ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 4 2021

УДК 517.5

О НАИЛУЧШЕЙ СОВМЕСТНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ

М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, Дж. Дж. Заргаров

В работе решаются экстремальные задачи, связанные с наилучшим совместным полиномиальным приближением аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Харди $\mathscr{H}_2$. Задача совместного приближения периодических функций тригонометрическими полиномами была рассмотрена А. Л. Гаркави в 1960 г. Затем в том же году А. Ф. Тиман рассмотрел указанную задачу для классов целых функций, определенных на всей оси. Здесь получен ряд точных теорем и вычислены точные значения верхних граней наилучших совместных приближений функции и ее последовательных производных полиномами и их соответствующими производными на некоторых классах комплексных функций, принадлежащих пространству Харди $\mathscr{H}_2$.

Ключевые слова: наилучшее совместное приближение, аналитическая функция, единичный круг, модуль непрерывности, экстремальная задача, угловое граничное значение, полином.

M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov, J. J. Zargarov. On the best simultaneous polynomial approximation of functions and their derivatives in Hardy spaces.

In this paper, we solve extremal problems related to the best simultaneous polynomial approximation of functions analytic in the unit disk and belonging to the Hardy space $\mathscr{H}_2$. The problem of simultaneous approximation of periodic functions by trigonometric polynomials was considered by A. L. Garkavi in 1960. Then, in the same year, A. F. Timan considered this problem for classes of entire functions defined on the axis. We establish a number of exact theorems and calculate the exact values of the least upper bounds of the best simultaneous approximations of a function and its successive derivatives by polynomials and their corresponding derivatives on some classes of complex functions belonging to the Hardy space $\mathscr{H}_2$.

Keywords: best simultaneous approximation, analytic function, unit disk, modulus of continuity, extremal problem, angular boundary value, polynomial.

MSC: 42C10, 47A58

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-239-254

1. Введение

Экстремальные задачи наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций ранее изучались, например, в работах [1–14] и многих других. В этой работе, продолжая исследования в этом направлении, мы рассматриваем более общую экстремальную задачу: требуется найти верхние грани наилучших совместных приближений функции и ее последовательных производных полиномами и их соответствующими производными.

Отметим, что сформулированная задача в случае совместного приближения периодических функций и их производных тригонометрическими полиномами в равномерной метрике исследована А. Л. Гаркави [15], а в случае приближения функций и их производных на всей оси целыми функциями рассмотрена А. Ф. Тиманом [16]. Указанная экстремальная задача в теории приближения функций мало изучена, и известные нам работы не содержат точных решений.

Пусть $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел (комплексная плоскость), $U := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ — (открытый) единичный круг в $\mathbb{C}$, $\mathscr{A}(U)$ — множество функций, аналитических в круге U. Обозначим через $L_2 = L_2[0, 2\pi]$ гильбертово пространство 2π-периодических комплекснозначных функций с обычными скалярным произведением и нормой

$$(f,g) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt, \tag{1.1}$$

$$\|f\|_{L_2} := \sqrt{(f,f)} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}. \tag{1.2}$$

О п р е д е л е н и е [17]. Говорят, что аналитическая в единичном круге U функция

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\Phi) z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 \le \rho < 1, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

принадлежит пространству Харди $\mathscr{H}_2$, если

$$\big\|\Phi\big\|_2 := \big\|\Phi\big\|_{\mathscr{H}_2} = \lim_{\rho\to 1-0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big|\Phi(\rho e^{it})\big|^2 dt\right)^{1/2} < \infty. \tag{1.3}$$

Хорошо известно (см., например, [18, с. 78; 19, с. 279, 280]), что в (1.3) интеграл не убывает при возрастании ρ и почти всюду на окружности $|z| = 1$ существуют угловые граничные значения $\Phi(e^{it}) =: F(t)$, при этом функция F принадлежит пространству L_2 и

$$\big\|\Phi\big\|_2 = \|F\|_{L_2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big|\Phi(e^{it})\big|^2 dt\right)^{1/2}. \tag{1.4}$$

Производную m-го порядка функции $\Phi(z) \in \mathscr{A}(U)$ определим как обычно:

$$\Phi^{(m)}(z) := \frac{d^{(m)}\Phi(z)}{dz^m} = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1)c_k(\Phi)z^{k-m}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{1.5}$$

а угловое граничное значение производной (1.5) обозначим через $\Phi^{(m)}(e^{it})$. Ради краткости введем обозначение

$$\alpha_{n,m} := n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad n \ge m. \tag{1.6}$$

Пусть $\mathscr{P}_{n-1}$ — подпространство комплексных алгебраических полиномов степени не выше $n-1$. Всюду далее символом $\mathscr{H}_2^{(m)}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$, $\mathscr{H}_2^{(0)} = \mathscr{H}_2$) обозначим множество функций $\Phi \in \mathscr{A}(U)$, принадлежащих пространству Харди $\mathscr{H}_2$, производная m-го порядка $\Phi^{(m)}(z)$ которых также принадлежит $\mathscr{H}_2$, т. е.

$$\mathscr{H}_2^{(m)} := \big\{\Phi \in \mathscr{H}_2 \colon \big\|\Phi^{(m)}\big\|_2 < \infty\big\}.$$

Поскольку для $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$ наравне с функцией Φ последовательные производные $\Phi^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, m-1)$ также принадлежат пространству $\mathscr{H}_2$ (см. [20]), то представляет несомненный интерес отыскание точных значений совместных приближений

$$E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_2 := \inf\big\{\big\|\Phi^{(s)} - p_{n-1}^{(s)}\big\|_2 \colon p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}\big\} \tag{1.7}$$

на некотором подмножестве функций $\mathfrak{M} \subset \mathscr{H}_2^{(m)}$ $(m \in \mathbb{N})$ или на самом классе $\mathscr{H}_2^{(m)}$, т. е. требуется найти точное значение величины

$$\mathscr{E}_{n-s-1}^{(s)}(\mathfrak{M})_2 := \sup\left\{E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_2 \colon \Phi \in \mathfrak{M}\right\}. \tag{1.8}$$

В работе получено несколько неравенств, связывающих величины наилучших приближений различных производных функции или величину наилучшего приближения одной производной с модулем непрерывности другой производной. Все полученные неравенства являются точными и обращаются в равенство на функции z^n.

Поскольку в данной работе используются нормы только пространств $\mathscr{H}_2$ и L_2, то с учетом соотношения (1.4) всюду далее нижние индексы у норм $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_{L_2}$ будем опускать. Аналогично будем поступать и с величинами, определяемыми с помощью этих норм, так вместо $E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_2$, $\mathscr{E}_{n-s-1}^{(s)}(\mathfrak{M})_2$ будем писать $E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})$, $\mathscr{E}_{n-s-1}^{(s)}(\mathfrak{M})$.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда при любых $s \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le s \le m$, справедливо равенство*

$$E_{n-s-1}(\Phi^{(s)}) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \left|c_k(\Phi)\right|^2\right)^{1/2}. \tag{2.1}$$

Равенство (2.1) доказывается по известной схеме (см. [19, с. 289–290]), а потому доказательство здесь не приводим.

Лемма 2. *Для произвольной функции $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$, при любых $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих условию $n > m \ge s$, имеет место неравенство*

$$E_{n-s-1}(\Phi^{(s)}) \le \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}\, E_{n-m-1}(\Phi^{(m)}). \tag{2.2}$$

Существует функция $G \in \mathscr{H}_2^{(m)}$, для которой неравенство (2.2) обращается в равенство.

Доказательство. Из формулы (2.1) при $s = m$ получаем

$$E_{n-m-1}^2(\Phi^{(m)}) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,m}^2 \left|c_k(\Phi)\right|^2. \tag{2.3}$$

Учитывая равенство (2.3), из (2.1) при $n > m \ge s$ имеем

$$\begin{aligned} E_{n-s-1}^2(\Phi^{(s)}) &= \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \left|c_k(\Phi)\right|^2 \\ = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha_{k,s}^2}{\alpha_{k,m}^2} \alpha_{k,m}^2 \left|c_k(\Phi)\right|^2 &\le \max_{k\ge n}\left(\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,m}}\right)^2 \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,m}^2 \left|c_k(\Phi)\right|^2 \\ &= \max_{k\ge n}\left(\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,m}}\right)^2 E_{n-m-1}^2(\Phi^{(m)}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Покажем, что

$$\max_{k\ge n} \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,m}} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}.$$

С этой целью сначала установим, что

$$\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,m}} = \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,s}\,\alpha_{k-s,m-s}} = \frac{1}{\alpha_{k-s,m-s}} \quad \text{при} \quad k \ge n > m \ge s.$$

Так как при $k \geq n > m \geq s$, $k, n \in \mathbb{N}$, $m, s \in \mathbb{Z}_+$, с учетом (1.6) имеют место равенства

$$\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,m}} := \frac{k(k-1)\cdots(k-s+1)}{k(k-1)\cdots(k-m+1)}$$

$$= \frac{k(k-1)\cdots(k-s+1)}{\underbrace{k(k-1)\cdots(k-s+1)}\underbrace{(k-s)\cdots(k-s-(m-s)+1)}} = \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,s}\,\alpha_{k-s,m-s}} = \frac{1}{\alpha_{k-s,m-s}}$$

$$= \frac{1}{(k-s)(k-s-1)\cdots(k-s-(m-s)+1)},$$

то отсюда следует, что

$$\max_{k\geq n}\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,m}} = \max_{k\geq n}\frac{1}{(k-s)(k-s-1)\cdots(k-s-(m-s)+1)}$$

$$= \frac{1}{(n-s)(n-s-1)\cdots(n-s-(m-s)+1)} = \frac{1}{\alpha_{n-s,m-s}} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,s}\,\alpha_{n-s,m-s}} := \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}.$$

Пользуясь этими равенствами и неравенством в (2.4), получаем

$$E^2_{n-s-1}(\Phi^{(s)}) \leq \frac{\alpha^2_{n,s}}{\alpha^2_{n,m}}\,E^2_{n-m-1}(\Phi^{(m)}),$$

откуда и следует требуемое неравенство (2.2).

Докажем точность (2.2) для функции $G(z) = z^n$, очевидно принадлежащей $\mathscr{H}_2^{(m)}$. Так как

$$E^2_{n-s-1}(G^{(s)}) = \alpha^2_{n,s}, \quad E^2_{n-m-1}(G^{(m)}) = \alpha^2_{n,m}, \tag{2.5}$$

то

$$E^2_{n-s-1}(G^{(s)}) = \alpha^2_{n,s} = \frac{\alpha^2_{n,s}}{\alpha^2_{n,m}}\,\alpha^2_{n,m} = \frac{\alpha^2_{n,s}}{\alpha^2_{n,m}}\,E^2_{n-m-1}(G^{(m)}).$$

Этим доказана точность неравенства (2.2), чем и завершаем доказательство леммы 2. □

Из леммы 2 вытекает

Следствие. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $m, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > m \geq s$. *Тогда*

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})}{E_{n-m-1}(\Phi^{(m)})} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как неравенство (2.2) имеет место для произвольной $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$, то из него при любых $n > m \geq s$ следует оценка сверху величины, стоящей в левой части (2.6)

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})}{E_{n-m-1}(\Phi^{(m)})} \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}. \tag{2.7}$$

Учитывая равенства (2.5), получаем оценку снизу той же величины

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})}{E_{n-m-1}(\Phi^{(m)})} \geq \frac{E_{n-s-1}(G^{(s)})}{E_{n-m-1}(G^{(m)})} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}. \tag{2.8}$$

Требуемое равенство (2.6) получаем сопоставлением неравенств (2.7) и (2.8), откуда и вытекает утверждение следствия. □

Отметим, что при $s = 0$ лемма 2 ранее доказана Л. В. Тайковым [9, теорема 1].

Для изложения дальнейших результатов введем определение модуля непрерывности r-го порядка для аналитической функции $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$. Пусть

$$\Delta_\tau^r \Phi(e^{iu}) = \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \binom{r}{l} \Phi\big(e^{i(u+(r-l)\tau)}\big)$$

— разность r-го порядка функции $\Phi(e^{iu})$ по переменной u с шагом τ. Гладкость произвольной функции $\Phi \in \mathscr{A}(U)$ будем характеризовать скоростью убывания к нулю модуля непрерывности r-го порядка ее граничных значений $\Phi(e^{it})$ в норме (1.2) пространства $L_2 = L_2[0, 2\pi]$

$$\omega_r(\Phi, t) := \sup\big\{\big\|\Delta_\tau^r \Phi\big(e^{i(\cdot)}\big)\big\| \colon |\tau| \le t\big\} \tag{2.9}$$

при $t \to 0$ либо скоростью убывания к нулю некоторой усредненной величины, содержащей $\omega_r(\Phi, t)$. Здесь и далее, следуя договоренности выше (см. абзац перед разд. 2), мы опускаем нижние индексы у норм и у величин, определяемых с их помощью. В дальнейшем для модуля непрерывности первого порядка функции Φ используется обозначение $\omega(\Phi, t)$ вместо $\omega_1(\Phi, t)$.

3. Основные результаты

Сначала найдем явный вид модуля непрерывности (2.9). Для функции

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\Phi) z^k \in \mathscr{H}_2$$

при любом $r \in \mathbb{N}$ имеем

$$\Delta_h^r \Phi(e^{it}) := \Delta_h^r \bigg(\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\Phi) e^{ikt}\bigg) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\Phi) \Delta_h^r \big(e^{ikt}\big)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\Phi) \bigg(\sum_{l=0}^{r} (-1) \binom{r}{l} e^{ik(t+(r-l)h)}\bigg) = (-1)^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\Phi) e^{ikt} \big(1 - e^{ikh}\big)^r.$$

Отсюда в силу ортонормированности системы функций $\big\{e^{ikt}\big\}_{k=0}^{\infty}$ относительно скалярного произведения (1.1), применяя тождество Парсеваля, будем иметь

$$\big\|\Delta_h^r \Phi(e^{i(\cdot)})\big\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big|\Delta_h^r \Phi(e^{it})\big|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} \big|c_k(\Phi)\big|^2 \big|1 - e^{ikh}\big|^{2r} = 2^r \sum_{k=1}^{\infty} \big|c_k(\Phi)\big|^2 \big(1 - \cos kh\big)^r,$$

а потому с учетом равенства (2.9) запишем

$$\omega_r^2(\Phi, t) = 2^r \sup_{|h| \le t} \sum_{k=1}^{\infty} \big|c_k(\Phi)\big|^2 \big(1 - \cos kh\big)^r. \tag{3.1}$$

В частности, из (3.1) для производной функции $\Phi^{(m)}$ получаем

$$\omega_r^2(\Phi^{(m)}, t) = 2^r \sup_{|h| \le t} \sum_{k=m}^{\infty} \big|c_k(\Phi^{(m)})\big|^2 \big(1 - \cos{(k-m)h}\big)^r$$

$$= 2^r \sup_{|h| \le t} \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{k,m}^2 \big|c_k(\Phi)\big|^2 \big(1 - \cos(k-m)h\big)^r. \tag{3.2}$$

Согласно договоренности, приведенной выше, в случае $r=1$ в соотношении (3) и ниже для модуля непрерывности первого порядка производной $\Phi^{(m)}$ используется обозначение $\omega(\Phi^{(m)},t)$.

В теореме 1 приводится два результата. А именно, двусторонняя оценка верхних граней наилучшего приближения (1.7) производных функции через модуль непрерывности m-й производной $\omega(\Phi^{(m)},t)$ и точное значение верхних граней совместного приближения производных функции через квадрат модуля непрерывности m-й производной, содержащийся в подынтегральном выражении.

Теорема 1. *При любых $n,m\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих условию $n>m\geq s$, выполняются следующие утверждения.*

1. *Если $0<(n-m)t\leq\pi$, то имеет место двусторонняя оценка*

$$\frac{1}{(n-m)t}\leq\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})}{\omega(\Phi^{(m)},t)}\leq\left(\frac{1}{((n-m)t)^2}+\frac{1}{2}\right)^{1/2}. \tag{3.3}$$

2. *Если $0<(n-m)h\leq\pi/2$, то справедливо равенство*

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h\omega^2(\Phi^{(m)},t)\,dt\right)^{1/2}}=\left(\frac{n-m}{2((n-m)h-\sin(n-m)h)}\right)^{1/2}. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без умаления общности ограничимся функциями $\Phi(z)$, у которых $c_k(\Phi)=0$ при $k=0,1,\ldots,n-1$, т. е. введем в рассмотрение функции вида

$$\Phi(z)=\sum_{k=n}^{\infty}c_k(\Phi)z^k\in\mathscr{H}_2^{(m)}.$$

Для таких функций получаем

$$\begin{aligned}&\big\|\Delta_h^1(\Phi)\big\|^2=\big\|\Phi\big(e^{i(t+h)}\big)-\Phi\big(e^{it}\big)\big\|^2\\ &=2\sum_{k=n}^{\infty}\big|c_k(\Phi)\big|^2(1-\cos kh)=2\sum_{k=n}^{\infty}\big|c_k(\Phi)\big|^2-2\sum_{k=n}^{\infty}\big|c_k(\Phi)\big|^2\cos kh\\ &=2E_{n-1}^2(\Phi)-2\sum_{k=n}^{\infty}\big|c_k(\Phi)\big|^2\cos kh.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Интегрируя обе части равенства (3) по переменному h от 0 до τ, будем иметь

$$2\tau E_{n-1}^2(\Phi)=2\sum_{k=n}^{\infty}\big|c_k(\Phi)\big|^2\,\frac{1}{k}\sin k\tau+\int\limits_0^{\tau}\big\|\Delta_h^1(\Phi)\big\|^2\,dh. \tag{3.6}$$

Полученное равенство интегрируем по τ в отрезке $[0,t]$:

$$t^2E_{n-1}^2(\Phi)=2\sum_{k=n}^{\infty}\big|c_k(\Phi)\big|^2\,\frac{1-\cos kt}{k^2}+\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{\tau}\big\|\Delta_h^1(\Phi)\big\|^2\,dh\right)d\tau. \tag{3.7}$$

Заметив, что $\max\limits_{k\geq n}(1/k^2)=1/n^2$, и интегрируя по частям интеграл, стоящий в правой части (3.7), запишем

$$t^2E^2_{n-1}(\Phi) \le \frac{2}{n^2}\sum_{k=n}^{\infty}\big|c_k(\Phi)\big|^2(1-\cos kt) + \int\limits_0^t (t-\tau)\big\|\Delta^1_\tau(\Phi)\big\|^2\,d\tau$$

$$= \frac{1}{n^2}\big\|\Delta^1_t(\Phi)\big\|^2 + \int\limits_0^t (t-\tau)\big\|\Delta^1_\tau(\Phi)\big\|^2\,d\tau, \tag{3.8}$$

и так как $\big\|\Delta^1_\tau(\Phi)\big\|^2 \le \omega^2(\Phi,\tau)$, то для интеграла в правой части неравенства (3) имеет место оценка

$$\int\limits_0^t (t-\tau)\big\|\Delta^1_\tau(\Phi)\big\|^2\,d\tau \le \int\limits_0^t (t-\tau)\omega^2(\Phi,\tau)\,d\tau \le \frac{t^2}{2}\,\omega^2(\Phi,t).$$

Учитывая эти оценки, представим неравенство (3) в виде

$$t^2E^2_{n-1}(\Phi) \le \Big(\frac{1}{n^2}+\frac{t^2}{2}\Big)\omega^2(\Phi,t).$$

Поделив полученное неравенство на t^2, получим

$$E^2_{n-1}(\Phi) \le \left(\frac{1}{(nt)^2}+\frac{1}{2}\right)\omega^2(\Phi,t).$$

Отсюда в предположении, что $\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}$, для производной $\Phi^{(m)}$ имеем

$$E^2_{n-m-1}(\Phi^{(m)}) \le \left(\frac{1}{((n-m)t)^2}+\frac{1}{2}\right)\omega^2(\Phi^{(m)},t). \tag{3.9}$$

Применяя лемму 2 и (3.9), выводим

$$E^2_{n-s-1}(\Phi^{(s)}) \le \frac{\alpha^2_{n,s}}{\alpha^2_{n,m}}\,E^2_{n-m-1}(\Phi^{(m)}) \le \frac{\alpha^2_{n,s}}{\alpha^2_{n,m}}\left(\frac{1}{((n-m)t)^2}+\frac{1}{2}\right)\omega^2(\Phi^{(m)},t).$$

Так как полученное неравенство имеет место для любой функции $\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}$, то из него следует правая часть — оценка сверху в неравенстве (3.3)

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})}{\omega(\Phi^{(m)},t)} \le \left(\frac{1}{((n-m)t)^2}+\frac{1}{2}\right)^{1/2}. \tag{3.10}$$

Оценка снизу величины, стоящей в левой части (3.10), проверяется на функции $G(z) = z^n\in\mathscr{H}_2$, поскольку для $n,m\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{Z}_+$, $n>m\ge s$, $0<(n-m)t\le\pi$ получаем

$$E_{n-s-1}(G^{(s)}) = \alpha_{n,s};$$

$$\omega^2(G^{(m)},t) = 2\alpha^2_{n,m}(1-\cos(n-m)t) = \Big(2\sin\frac{(n-m)t}{2}\Big)^2\alpha^2_{n,m}$$

$$\le \Big(2\cdot\frac{(n-m)t}{2}\Big)^2\alpha^2_{n,m} = ((n-m)t)^2\alpha^2_{n,m}, \quad 0<(n-m)t\le\pi. \tag{3.11}$$

Пользуясь этими соотношениями, запишем оценку снизу

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})}{\omega(\Phi^{(m)},t)}\geq\frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(G^{(s)})}{\omega(G^{(m)},t)}\geq\frac{1}{(n-m)t}. \tag{3.12}$$

Требуемое двойное неравенство (3.3) получаем из сопоставления оценки сверху (3.10) с оценкой снизу (3.12).

Переходим к доказательству равенства (3.4). Поделив обе части (3.6) на 2τ, имеем

$$E_{n-1}^2(\Phi)=\sum_{k=n}^{\infty}\left|c_k(\Phi)\right|^2\frac{\sin k\tau}{k\tau}+\frac{1}{2\tau}\int_0^{\tau}\left\|\Delta_h^1(\Phi)\right\|^2dh, \tag{3.13}$$

и так как $n\tau\leq\pi/2$, то, пользуясь тем, что в этом случае по условию теоремы 1 из [10]

$$\max_{u\geq nt}\left|\frac{\sin u}{u}\right|=\frac{\sin nt}{nt},\quad (0\leq nt\leq\pi/2),$$

из равенства (3.13) выводим

$$E_{n-1}^2(\Phi)\leq\frac{\sin n\tau}{n\tau}\sum_{k=n}^{\infty}\left|c_k(\Phi)\right|^2+\frac{1}{2\tau}\int_0^{\tau}\left\|\Delta_h^1(\Phi)\right\|^2dh\leq\frac{\sin n\tau}{n\tau}E_{n-1}^2(\Phi)+\frac{1}{2\tau}\int_0^{\tau}\omega^2(\Phi,h)dh.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$E_{n-1}^2(\Phi)\leq\frac{n}{2(n\tau-\sin n\tau)}\int_0^{\tau}\omega^2(\Phi,h)\,dh,\quad n\tau\leq\pi/2.$$

Записав полученное неравенство для величины $E_{n-m-1}^2(\Phi^{(m)})$, $n,m\in\mathbb{N}$, $n>m$, будем иметь

$$E_{n-m-1}^2(\Phi^{(m)})\leq\frac{n-m}{2((n-m)\tau-\sin(n-m)\tau)}\int_0^{\tau}\omega^2(\Phi^{(m)},h)\,dh.$$

Отсюда с учетом неравенства (2.2) для $n>m\geq s$ получим

$$E_{n-s-1}^2(\Phi^{(s)})\leq\frac{\alpha_{n,s}^2}{\alpha_{n,m}^2}\frac{n-m}{2((n-m)\tau-\sin(n-m)\tau)}\int_0^{\tau}\omega^2(\Phi^{(m)},h)\,dh. \tag{3.14}$$

Из (3.14) сразу вытекает оценка сверху

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})\,E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})}{\Big(\int_0^{\tau}\omega^2(\Phi^{(m)},h)\,dh\Big)^{1/2}}\leq\left(\frac{n-m}{2((n-m)\tau-\sin(n-m)\tau)}\right)^{1/2}. \tag{3.15}$$

Для получения аналогичной оценки снизу снова рассмотрим функцию $G(z)=z^n\in\mathscr{H}_2^{(m)}$, для которой справедливы соотношения (3.11), а потому простые вычисления дают

$$\int_0^{\tau}\omega^2(G^{(m)},t)dt=2\alpha_{n,m}^2\,\frac{(n-m)\tau-\sin(n-m)\tau}{n-m}.$$

Следовательно, справедлива оценка снизу

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})\, E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})}{\Bigl(\int\limits_0^\tau \omega^2(\Phi^{(m)},h)\,dh\Bigr)^{1/2}} \geq \frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})\, E_{n-s-1}(G^{(s)})}{\Bigl(\int\limits_0^\tau \omega^2(G^{(m)},h)\,dh\Bigr)^{1/2}}$$

$$= \frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})\alpha_{n,s}(n-m)^{1/2}}{\bigl(2((n-m)\tau-\sin(n-m)\tau)\bigr)^{1/2}\alpha_{n,m}} = \Bigl(\frac{n-m}{2((n-m)\tau-\sin(n-m)\tau)}\Bigr)^{1/2}. \tag{3.16}$$

Равенство (3.4) получаем из сопоставления неравенств (3.15) и (3.16). □

Во второй теореме устанавливаются точные значения верхних граней совместного приближения производных функции через квадрат модуля непрерывности m-й производной, содержащийся не только в подынтегральном выражении, но также и вне интеграла.

Теорема 2. *Для любых* $n\in\mathbb{N}$, $m,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>m\geq s$ *и* $0<t\leq\pi/(n-m)$ *справедливо равенство*

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})}{\Bigl(\omega^2(\Phi^{(m)},t)+(n-m)^2\int\limits_0^t(t-\tau)\omega^2(\Phi^{(m)},\tau)\,d\tau\Bigr)^{1/2}} = \frac{1}{(n-m)t}. \tag{3.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, из (3), учитывая, что $\bigl\|\Delta_t^1(\Phi)\bigr\|^2\leq\omega^2(\Phi,t)$, будем иметь

$$E_{n-1}^2(\Phi)\leq\frac{1}{(nt)^2}\,\omega^2(\Phi,t)+\frac{1}{t^2}\int\limits_0^t(t-\tau)\omega^2(\Phi,\tau)\,d\tau$$

$$=\frac{1}{(nt)^2}\Bigl(\omega^2(\Phi,t)+n^2\int\limits_0^t(t-\tau)\omega^2(\Phi,\tau)\,d\tau\Bigr). \tag{3.18}$$

Из (3.18) для производной функции $\Phi^{(m)}\in\mathscr{H}_2$ следует, что

$$E_{n-m-1}^2(\Phi^{(m)})\leq\frac{1}{((n-m)t)^2}\Bigl(\omega^2(\Phi^{(m)},t)+(n-m)^2\int\limits_0^t(t-\tau)\omega^2(\Phi^{(m)},\tau)\,d\tau\Bigr).$$

Применяя лемму 2, из последнего неравенства при $n>m\geq s$ получаем

$$E_{n-s-1}^2(\Phi^{(s)})\leq\Bigl(\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}\Bigr)^2E_{n-m-1}^2(\Phi^{(m)})$$

$$\leq\Bigl(\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}\Bigr)^2\frac{1}{((n-m)t)^2}\Bigl(\omega^2(\Phi^{(m)},t)+(n-m)^2\int\limits_0^t(t-\tau)\omega^2(\Phi^{(m)},\tau)\,d\tau\Bigr).$$

Поскольку полученное неравенство справедливо для любой функции $\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}$, то из него вытекает оценка сверху для экстремальной характеристики из левой части равенства (3.17):

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})}{\Bigl(\omega^2(\Phi^{(m)},t)+(n-m)^2\int\limits_0^t(t-\tau)\omega^2(\Phi^{(m)},\tau)\,d\tau\Bigr)^{1/2}} \leq \frac{1}{(n-m)t}. \tag{3.19}$$

Оценку снизу указанной характеристики доставляет функция $G(z)=z^n\in\mathscr{H}_2^{(m)}$:

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})}{\left(\omega^2(\Phi^{(m)},t)+(n-m)^2\int\limits_0^t(t-\tau)\omega^2(\Phi^{(m)},\tau)\,d\tau\right)^{1/2}}$$

$$\geq\frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(G^{(s)})}{\left(\omega^2(G^{(m)},t)+(n-m)^2\int\limits_0^t(t-\tau)\omega^2(G^{(m)},\tau)\,d\tau\right)^{1/2}}$$

$$=\frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}\left(2(1-\cos(n-m)t)+2(n-m)^2\int\limits_0^t(t-\tau)(1-\cos(n-m)\tau)d\tau\right)^{1/2}}$$

$$=\frac{1}{\Big(2(1-\cos(n-m)t)+((n-m)t)^2-2(1-\cos(n-m)t)\Big)^{1/2}}=\frac{1}{(n-m)t}. \tag{3.20}$$

Требуемое равенство (3.17) получаем из сравнения неравенств (3.19) и (3.20). □

В следующей теореме найдены точные значения верхних граней совместного приближения производных функции через квадрат модуля непрерывности r-го порядка m-й производной, содержащийся в подынтегральном выражении.

Теорема 3. *Для любых $n,r\in\mathbb{N}$, $m,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>m\geq s$ и любого $0<h\leq\pi/(n-m)$ справедливо равенство*

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{\big(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s}\big)E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},\tau)\,d\tau\right)dt\right)^{r/2}}=\left(\frac{n-m}{2\big((n-m)h-\mathrm{Si}((n-m)h)\big)}\right)^{r/2}. \tag{3.21}$$

В частности, из (3.21) *при $h=\pi/(n-m)$ получаем*

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{\big(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s}\big)E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})}{\left(\int\limits_0^{\pi/(n-m)}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},\tau)\,d\tau\right)dt\right)^{r/2}}=\left(\frac{n-m}{2\big(\pi-\mathrm{Si}(\pi)\big)}\right)^{r/2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что для произвольной функции $\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}^2(\Phi)-\sum_{k=n}^{\infty}\big|c_k(\Phi)\big|^2\cos kt\leq\big(E_{n-1}^2(\Phi)\big)^{1-1/r}\cdot\frac{1}{2}\,\omega_r^{2/r}(\Phi,t)_2. \tag{3.22}$$

В самом деле, пользуясь определением наилучшего приближения функции $\Phi\in\mathscr{H}_2$ и пользуясь неравенством Гёльдера для сумм, запишем

$$E_{n-1}^2(\Phi)-\sum_{k=n}^{\infty}\big|c_k(\Phi)\big|^2\cos kt=\sum_{k=n}^{\infty}\big|c_k(\Phi)\big|^2\big(1-\cos kt\big)=\sum_{k=n}^{\infty}\big|c_k(\Phi)\big|^{2-2/r}\Big(\big|c_k(\Phi)\big|^{2/r}(1-\cos kt)\Big)$$

$$\leq \left(\sum_{k=n}^{\infty}\left|c_k(\Phi)\right|^2\right)^{1-1/r}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left|c_k(\Phi)\right|^2\bigl(1-\cos kt\bigr)^r\right)^{1/r}$$

$$=\bigl(E_{n-1}^2(\Phi)\bigr)^{1-1/r}\left(\frac{2^r}{2^r}\sum_{k=1}^{\infty}\left|c_k(\Phi)\right|^2\bigl(1-\cos kt\bigr)^r\right)^{1/r}\leq\bigl(E_{n-1}^2(\Phi)\bigr)^{1-1/r}\cdot\frac{1}{2}\,\omega_r^{2/r}(\Phi,t),$$

и неравенство (3.22) доказано.

Проинтегрировав обе части неравенства (3.22) по переменной t в пределах от $t=0$ до $t=\tau$ и затем поделив обе части полученного результата на τ, запишем

$$E_{n-1}^2(\Phi)\leq\sum_{k=n}^{\infty}\left|c_k(\Phi)\right|^2\frac{\sin k\tau}{k\tau}+\bigl(E_{n-1}^2(\Phi)\bigr)^{1-1/r}\cdot\frac{1}{2\tau}\int\limits_0^{\tau}\omega_r^{2/r}(\Phi,t)\,dt. \tag{3.23}$$

Повторно интегрируя обе части неравенства (3.23) по переменному τ в промежутке $[0,h]$ $(0<nh\leq\pi)$ с учетом определения интегрального синуса, приходим к неравенству

$$hE_{n-1}^2(\Phi)\leq\sum_{k=n}^{\infty}\left|c_k(\Phi)\right|^2\frac{\mathrm{Si}(kh)}{k}+\bigl(E_{n-1}^2(\Phi)\bigr)^{1-1/r}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{h}\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau}\omega_r^{2/r}(\Phi,t)\,dt\right)d\tau.$$

Из последнего неравенства получаем

$$E_{n-1}^2(\Phi)\leq\sum_{k=n}^{\infty}\left|c_k(\Phi)\right|^2\frac{\mathrm{Si}(kh)}{kh}+\bigl(E_{n-1}^2(\Phi)\bigr)^{1-1/r}\cdot\frac{1}{2h}\int\limits_0^{h}\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau}\omega_r^{2/r}(\Phi,t)\,dt\right)d\tau. \tag{3.24}$$

Учитывая, что функция $\mathrm{Si}(x)/x$ является невозрастающей на интервале $0<x<\infty$ (см., например, [21, c. 335]) при всех $k\geq n,\ k,n\in\mathbb{N}$ запишем

$$\max_{k\geq n}\frac{\mathrm{Si}(kh)}{kh}=\frac{\mathrm{Si}(nh)}{nh},\quad 0<nh\leq\pi.$$

Из неравенства (3.24) следует, что

$$E_{n-1}(\Phi)\leq\left(\frac{n}{2(nh-\mathrm{Si}(nh))}\right)^{r/2}\left(\int\limits_0^{h}\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau}\omega_r^{2/r}(\Phi,t)dt\right)d\tau\right)^{r/2}. \tag{3.25}$$

Так как полученное неравенство (3.25) справедливо для любой функции $\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}$, то, заменив в нем функцию Φ на $\Phi^{(m)}$, получаем

$$E_{n-m-1}(\Phi^{(m)})\leq\left(\frac{n-m}{2\bigl((n-m)h-\mathrm{Si}((n-m)h)\bigr)}\right)^{r/2}\left(\int\limits_0^{h}\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau}\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)\,dt\right)d\tau\right)^{r/2}.$$

Применяя лемму 2 к последнему неравенству, имеем

$$E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})\leq\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}\left(\frac{n-m}{2\bigl((n-m)h-\mathrm{Si}((n-m)h)\bigr)}\right)^{r/2}$$
$$\times\left(\int\limits_0^{h}\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau}\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)\,dt\right)d\tau\right)^{r/2}, \tag{3.26}$$

откуда получаем оценку сверху стоящей в левой части равенства (3.21) величины

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^t\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)\,dt\right)d\tau\right)^{r/2}}\le\left(\frac{n-m}{2\big((n-m)h-\mathrm{Si}((n-m)h)\big)}\right)^{r/2}. \tag{3.27}$$

Для получения неравенства снизу по-прежнему вводим в рассмотрение функцию $G(z)=z^n$, для которой кроме равенства $E_{n-s-1}(G^{(s)})=\alpha_{n,s}$ еще имеют место равенства

$$\omega_r^2(G^{(m)},t)=2^r\alpha_{n,m}^2(1-\cos(n-m)t)^r, \tag{3.28}$$

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau\omega_r^{2/r}(G^{(m)},t)\,dt=2\,\alpha_{n,m}^{2/r}\Big(1-\frac{\sin(n-m)\tau}{(n-m)\tau}\Big),$$

$$\left(\int\limits_0^h\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau\omega_r^{2/r}(G^{(m)},t)\,dt\right)d\tau\right)^{r/2}=\alpha_{n,m}\left(\frac{2\big((n-m)h-\mathrm{Si}((n-m)h)\big)}{n-m}\right)^{r/2}.$$

Пользуясь этими равенствами, получаем нужную оценку снизу

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)\,dt\right)d\tau\right)^{r/2}}$$

$$\ge\frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(G^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau\omega_r^{2/r}(G^{(m)},t)\,dt\right)d\tau\right)^{r/2}}=\left(\frac{n-m}{2\big((n-m)h-\mathrm{Si}((n-m)h)\big)}\right)^{r/2}. \tag{3.29}$$

Сопоставив оценки сверху (3.27) и снизу (3) для экстремальной характеристики, стоящей в левой части равенства (3.21), завершаем доказательство теоремы 3. $\square$

Для заданных $h>0$, $m,r\in\mathbb{N}$ через $W_{2,r}^{(m)}(h):=W_2^{(m)}(\omega_r;h)$ обозначим класс функций $\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}$, для которых

$$\int\limits_0^h\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)dt\right)d\tau\le 1.$$

Далее приводится решение экстремальной задачи (1.8) для введенного класса функций $W_{2,r}^{(m)}(h)$. А именно, выполняется следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $0<h\le\pi/(n-m)$, $n>m$, $n,r\in\mathbb{N}$, $m,s\in\mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$\mathscr{E}_{n-s-1}^{(s)}(W_{2,r}^{(m)}(h))=\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}\left(\frac{n-m}{2\big((n-m)h-\mathrm{Si}((n-m)h)\big)}\right)^{r/2}. \tag{3.30}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольной функции $f\in W_{2,r}^{(m)}(h)$ с помощью неравенства (3.26) получаем

$$E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})\le\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}\left(\frac{n-m}{2\big((n-m)h-\mathrm{Si}((n-m)h)\big)}\right)^{r/2},$$

откуда сразу следует оценка сверху

$$\mathscr{E}_{n-s-1}^{(s)}(W_{2,r}^{(m)}(h)) \le \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}\left(\frac{n-m}{2\big((n-m)h-\mathrm{Si}((n-m)h)\big)}\right)^{r/2}. \tag{3.31}$$

Рассмотрим функцию

$$G_1(z)=\frac{1}{\alpha_{n,m}}\left(\frac{n-m}{2\big((n-m)h-\mathrm{Si}((n-m)h)\big)}\right)^{r/2} z^n,$$

для которой

$$G_1^{(s)}(z)=\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}\left(\frac{n-m}{2\big((n-m)h-\mathrm{Si}((n-m)h)\big)}\right)^{r/2} z^{n-s};$$

$$E_{n-s-1}(G_1^{(s)})=\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}\left(\frac{n-m}{2\big((n-m)h-\mathrm{Si}((n-m)h)\big)}\right)^{r/2}. \tag{3.32}$$

Так как в силу (3.28)

$$\omega_r(G_1^{(m)},t)=2^{r/2}(1-\cos(n-m)t)^{r/2}\left(\frac{n-m}{2\big((n-m)h-\mathrm{Si}((n-m)h)\big)}\right)^{r/2},$$

то имеем

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \omega_r^{2/r}(G_1^{(m)},t)\,dt = 2\left(1-\frac{\sin(n-m)\tau}{(n-m)\tau}\right)\left(\frac{n-m}{2\big((n-m)h-\mathrm{Si}((n-m)h)\big)}\right)$$

и

$$\int\limits_0^h\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \omega_r^{2/r}(G_1^{(m)},t)dt\right)d\tau$$

$$=\left(\frac{2\big((n-m)h-\mathrm{Si}((n-m)h)\big)}{n-m}\right)\left(\frac{n-m}{2\big((n-m)h-\mathrm{Si}((n-m)h)\big)}\right)=1.$$

Последнее равенство означает, что функция $G_1\in W_{2,r}^{(m)}(h)$, а потому, учитывая равенство (3.32), запишем оценку указанной величины снизу

$$\mathscr{E}_{n-s-1}^{(s)}(W_{2,r}^{(m)}(h)) \ge E_{n-s-1}(G_1^{(s)})=\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}\left(\frac{n-m}{2\big((n-m)h-\mathrm{Si}((n-m)h)\big)}\right)^{r/2}. \tag{3.33}$$

Требуемое равенство (3.30) получаем из сопоставления неравенств (3.31) и (3.33), чем и завершаем доказательство теоремы 4. $\square$

Благодарности. Авторы благодарят рецензента за внимательное чтение рукописи, ценные замечания и советы по улучшению текста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабенко К.И.** О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1958. Т. 22, вып. 5. С. 631–640.
2. **Scheick J.T.** Polynomial approximation of functions analytic in a disk // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17. P. 1238–1243.
3. **Белый В.И.** К вопросу о наилучших линейных методах приближения функций, аналитических в единичном круге // Укр. мат. журн. 1967. Т. 19, № 2. С. 104–109.
4. **Белый В.И., Двейрин М.З.** О наилучших линейных методах приближения на классах функций, определяемых союзными ядрами // Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наукова думка, 1971. Вып. 2. С. 37–54.
5. **Двейрин М.З.** О приближении функций, аналитических в единичном круге // Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наукова думка, 1975. Вып. 6. С. 41–54.
6. **Двейрин М.З.** Поперечники и ε-энтропия классов функций, аналитических в единичном круге функций // Теория функций, функциональный анализ и их приложения: республ. науч. сб. / Харьковский нац. университет им. В.Н. Каразина. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1975. Вып. 23. С. 32–46.
7. **Тихомиров В.М.** Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3(93). С. 81–120.
8. **Тихомиров В.М.** Некоторые вопросы теории приближений. М.: Моск. гос. ун-т, 1976. 304 с.
9. **Тайков Л.В.** О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 155–162.
10. **Айнуллоев Н., Тайков Л.В.** Наилучшие приближения в смысле А. Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Мат. заметки. 1986. Т. 40, вып. 3. С. 341–351.
11. **Тайков Л.В.** Поперечники некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. 1977. Т. 22, вып. 2. С. 285–295.
12. **Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш.** Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве H_2 // Мат. заметки. 2000. Т. 68, вып. 5. С. 796–800.
13. **Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.** Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 6. С. 747–749.
14. **Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.** Наилучшие методы приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве $H_{q,\rho}$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \rho \le 1$ // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 469–478.
15. **Гаркави А.Л.** О совместном приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1960. Т. 24, вып. 1. С. 103–128.
16. **Тиман А.Ф.** К вопросу об одновременной аппроксимации функций и их производных на всей числовой оси // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1960. Т. 24, вып. 3. С. 421–430.
17. **Кусис П.** Введение в теорию пространств H^p. М.: Мир, 1984. 256 с.
18. **Привалов И.И.** Граничные свойства аналитических функций. М: Гостехиздат, 1950. 336 с.
19. **Смирнов В.И., Лебедев Н.А.** Конструктивная теория функций комплексного переменного.М.; Л.: Мир, 1964. 440 с.
20. **Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б.** Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации // Укр. мат. журн., 2011. Т. 63, № 12. С. 1579–1601.
21. **Вакарчук С.Б., Забутная В.И.** Точное неравенство типа Джексона — Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Мат. заметки, 2009. Т. 86, вып. 3. С. 328–336.

Поступила 28.02.2021

После доработки 10.09.2021

Принята к публикации 11.10.2021

Шабозов Мирганд Шабозович

д-р физ.-мат. наук, профессор

Таджикский национальный университет

г. Душанбе

e-mail: shabozov@mail.ru

Юсупов Гулзорхон Амиршоевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Хорогский государственный университет им. М. Назаршоева
г. Хорог
e-mail: yusufzoda.gulzorkhon@gmail.com

Заргаров Джамшед Джангиевич
старший преподаватель кафедры математического анализа
Хорогского государственного университета им. М. Назаршоева
г. Хорог
e-mail: jamshed-80@mail.ru

REFERENCES

1. Babenko K.I. Best approximations to a class of analytic functions. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1958, vol. 22, no. 5, pp. 631–640 (in Russian).
2. Scheick J.T. Polynomial approximation of functions analytic in a disk. *Proc. Am. Math. Soc.*, 1966, vol. 17, pp. 1238–1243. doi: 10.2307/2035717 .
3. Belyi V.I. The problem of the best linear methods for approximating functions which are analytic in the unit circle. *Ukr. Mat. J.*, 1967, vol. 19, no. 2, pp. 216–220. doi: 10.1007/BF01086834 .
4. Belyi V.I., Dveyrin M.Z. Best linear methods of approximation on classes of functions defined by union kernels. In: *Metric questions of the theory of functions and maps.* Kiev: Naukova Dumka, 1971, no. 2, pp. 37–54 (in Russian).
5. Dveyrin M.Z. Approximation of functions analytic in the unit circle. In: *Metric questions in the theory of functions and maps.* Kiev: Naukova Dumka, 1975, no. 6, pp. 41–54 (in Russian).
6. Dveyrin M.Z. Widths and ε-entropy of classes of functions that are analytic in the unit circle of functions. *Function theory, functional analysis and their applications*, 1975, no. 23, pp. 32–46 (in Russian).
7. Tikhomirov V.M. Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations. *Russian Math. Surveys*, 1960, vol. 15, no. 3, pp. 75–111. doi: 10.1070/RM1960v015n03ABEH004093 .
8. Tikhomirov V.M. *Nekotorye voprosy teorii priblizhenii* [Some questions of approximation theory]. M.: Mosk. Gos. Univ., 1976, 304 p.
9. Taikov L.V. On the best approximation in the mean of certain classes of analytic functions. *Math. Notes Acad. Sci. of the USSR*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 104–109. doi: 10.1007/BF01268058 .
10. Ainulloev N., Taikov L.V. Best approximation in the sense of Kolmogorov of classes of functions analytic in the unit disc. *Math. Notes*, 1986, vol. 40, no. 3, pp. 699–705. doi: 10.1007/BF01142473 .
11. Taikov L.V. Diameters of certain classes of analytic functions. *Math. Notes Acad. Sci. of the USSR*, 1977, vol. 22, no. 2, pp. 650–656. doi: 10.1007/BF01780976 .
12. Shabozov M.Sh., Shabozov O.Sh. Widths of some classes of analytic functions in the Hardy space H_2. *Math. Notes Acad. Sci. of the USSR*, 2000, vol. 68, no. 5, pp. 675–679. doi: 10.1023/A:1026692112651 .
13. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Best approximation and widths of some classes of analytic functions. *Dokl. Math.*, 2002, vol. 65, no. 1, pp. 111–113.
14. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Best approximation methods and widths for some classes of functions in $H_{q,\rho}$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \rho \le 1$. *Siberian Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 2, pp. 369–376. doi: 10.1134/S0037446616020191 .
15. Garkavi A.L. Simultaneous approximation to a periodic function and its derivatives by trigonometric polynomials. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1960, vol. 24, no. 1, pp. 103–128 (in Russian).
16. Timan A.F. Simultaneous approximation of functions and their derivatives on the whole real axis. In: *Am. Math. Soc., Transl.*, Ser. 2, 1965, vol. 44, pp. 1–11.
17. Kousis P. *Introduction to H^p spaces.* Cambridge: Cambridge University Press, 1999, 304 p. ISBN: 0521455219 . Translated to Russian under the title *Vvedenie v teoriyu prostranstv H^p*, Moscow: Mir Publ., 1984, 256 p.
18. Privalov I.I. *Granichnye svoistva analiticheskikh funktsii* [Boundary properties of analytic functions]. Moscow: Gostekhizdat, 1950, 336 p.

19. Smirnov V.I., Lebedev N.A. *Functions of a complex variable. Constructive theory.* London: Iliffe Books Ltd., 1968, 488 p. ISBN: 9780262190466 . Original Russian text published in Smirnov V.I., Lebedev N.A. *Konstruktivnaya teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo*, Moscow; Leningrad: Nauka Publ., 1964, 440 p.
20. Vakarchuk S.B., Vakarchuk M.B. Inequalities of Kolmogorov type for analytic functions of one and two complex variables and their applications to approximation theory. *Ukr. Math. J.*, 2012, vol. 63, no. 12, pp. 1795–1819. doi: 10.1007/s11253-012-0615-3 .
21. Vakarchuk S.B., Zabutnaya V.I. A sharp inequality of Jackson–Stechkin type in L_2 and the widths of functional classes. *Math. Notes*, 2009, vol. 86, no. 3, pp. 306–313. doi: 10.1134/S0001434609090028 .

Received February 28, 2021
Revised September 10, 2021
Accepted October 11, 2021

M. Sh. Shabozov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Tajik National University, Dushanbe, 734025. Republic of Tajikistan, e-mail: shabozov@mail.ru .

G. A. Yusupov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Khorog State University by name M. Nazarshoev, Khorog, 734000. Republic of Tajikistan, e-mail: yusufzoda.gulzorkhon@gmail.com .

J. J. Zargarov, Department of Mathematical Analysis, Khorog State University by name M. Nazarshoev, Khorog, 734000. Republic of Tajikistan, e-mail: jamshed-80@mail.ru .

Cite this article as: M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov, J. J. Zargarov. On the best simultaneous polynomial approximation of functions and their derivatives in Hardy spaces, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 239–254 .