A_{2,p}(\Delta)$ $(1 \le p < \infty)$

Теорема 1. *Для любой сетки Δ при любом $p:\ 1 \le p < \infty$ имеет место неравенство*

$$A_{2,p}(\Delta) \le 8 \sup_k \Big(\frac{h_{k-1}+h_k}{2}\Big)^{1/p}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Хорошо известна (см., например, [4, гл. 1]) формула

$$f[x_{k+2},x_{k+1},x_k] = [y_{k+2},y_{k+1},y_k]$$

$$= \frac{1}{h_k+h_{k+1}}\Bigg(\int\limits_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \frac{x_{k+2}-t}{h_{k+1}} f''(t)\,dt + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{t-x_k}{h_k} f''(t)\,dt\Bigg), \tag{1.1}$$

связывающая разделенную разность второго порядка и вторую производную интерполирующей функции f.

В данном разделе для доказательства теоремы 1 для любой последовательности $y \in Y_{2,p}$ $(1 \le p < \infty)$ будем строить функцию $f \in F_{2,p}(y)$ в виде параболического сплайна с узлами "склейки" в точках

$$x_{k+1/2} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Для этой цели положим

$$f''(t) = Z_k, \quad t \in [x_{k-1/2}; x_{k+1/2}) \quad (k \in \mathbb{Z}), \tag{1.2}$$

где числа $Z = \{Z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ подлежат дальнейшему определению. После подстановки (1.2) в (1.1) получаем известное разностное уравнение вида

$$A_k Z_k + B_k Z_{k+1} + C_k Z_{k+2} = [y_{k+2},y_{k+1},y_k] \quad (k \in \mathbb{Z}), \tag{1.3}$$

в котором

$$A_k = \frac{h_k}{8(h_k+h_{k+1})}, \quad B_k = \frac{3}{8}, \quad C_k = \frac{h_{k+1}}{8(h_k+h_{k+1})}.$$

Доказательство теоремы 1 будем проводить в три этапа. Вначале докажем существование решения $Z = \{Z_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_p$ уравнения (1.3), используя тот факт, что последовательность, стоящая в правой части равенства (1.3), принадлежит пространству l_p; затем оценим норму $\|Z\|_{l_p}$; наконец, получим оценку сверху для величины $\|f''\|_{L_p}$ и тем самым докажем теорему 1.

Для краткости изложения обозначим $m = \{m_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где $m_k = [y_{k+2},y_{k+1},y_k]$.

Лемма 1. *Для любой последовательности $m = \{m_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ такой, что $\|m\|_{l_p} \le 1$, разностное уравнение* (1.3) *имеет решение $Z = \{Z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, которое принадлежит пространству l_p, и это решение единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (1.3) перепишем в виде

$$Z_{k+1} = TZ_{k+1} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

где

$$TZ_{k+1} = 2m_k - (Z_k - Z_{k+1})\frac{h_k}{4(h_k+h_{k+1})} - (Z_{k+2} - Z_{k+1})\frac{h_{k+1}}{4(h_k+h_{k+1})}.$$

Пусть $Z^{(1)} = \big\{Z^{(1)}_{k+1}\big\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $Z^{(2)} = \big\{Z^{(2)}_{k+1}\big\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Тогда

$$\big\|TZ^{(1)}-TZ^{(2)}\big\|_{l_p}\le\Big\|\Big\{\frac{h_k}{4(h_k+h_{k+1})}\big(Z_k^{(1)}-Z_k^{(2)}\big)\Big\}\Big\|_{l_p}+\Big\|\Big\{\frac{h_{k+1}}{4(h_k+h_{k+1})}\big(Z_{k+2}^{(1)}-Z_{k+2}^{(2)}\big)\Big\}\Big\|_{l_p}$$

$$+\Big\|\Big\{\Big(\frac{h_k}{4(h_k+h_{k+1})}+\frac{h_{k+1}}{4(h_k+h_{k+1})}\Big)\big(Z_{k+1}^{(1)}-Z_{k+1}^{(2)}\big)\Big\}\Big\|_{l_p}\le\frac{3}{4}\big\|Z^{(1)}-Z^{(2)}\big\|_{l_p}.$$

Это неравенство означает, что оператор $T: l_p\to l_p$ является сжимающим с константой сжатия $3/4<1$. Поэтому согласно теореме о сжимающем операторе в полном метрическом пространстве $l_p=l_p(\mathbb{Z})$ уравнение $Z_{k+1}=TZ_{k+1}$ (т. е. разностное уравнение (1.3)) имеет решение $Z=\{Z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\in l_p$, и это решение единственно.

Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Для решения разностного уравнения* (1.3) *имеет место следующая оценка*:

$$\|Z\|_{l_p}\le 8.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. От противного. Пусть $\|Z\|_{l_p}>8$. Для любой последовательности $y\in Y_{2,p}$ имеем

$$\big\|\{[y_{k+2},y_{k+1},y_k]\}\big\|_{l_p}\le 1. \tag{1.4}$$

С другой стороны,

$$\big\|\{A_kZ_k+B_kZ_{k+1}+C_kZ_{k+2}\}\big\|_{l_p}\ge\big\|\{B_kZ_{k+1}\}\big\|_{l_p}-\big\|\{A_kZ_k\}\big\|_{l_p}-\big\|\{C_kZ_{k+2}\}\big\|_{l_p}$$

$$=\frac{3}{8}\|Z\|_{l_p}-\Big\|\Big\{\frac{h_k}{8(h_k+h_{k+1})}Z_k\Big\}\Big\|_{l_p}-\Big\|\Big\{\frac{h_{k+1}}{8(h_k+h_{k+1})}Z_{k+2}\Big\}\Big\|_{l_p}$$

$$\ge\Big(\frac{3}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\Big)\|Z\|_{l_p}>\frac{1}{8}\cdot 8=1,$$

что противоречит равенству (1.3) и неравенству (1.4).

Лемма 2 доказана. □

Для завершения доказательства теоремы 1 оценим сверху величину $\|f''\|_{L_p}$ $(1\le p<\infty)$. Из (1.2) и леммы 2 имеем

$$\|f''\|_{L_p(a;b)}=\Bigg(\int\limits_a^b|f''(t)|^p\,dt\Bigg)^{1/p}$$

$$=\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int\limits_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}}|f''(t)|^p\,dt\Bigg)^{1/p}=\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|Z_k|^p(x_{k+1/2}-x_{k-1/2})\Big)^{1/p}$$

$$\le\sup_k\Big(\frac{x_{k+1}-x_{k-1}}{2}\Big)^{1/p}\|Z\|_{l_p}\le 8\sup_k\Big(\frac{h_{k-1}+h_k}{2}\Big)^{1/p}.$$

Значит,

$$A_{2,p}(\Delta)\le\|f''\|_{L_p(a;b)}\le 8\sup_k\Big(\frac{h_{k-1}+h_k}{2}\Big)^{1/p}.$$

Теорема 1 полностью доказана. □

З а м е ч а н и е 1. Основной результат Ю. Н. Субботина [2; 3] в случае $n=2$ с учетом связи между конечными и разделенными разностями для равномерной сетки $\overline{\Delta}$ (т. е. в случае $h_k=h$ $(k\in\mathbb{Z})$) может быть переформулирован следующим образом:

$$A_{2,p}(\overline{\Delta}) = \begin{cases} 2\Big(\dfrac{2p-1}{p-1}\Big)^{(p-1)/p} h^{1/p}, & 1 < p < \infty, \\ 2h, & p = 1, \\ 4, & p = \infty. \end{cases}$$

Он показывает, что в общем случае (т. е. для любой сетки Δ) оценка сверху величины $A_{2,p}(\Delta)$, полученная в теореме 1, не является точной.

2. Задача Яненко — Стечкина — Субботина для дифференциальных операторов второго порядка

Пусть $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(D) = D^2 - \beta^2$ ($\beta > 0,\ D$ — символ дифференцирования) — линейный формально самосопряженный оператор второго порядка. Следуя [5, § 1], построим разностный оператор $\Delta_{\mathcal{L}_2} y_k$, соответствующий дифференциальному оператору $\mathcal{L}_2(D)$, определенный на пространстве последовательностей $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и сетке Δ, который является аналогом разделенной разности второго порядка. А именно, положим

$$\Delta_{\mathcal{L}_2} y_k = \frac{1}{\gamma_k}\big[(\operatorname{sh}\beta h_k) y_{k+2} - (\operatorname{sh}\beta(h_k + h_{k+1})) y_{k+1} + (\operatorname{sh}\beta h_{k+1}) y_k\big] \quad (k \in \mathbb{Z}), \tag{2.1}$$

где

$$\gamma_k = \frac{2}{\beta^2}\big[\operatorname{sh}\beta h_{k+1}(\operatorname{ch}\beta h_k - 1) + \operatorname{sh}\beta h_k(\operatorname{ch}\beta h_{k+1} - 1)\big]. \tag{2.2}$$

Нетрудно проверить, что разность $\Delta_{\mathcal{L}_2} y_k$ обращается в нуль на сеточных значениях $y_k = f(x + x_k)$ любой функции f из ядра оператора $\mathcal{L}_2(D)$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Отметим, что при $h_k = h$ ($k \in \mathbb{Z}$) оператор обобщенной конечной разности для любого линейного дифференциального оператора произвольного порядка, характеристический многочлен которого имеет только действительные корни, впервые в явном виде был выписан в работе А. Шармы и И. Цимбаларио [6]. Нормирующий множитель $1/\gamma_k$ в (2.1) выбран таким образом, чтобы имело место равенство

$$\Delta_{\mathcal{L}_2} y_k = \frac{1}{2!}(D^2 - \beta^2) f(\xi), \quad \xi \in (x_k; x_{k+2}). \tag{2.3}$$

Формула (2.3) следует из [5, формула (10)]. Там же отмечено равенство

$$\Delta_{\mathcal{L}_2} y_k = \frac{1}{\gamma_k}\left[\frac{\operatorname{sh}\beta h_{k+1}}{\beta}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \operatorname{sh}\beta(t - x_k) u(t)\,dt + \frac{\operatorname{sh}\beta h_k}{\beta}\int\limits_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \operatorname{sh}\beta(x_{k+2} - t) u(t)\,dt\right], \tag{2.4}$$

где $u(t) = (D^2 - \beta^2) f(t)$. Формула (2.4) является аналогом формулы (1.1). При $1 \le p \le \infty$ определим класс последовательностей

$$Y_{\mathcal{L}_{2,p}} = \big\{y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \colon \big\|\{\Delta_{\mathcal{L}_2} y_k\}\big\|_{l_p} \le 1\big\}$$

и класс функций

$$F_{\mathcal{L}_{2,p}}(y) = \big\{f \colon f' \in AC,\ \mathcal{L}_2(D) f \in L_p(a; b),\ f(x_k) = y_k\ (k \in \mathbb{Z})\big\}.$$

Задача Яненко — Стечкина — Субботина для оператора $\mathcal{L}_2(D) = D^2 - \beta^2$ может быть сформулирована следующим образом: при $1 \le p \le \infty$ для любой сетки Δ вычислить величину

$$A_{\mathcal{L}_{2,p}}(\Delta) = \sup_{y\in Y_{\mathcal{L}_{2,p}}} \inf_{f\in F_{\mathcal{L}_{2,p}}(y)} \|\mathcal{L}_2(D) f\|_{L_p(a;b)}. \tag{2.5}$$

Для равномерной сетки узлов $\overline{\Delta}$ задача (2.5) и даже более общая аналогичная задача для произвольного линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_n(D)$ порядка n при всех $p:\ 1 \le p \le \infty$ полностью решена в работах А. Шармы и И. Цимбаларио [6] и автора [7;8]. Для произвольной (не обязательно равномерной) сетки имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Для любой сетки* Δ *справедливо неравенство*

$$A_{\mathcal{L}_{2,p}}(\Delta) \le \begin{cases} 4, & p = \infty, \\ 8 \sup\limits_k \Big(\dfrac{h_{k-1}+h_k}{2}\Big)^{1/p}, & 1 \le p < \infty. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любой последовательности $y \in Y_{\mathcal{L}_{2,p}}$ $(1 \le p \le \infty)$ рассмотрим экспоненциальные сплайны второго порядка, которые являются аналогами параболических сплайнов Ю. Н. Субботина, а именно, функции f такие, что

$$u(t) = \mathcal{L}_2(D)f(t) = Z_k, \quad x_{k-1/2} \le t < x_{k+1/2} \quad (k \in \mathbb{Z}), \tag{2.6}$$

где числа $Z = \{Z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ подлежат дальнейшему определению. Подставляя (2.6) в (2.4), получаем разностное уравнение

$$A_k Z_k + B_k Z_{k+1} + C_k Z_{k+2} = \gamma_k \beta^2 \Delta_{\mathcal{L}_2} y_k \quad (k \in \mathbb{Z}), \tag{2.7}$$

в котором

$$A_k = \operatorname{sh}\beta h_{k+1}\Big(\operatorname{ch}\frac{\beta h_k}{2} - 1\Big),$$

$$B_k = \operatorname{sh}\beta h_{k+1}\Big(\operatorname{ch}\beta h_k - \operatorname{ch}\frac{\beta h_k}{2}\Big) + \operatorname{sh}\beta h_k\Big(\operatorname{ch}\beta h_{k+1} - \operatorname{ch}\frac{\beta h_{k+1}}{2}\Big),$$

$$C_k = \operatorname{sh}\beta h_k\Big(\operatorname{ch}\frac{\beta h_{k+1}}{2} - 1\Big).$$

Уравнение (2.7) перепишем в виде

$$Z_{k+1} = TZ_{k+1},$$

где

$$TZ_{k+1} = \frac{1}{A_k + B_k + C_k}\big[A_k(Z_{k+1} - Z_k) + C_k(Z_{k+1} - Z_{k+2}) + \gamma_k\beta^2\Delta_{\mathcal{L}_2} y_k\big].$$

Используя равенство $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ и действуя по схеме доказательства леммы 1, убеждаемся в том, что оператор $T\colon l_p \to l_p$ $(1 \le p \le \infty)$ является сжимающим оператором с константой сжатия $3/4 < 1$. Значит, по теореме о сжимающем операторе в полном метрическом пространстве $l_p = l_p(\mathbb{Z})$ получим, что разностное уравнение (2.7) имеет единственное решение $Z = \{Z_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_p$.

Лемма 3. *При любом* $k \in \mathbb{Z}$ *имеют место следующие неравенства*:

$$A_k < \frac{1}{8}\gamma_k\beta^2, \quad C_k < \frac{1}{8}\gamma_k\beta^2, \quad B_k \ge \frac{3}{8}\gamma_k\beta^2,$$

где γ_k *определены равенством* (2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первые два неравенства в силу определения чисел A_k, C_k и γ_k очевидны. Последнее неравенство после несложных преобразований равносильно неравенству

$$\operatorname{sh}\beta h_{k+1}\Big(\operatorname{ch}\beta h_k - 4\operatorname{ch}\frac{\beta h_k}{2} + 3\Big) + \operatorname{sh}\beta h_k\Big(\operatorname{ch}\beta h_{k+1} - 4\operatorname{ch}\frac{\beta h_{k+1}}{2} + 3\Big) \ge 0,$$

которое в свою очередь легко следует из формулы $\operatorname{ch} 2x + 1 = 2\operatorname{ch}^2 x$.

Соотношение (2.7) перепишем в виде

$$\widetilde{A}_k Z_k + \widetilde{B}_k Z_{k+1} + \widetilde{C}_k Z_{k+2} = \Delta_{\mathcal{L}_2} y_k \quad (k \in \mathbb{Z}), \tag{2.8}$$

где

$$\widetilde{A}_k = \frac{A_k}{\gamma_k\beta^2}, \quad \widetilde{B}_k = \frac{B_k}{\gamma_k\beta^2}, \quad \widetilde{C}_k = \frac{C_k}{\gamma_k\beta^2},$$

и с помощью равенства (2.8) докажем, что $\|Z\|_{l_p} \le 8$. Снова, как и при доказательстве леммы 2, рассуждая от противного, получим, с одной стороны, что $\big\|\{\Delta_{\mathcal{L}_2} y_k\}\big\|_{l_p} \le 1$, а с другой стороны, используя лемму 3, имеем

$$\big\|\{\widetilde{A}_k Z_k + \widetilde{B}_k Z_{k+1} + \widetilde{C}_k Z_{k+2}\}\big\|_{l_p} \ge \frac{1}{8}\|Z\|_{l_p} > 1.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\|Z\|_{l_p} \le 8$ $(1 \le p \le \infty)$. В случае $p = \infty$ данное доказательство можно немного улучшить, применяя метод леммы 3 из работы С. И. Новикова и автора[2]. Почти дословно повторяя указанные там выкладки в случае $p = \infty$, выводим неравенство

$$\|Z\|_{l_\infty} = \sup_k |Z_k| \le 4,$$

приведенное при $\beta = 0$ в заметке Ю. С. Волкова[3]. Для доказательства теоремы 2 остается заметить, что при $1 \le p < \infty$ имеет место неравенство

$$\big\|(D^2 - \beta^2)f\big\|_{L_p} = \Bigg(\int\limits_a^b \big|(D^2 - \beta^2)f(t)\big|^p\,dt\Bigg)^{1/p}$$

$$= \bigg(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |Z_k|^p \Big(\frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2}\Big)\bigg)^{1/p} \le 8 \sup_k \Big(\frac{h_{k-1} + h_k}{2}\Big)^{1/p}.$$

Теорема 2 полностью доказана. □

З а м е ч а н и е 2. Результат, полученный в теореме 2, может быть легко распространен тем же методом на случай оператора $\mathcal{L}_2(D) = D^2 + \alpha^2 (\alpha > 0)$ и соответствующие тригонометрические сплайны второго порядка, узлы "склейки" которых расположены посредине между узлами интерполяции, но только при дополнительном условии $h_k < \pi/\alpha$ $(k \in \mathbb{Z})$. Для такого оператора (см., например, [5, § 2]) имеют место формулы

$$\Delta_{\mathcal{L}_2} y_k = \frac{1}{\gamma_k}\big[(\sin\alpha h_k) y_{k+2} - (\sin\alpha(h_k + h_{k+1})) y_{k+1} + (\sin\alpha h_{k+1}) y_k\big]$$

$$= \frac{1}{\gamma_k}\Bigg[\frac{\sin\alpha h_{k+1}}{\alpha}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \sin\alpha(t - x_k)(D^2 + \alpha^2)f(t)\,dt$$

$$+ \frac{\sin\alpha h_k}{\alpha}\int\limits_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \sin\alpha(x_{k+2} - t)(D^2 + \alpha^2)f(t)\,dt\Bigg],$$

$$\gamma_k = \frac{2}{\alpha^2}\big[\sin\alpha h_{k+1}(1 - \cos\alpha h_k) + \sin\alpha h_k(1 - \cos\alpha h_{k+1})\big],$$

которые могут быть также получены из формул предыдущего раздела формальной заменой $\beta = i\alpha$, где i — мнимая единица. Теперь, повторяя рассуждения предыдущего раздела, для величины $A_{\mathcal{L}_{2,p}}(\Delta)$ получаем ту же оценку сверху, которая была приведена в теореме 2.

[2]О связи между второй разделенной разностью и второй производной // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 216–224.

[3]Замечание о связи между второй разделенной разностью и второй производной // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 1. С. 19–21.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гельфонд А.О.** Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 376 с.
2. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
3. **Субботин Ю.Н.** Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 30–60.
4. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука. 1976. 248 с.
5. **Шевалдина Е.В.** Аппроксимация локальными экспоненциальными сплайнами с произвольными узлами // Сиб. журн. вычисл. матем. 2006. Т. 9, № 4. С. 391–402.
6. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Матем. заметки. 1977. Т. 21, № 2. С. 161–173.
7. **Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции // Матем. заметки. 1981. Т. 29, № 4. С. 603–622.
8. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 203–240.

Поступила 23.08.2021
После доработки 22.09.2021
Принята к публикации 27.09.2021

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Gel'fond A.O. *Calculus of finite differences.* Delhi: Hindustan. Publ. Corp., 1971, Ser. International Monographs on Advanced Mathematics and Physics, 451 p. Original Russian text published in Gel'fond A.O. *Ischislenie konechnykh raznostei.* Moscow: Nauka Publ., 1967, 376 p.
2. Subbotin Yu.N. On the connection between finite differences and corresponding derivatives. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 1965, vol. 78, pp. 24–42 (in Russian).
3. Subbotin Yu.N. Functional interpolation in the mean with smallest n derivative. *Proc. Steklov Institute Math.*, 1967, vol. 88, pp. 31–63.
4. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. *Splainy v vychislitel'noi matematike* [Splines in numerical mathematics]. Moscow: Nauka Publ., 1976, 248 p.
5. Shevaldina E.V. Approximation by local exponential splines with arbitrary knots. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.*, 2006, vol. 9, no. 4, pp. 391–402 (in Russian).
6. Sharma A., Tsimbalario I. Certain linear differential operators and generalized differences. *Math. Notes*, 1977, vol. 21, no. 2, pp. 91–97. doi: 10.1007/BF02320546 .
7. Shevaldin V.T. A problem of extremal interpolation. *Math. Notes*, 1981, vol. 29, no. 4, pp. 310–320. doi: 10.1007/BF01343541 .
8. Shevaldin V.T. Some problems of extremal interpolation in the mean for linear differential operators. *Proc. Steklov Institute Math.*, 1983, vol. 164, pp. 233–273.

Received August 23, 2021 Revised September 22, 2021 Accepted September 27, 2021

Funding Agency: This study is a part of the research carried out at the Ural Mathematical Center and supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2021-1383).

Valerii Trifonovich Shevaldin, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. T. Shevaldin. Subbotin's splines in the problem of extremal interpolation in the space L_p for second-order linear differential operators, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 255–262 .