ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 4 2021

УДК 517.96;517.984

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ В МЕТОДЕ ФУРЬЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

А. П. Хромов, В. В. Корнев

В работе исследуются ряды формальных решений двух смешанных задач для волнового уравнения методом, базирующимся на привлечении расходящихся рядов в понимании Л. Эйлера. Дается обоснование законности приводимого метода. Указанный метод обладает большой экономичностью в использовании известных математических фактов. Тем самым открывается перспектива существенного продвижения в исследовании краевых задач для уравнений в частных производных.

Ключевые слова: метод Фурье, смешанная задача, волновое уравнение, расходящийся ряд, резольвента.

A. P. Khromov, V. V. Kornev. Divergent series in the Fourier method for the wave equation.

Series of formal solutions of two mixed problems for the wave equation are studied by a method based on the application of divergent series in the sense of Euler. The validity of this method is proved. The method is very economical in the use of well-known mathematical facts, which opens up the prospect of significant progress in the study of boundary value problems for partial differential equations.

Keywords: Fourier method, mixed problem, wave equation, divergent series, resolvent.

MSC: 35L20, 35C10

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238

Введение

Обоснование метода Фурье в задачах математической физики традиционно опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, получающихся из него почленным дифференцированием нужное число раз. В. А. Стеклов, впервые давший строгое обоснование метода Фурье, придерживался этой точки зрения [1, с. 224], которая сделала метод Фурье очень популярным. Было проведено большое количество исследований, и достигнуты значительные успехи. Недостатком такого подхода является то, что он требует завышения гладкости начальных данных. Выход из этого положения намечен А. Н. Крыловым [2] в его исследованиях по ускорению сходимости рядов Фурье и им подобных. Суть его приема состоит в том, что изучаемый вопрос о дифференцировании ряда решается путем разбиения его на два ряда, один из которых точно суммируется (и тем самым здесь не нужно прибегать к почленному дифференцированию), а второй сходится настолько быстро, что его можно почленно дифференцировать. Им были успешно преодолены трудности, связанные с невозможностью почленного дифференцирования, на ряде конкретных прикладных задач. В. А. Чернятин [3], использовав прием А. Н. Крылова с применением уточненных асимптотик для собственных значений и собственных функций, исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости исходных данных, а в ряде случаев эти условия стали минимально возможными.

Это направление получило развитие в [4;5]. Там в смешанной задаче для волнового уравнения был предложен резольвентный подход, состоящий в привлечении метода Коши — Пуанкаре контурного интегрирования по спектральному параметру резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей метода Фурье. В результате удалось получить решение смешанных задач при минимальных условиях гладкости начальных данных, не используя при этом уточненных асимптотик для собственных значений и никакой информации о собственных функциях. Важно то, что резольвентный подход позволил привлечь ряды Фурье по тригонометрической системе вместо рядов по собственным функциям.

В [6; 7] был впервые поставлен вопрос о сходимости формального ряда в методе Фурье как самостоятельный. Были привлечены глубокие факты из действительного анализа: теорема Карлесона — Ханта, теорема Хаусдорфа — Юнга, теоремы о свертках и другие. Кроме того, также впервые было введено понятие обобщенного решения смешанной задачи, понимаемого как предел классических, и получены соответствующие результаты.

Указанные выше работы определили последующие пути исследования в рамках сходимости ряда формального решения [8–12].

Дальнейшее направление развития метода связано с расходящимися рядами формальных решений. Такой случай может иметь место в силу примера А. Н. Колмогорова расходящегося ряда Фурье по тригонометрической системе для функций из $L[0,1]$.

Расходящиеся ряды рассматриваются в понимании Л. Эйлера [13; 14], основоположника теории суммирования расходящихся рядов. Наша задача — так назначить, следуя рекомендациям Л. Эйлера, сумму расходящегося ряда, чтобы в случае классического решения эта сумма и была бы этим решением.

Задача с использованием расходящихся рядов была впервые намечена в [15], затем получила развитие в дальнейших исследованиях. Результаты этих исследований представлены в [16–18]; в материалах Саратовской (Саратов, 28 янв. – 1 февр. 2020 г.) [1,2] и Воронежской (Воронеж, 3–9 мая 2020 г.)[3,4] школ; в [19; 20].

В настоящей статье метод расходящихся рядов формальных решений применяется для получения обобщенного решения двух однородных задач для волнового уравнения с различными краевыми условиями. Приведены необходимые доказательства при обосновании положений метода. Достоинство излагаемого здесь метода заключается в том, что он быстро приводит к формулировке конечного результата и при строгом обосновании обладает большой экономичностью в использовании известных математических фактов, тем самым упрощая соответствующие доказательства.

1. Смешанная задача в случае закрепленных концов

1.1. Метод исследования ряда формального решения

Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad x,t \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{1.1}$$

при условиях

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{1.3}$$

[1]Курдюмов В. П., Хромов А. П. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения с нулевой начальной скоростью и однопорядковыми граничными условиями с производной. С. 225–228.

[2]Ломов И. С. Метод А. П. Хромова решения смешанной задачи для гиперболического уравнения. Обобщенная формула Даламбера. С. 231–236.

[3]Корнев В. В., Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщенное решение одной смешанной задачи для волнового уравнения. С. 113–117.

[4]Ломов И. С. Обобщенная формула Даламбера для телеграфного уравнения в случае существенно несамосопряженного оператора. С. 137–139.

где все функции, входящие в (1.1)–(1.3), комплекснозначные, причем $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ из $L[0,1]$, $f(x,t)\in L[Q_T]$, $Q_T=[0,1]\times[0,T]$ при любом $T>0$.

Под классическим решением понимаем функцию $u(x,t)$, непрерывную вместе с $u'_x(x,t)$ и $u'_t(x,t)$, причем $u'_x(x,t)$ ($u'_t(x,t)$) абсолютно непрерывна по x (по t), удовлетворяющую условиям (1.2), (1.3) и почти всюду — уравнению (1.1). Поэтому в случае классического решения задачи (1.1)–(1.3) необходимо считать, что $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$ абсолютно непрерывны и

$$\varphi(0)=\varphi(1)=\psi(0)=\psi(1)=0.$$

Формальное решение по методу Фурье возьмем в виде (см. [11])

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\Bigg(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Bigg)\Big[(R_\lambda\varphi)\cos\rho t+(R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho}$$
$$+\int\limits_0^t R_\lambda(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\Big]\,d\lambda. \tag{1.4}$$

Здесь $R_\lambda=(L-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L: $Ly=-y''(x)+q(x)y(x)$, $y(0)=y(1)=0$, λ — спектральный параметр, E — единичный оператор, $R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ означает, что R_λ применяется к $f(x,\tau)$ по переменной x (τ — параметр), $\lambda=\rho^2$, $\operatorname{Re}\rho\geq 0$, γ_n — образ в λ-плоскости окружности $\tilde\gamma_n=\{\rho\,|\,|\rho-n\pi|=\delta\}$, $\delta>0$ и достаточно мало, $r>0$ достаточно велико и фиксировано, n_0 — такой номер, что при $n\geq n_0$ внутри γ_n находится по одному собственному значению оператора L и все γ_n при $n\geq n_0$ находятся вне круга радиуса $|\lambda|=r$, а остальные собственные значения — внутри.

Теорема 1 [11, теорема 1]. *Если* $u(x,t)$ *— классическое решение задачи* (1.1)–(1.3), *причем дополнительно* $\partial^2u(x,t)/\partial t^2\in L[Q_T]$ *при любом* $T>0$, *то оно единственно и находится по формуле* (1.4), *в которой ряд справа при любом фиксированном* $t>0$ *сходится абсолютно и равномерно по* $x\in[0,1]$.

З а м е ч а н и е 1. В формуле (1.4) мы используем резольвентный подход, связанный с методом Коши — Пуанкаре контурного интегрирования резольвенты по спектральному параметру. Он имеет преимущество по сравнению с традиционным методом разделения переменных, поскольку не требует ни уточнения асимптотики собственных значений, ни информации о кратности спектра или о наличии присоединенных функций.

Отметим, что вид (1.4) формального решения не нов (схожие формулы имеются, например, в [21; 22]).

З а м е ч а н и е 2. Вид контуров интегрирования в (1.4) может быть и иным. Главное здесь, что все собственные значения оператора L находятся в объединении областей, охватываемых этими контурами.

З а м е ч а н и е 3. Теорема 1 справедлива и тогда, когда вместо условий (1.2) берутся любые другие линейные, однородные относительно $u(0,t)$, $u(1,t)$, $u'_x(0,t)$, $u'_x(1,t)$ и удовлетворяющие условиям регулярности Биркгофа для оператора L.

Дальше мы вкратце изложим наши исследования с использованием расходящихся рядов. Теорема 1 говорит о том, что формальный ряд (1.4) и смешанная задача (1.1)–(1.3) тесно связаны. Расширим понятие этой связи.

Правая часть (1.4) имеет смысл для любых интегрируемых $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,t)\in L[Q_T]$ при любых $T>0$. В этом случае мы будем говорить, что (1.4) также является формальным решением смешанной задачи (1.1)–(1.3), понимаемой чисто формально. Будем называть ее в дальнейшем обобщенной смешанной задачей.

Таким образом, мы сначала определяем формальное решение (1.4), которое теперь выглядит как реальный объект (несмотря на то, что ряд (1.4), вообще говоря, расходящийся), и заключаем, что он соответствует новой смешанной задаче (обобщенной) (1.1)–(1.3). То есть и здесь мы устанавливаем связь смешанной задачи с рядом (1.4).

Мы будем производить преобразования расходящихся формальных рядов, схожие с теми, которыми пользовался А. Н. Крылов [2] для ускорения сходимости тригонометрических рядов Фурье. При этом важную роль здесь играет вышеупомянутая жесткая связь этих рядов с соответствующими смешанными задачами [16; 17].

Приведем необходимую для понимания информацию о расходящихся рядах. Рассмотрим простейшее функциональное уравнение

$$y(x) = 1 + xy(x). \tag{1.5}$$

Для простоты считаем x вещественным. Из (1.5) получаем следующее формальное решение:

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \ldots . \tag{1.6}$$

Пусть $|x| < 1$. Тогда ряд (1.6) сходится, и его сумма есть

$$y(x) = \frac{1}{1-x}, \tag{1.7}$$

т. е. (1.7) есть решение (1.5) в этом случае. Но формула (1.7) имеет смысл при всех x, кроме $x = 1$. Воспользуемся этим.

Пусть $|x| > 1$. Тогда ряд (1.6) расходящийся, и его сумму как предел частичных сумм найти мы не можем. Но тогда разумно определить эту сумму как решение уравнения (1.5) по формуле (1.7). Таким образом, сумма ряда (1.6) определяется решением уравнения (1.5) при всех x, кроме $x = 1$.

Пусть $x = -1$. В этом случае ряд (1.6), т. е. ряд $1-1+1-\ldots$, расходящийся, но мы считаем, что его сумма есть $1/2$ (что логично предположить из (1.7)), и в этом случае она представляет обобщенное решение уравнения (1.5) (т. е. если в (1.6) положим $x = x_n$, где $|x_n| < 1$, то при $x_n \to -1+0$ суммы соответствующих рядов в (1.6) сходятся к $1/2$).

Пусть $x = 1$. Тогда ряд $1+1+\ldots$ в силу (1.7) имеет сумму, равную $+\infty$, если его получить из (1.7) при $x \to 1-0$, и $-\infty$, если $x \to 1+0$, т. е. сумма расходящегося ряда принимает два значения.

Вывод. Таким образом, ряд (1.6) в новом понимании дает решение уравнения (1.5) при всех x, кроме $x = 1$, а при $x = 1$ уравнение (1.5) не имеет решения.

Отметим еще формулу

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

также приводящую к ряду (1.6).

Вышеизложенное, за исключением (1.5), есть у Л. Эйлера в его книге [13, с. 99–100]. Здесь мы не приводим слова Эйлера [13, с. 100–101] о его понимании расходящихся рядов и их сумм — эта цитата полностью воспроизведена в [15; 18]. Отметим еще книгу Г. Харди [14, с. 14–19] с обширной информацией о расходящихся рядах.

Продолжаем наши рассуждения о смешанной задаче. Они имеют много схожего с выше приведенными о расходящихся рядах.

Рассмотрим ради простоты изложения в качестве исходной следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x,t \in [0,1]\times[0,\infty), \tag{1.8}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{1.9}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0. \tag{1.10}$$

В пользу такой задачи говорит и следующее рассуждение из [18, с. 435–436]. Обозначим через $Z(x,t;\varphi)$ ряд (1.4) при $\psi(x)=0$, $f(x,t)=0$. Тогда, используя расходящиеся ряды в понимании Эйлера, мы преобразуем формальное решение (1.4) к виду

$$u(x,t)=Z(x,t;\varphi)+\int\limits_0^t Z(x,\tau;\psi)\,d\tau+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{t-\tau} Z(x,\eta;f(\cdot,\tau))\,d\eta. \tag{1.11}$$

Достоинство (1.11) в том, что мы имеем теперь дело лишь с задачей (1.8)–(1.10) для различного вида $\varphi(x)$.

З а м е ч а н и е 4. Формула (1.11) не совсем ясна, ибо второе и третье слагаемые — не ряды, и здесь мы имеем дело с новым определением: $\int\sum\overset{df}{=}\sum\int$.

Итак, берем ряд (1.4) в случае задачи (1.8)–(1.10). Представляем его в виде

$$u(x,t)=u_{01}(x,t)+u_1(x,t), \tag{1.12}$$

где $u_{01}(x,t)$ есть ряд (1.4), в котором R_λ заменено на $R_\lambda^0=(L_0-\lambda E)^{-1}$, L_0 есть L при $q(x)\equiv 0$. По теореме вычетов имеем

$$u_{01}(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi,\sin n\pi\xi)\sin n\pi x\cos n\pi t, \tag{1.13}$$

где $(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Ряд (1.13) легко преобразуется к виду

$$u_{01}(x,t)=\Sigma_++\Sigma_-, \tag{1.14}$$

где $\Sigma_\pm=\sum_{n=1}^\infty(\varphi,\sin n\pi\xi)\sin n\pi(x\pm t)$. Ряд $2\sum_{n=1}^\infty(\varphi,\sin n\pi\xi)\sin n\pi x$ есть ряд Фурье функции $\varphi(x)\in L[0,1]$ и в случае его равномерной сходимости имеет сумму $\tilde\varphi(x)$ при всех $x\in(-\infty,\infty)$, где $\tilde\varphi(x)$ 2-периодическая, нечетная и $\tilde\varphi(x)=\varphi(x)$ при $x\in[0,1]$. Поэтому в случае расходимости рядов $\Sigma_\pm$ (а в силу примера А. Н. Колмогорова такие случаи возможны) мы по определению будем считать, что сумма ряда (1.14) или, что эквивалентно, (1.13) есть

$$u_{01}(x,t)=\frac{1}{2}[\tilde\varphi(x+t)+\tilde\varphi(x-t)]. \tag{1.15}$$

Правая часть (1.15) имеет смысл при любых $x,t\in(-\infty,\infty)\times[0,\infty)$ и похожа на решение задачи (1.8)–(1.10) при $q(x)=0$ (т. е. при $\tilde\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемой она действительно является решением указанной задачи). Обозначим эту правую часть $a_0(x,t)$.

Тогда $u_1(x,t)$ соответствует задаче

$$\frac{\partial^2u_1(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u_1(x,t)}{\partial x^2}-q(x)u_1(x,t)+f_0(x,t), \tag{1.16}$$

$$u_1(0,t)=u_1(1,t)=0, \tag{1.17}$$

$$u_1(x,0)=u'_{1t}(x,0)=0, \tag{1.18}$$

где $f_0(x,t)=-q(x)a_0(x,t)$. Поэтому от ряда для $u_1(x,t)$ из (1.12) перейдем в силу (1.16)–(1.18) к формальному ряду для (1.16)–(1.18), т. е. к ряду

$$u_1(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\Bigg(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Bigg)\int\limits_0^t R_\lambda(f_0(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda. \tag{1.19}$$

Этот переход является главным моментом нашей процедуры. Здесь и нужна обобщенная смешанная задача. Отметим, что в случае классического решения этот прием законен.

Представим теперь ряд (1.19) в виде

$$u_1(x,t) = u_{02}(x,t) + u_2(x,t),$$

где $u_{02}(x,t)$ есть (1.19), в котором R_λ заменено на R_λ^0. По теореме вычетов имеем

$$u_{02}(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t (f_0(\xi,\tau), \sin n\pi\xi)\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x \sin n\pi(t-\tau)\,d\tau. \tag{1.20}$$

Используя формулу

$$\int_0^x \sin n\pi\eta\,d\eta = \frac{1}{n\pi}[1-\cos n\pi x],$$

получим

$$u_{02}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t (f_0(\xi,\tau), \sin n\pi\xi)\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\sin n\pi\eta\,d\eta\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} 2\sum_{n=1}^{\infty}(f_0(\xi,\tau), \sin n\pi\xi)\sin n\pi\eta\,d\eta = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde{f}_0(\eta,\tau)\,d\eta.$$

Здесь $\tilde{f}_0(\eta,\tau)$ нечетна, 2-периодична по η и $\tilde{f}_0(\eta,\tau) = f_0(\eta,\tau)$ при $\eta\in[0,1]$.

Далее рассуждаем, как и выше. Ряд $u_2(x,t)$ из (1.20) в силу (1.19) соответствует задаче (1.16)–(1.18), где вместо $f_0(x,t)$ берется теперь $f_1(x,t) = -q(x)a_1(x,t)$,

$$a_1(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde{f}_0(\eta,\tau)\,d\eta,$$

и продолжаем этот процесс до бесконечности.

В итоге от ряда (1.4) для задачи (1.8)–(1.10) приходим к ряду $A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t)$, где $a_0(x,t)$ определена выше,

$$a_n(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)\,d\eta, \quad n\ge 1,$$

и $f_n(x,t) = -q(x)a_n(x,t)$.

Эти операции с расходящимися рядами взяты из [16–18].

Заметим, что ряд $A(x,t)$ при $q(x)\in C^1[0,1]$, других граничных условиях и без использования метода Фурье есть в [23, с. 83].

Лемма 1. *Пусть T — произвольное положительное число, m — наименьшее натуральное число такое, что $T\le m$; $\varphi(x)\in L[0,1]$, $Q_T = [0,1]\times[0,T]$. Тогда справедлива оценка*

$$\|a_n(x,t)\|_{C[Q_T]} \le M_1\Big(\frac{M_2}{2}\Big)^{n-1}\frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n\ge 1),$$

где $M_1 = \|a_1(x,t)\|_{C[Q_T]}$, $M_2 = (2m+1)\|q\|_1$ ($\|\cdot\|_1$ — норма в $L[0,1]$). Кроме того, $M_1\le C_T\|\varphi\|_1$ и постоянная C_T не зависит от $\varphi(x)$.

Для случая $\varphi(x)$, удовлетворяющей условиям классического решения, эта лемма содержится в [11]. Доказательство дословно сохраняется и при $\varphi(x) \in L[0,1]$.

Доказательство. Очевидно, что $f_n(x,t) \in L[Q_T]$, $a_n(x,t) \in C[Q_T]$ $(n \geq 1)$ и при $n = 1$ оценка

$$|a_n(x,t)| \leq M_1 \Big(\frac{M_2}{2}\Big)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \tag{1.21}$$

выполняется. Предположим, что она выполняется при некотором n. Докажем, что она выполняется и для $n+1$.

Имеем

$$|a_{n+1}(x,t)| \leq \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} |\tilde{f}_n(\eta,\tau)|\,d\eta$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-m}^{m+1} |\tilde{f}_n(\eta,\tau)|\,d\eta \leq \frac{2m+1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^1 |q(\eta)|\,|a_n(\eta,\tau)|\,d\eta$$

$$\leq \frac{2m+1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^1 |q(\eta)| M_1 \left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\,d\eta = M_1 \left(\frac{M_2}{2}\right)^n \frac{t^n}{n!}\,.$$

Следовательно, оценка (1.21) верна при любом $n > 1$. Оценим M_1. Имеем

$$|a_1(x,t)| \leq \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} |\tilde{f}_0(\eta,\tau)|\,d\eta \leq \frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau \int\limits_{-m}^{m+1} |\tilde{f}_0(\eta,\tau)|\,d\eta = \frac{2m+1}{2}\int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^1 |f_0(\eta,\tau)|\,d\eta$$

$$\leq \frac{2m+1}{2}\int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^1 |q(\eta)|\frac{1}{2}\left(|\tilde{\varphi}(\eta+\tau)| + |\tilde{\varphi}(\eta-\tau)|\right)\,d\eta \leq \frac{2m+1}{2}\int\limits_0^1 |q(\eta)|\,d\eta \int\limits_{-T}^{T+1} |\tilde{\varphi}(\tau)|\,d\tau$$

$$\leq \frac{2m+1}{2}\int\limits_0^1 |q(\eta)|\,d\eta \int\limits_{-m}^{m+1} |\tilde{\varphi}(\tau)|\,d\tau = \frac{(2m+1)^2}{2}\|q\|_1\|\varphi\|_1\,.$$

Отсюда вытекает требуемая оценка для M_1. □

Из леммы 1 следует

Теорема 2. *Если $\varphi(x) \in L[0,1]$, то ряд $A(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T при любом $T > 0$ с экспоненциальной скоростью.*

Мы по определению считаем, что $A(x,t)$ есть решение обобщенной смешанной задачи.

1.2. Обоснование метода

В этом подразделе показываем, что в случае классического решения задачи (1.8)–(1.10) оно представляется рядом $A(x,t)$, полученным в подразделе 1.1. Более того, с помощью этого ряда будут найдены необходимые и достаточные условия существования классического решения.

Теорема 3 [11, теорема 5]. *Если $u(x,t)$ — классическое решение задачи* (1.8)–(1.10) *такое, что $\partial^2 u(x,t)/\partial t^2 \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$, то*

$$u(x,t) = A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t). \tag{1.22}$$

При этом ряд сходится абсолютно и равномерно по $x, t \in Q_T$.

Теорема 4 [11, теорема 6]. *Если функции $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, то сумма $A(x,t)$ ряда* (1.22) *представляет собой классическое решение задачи* (1.8)–(1.10) *с условием $\partial^2 u(x,t)/\partial t^2 \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$.*

О необходимости условий этой теоремы см. в [11, с. 717–718].

Теорема 5. *Если $\varphi(x) \in L[0,1]$, $\varphi_h(x)$ удовлетворяет условиям теоремы* 4, *$\|\varphi_h - \varphi\|_1 \to 0$ при $h \to 0$, то соответствующее $\varphi_h(x)$ классическое решение $u_h(x,t)$ задачи* (1.8)–(1.10) *сходится при $h \to 0$ по норме $L[Q_T]$ к $A(x,t)$.*

Утверждение теоремы следует из линейности $A(x,t)$ по $\varphi(x)$ и леммы 1. □

Таким образом, классическое решение задачи (1.8)–(1.10) и решение обобщенной задачи выражаются одной и той же формулой, и $A(x,t)$ в случае $\varphi(x) \in L[0,1]$ играет роль обобщенного решения, понимаемого как предел классических.

Ранее в [7], не прибегая к расходящимся рядам, мы получили следующие результаты.

Теорема 6 [7, теорема 9]. *Если функции $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $L\varphi = -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) \in L_p[0,1]$ $(p > 1)$, то сумма ряда $Z(x,t;\varphi)$ формального решения задачи* (1.8)–(1.10) *является классическим решением.*

Теорема 7 [7, теорема 10]. *Если $\varphi(x) \in L_p[0,1]$ $(p > 1)$, то ряд $Z(x,t;\varphi)$ сходится почти всюду. Более того, если $\varphi_h(x)$ удовлетворяет условиям теоремы* 6 *и $\|\varphi_h - \varphi\|_p \to 0$ при $h \to 0$ ($\|\cdot\|_p$ — норма в $L_p[0,1]$), то соответствующие классические решения $u_h(x,t)$ сходятся в $L_p[Q_T]$ при любом $T > 0$ к $u(x,t) = Z(x,t;\varphi)$, т. е. $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи* (1.8)–(1.10).

В получении теорем 6 и 7 существенно используются пример Колмогорова, теорема Карлесона — Ханта и другие глубокие факты действительного анализа.

Отсюда видно, что применение расходящихся рядов в понимании Эйлера приводит к результатам окончательного характера (теоремы 4 и 5) более глубоким, чем теоремы 6 и 7.

2. Смешанная задача в случае граничных условий, содержащих производные

В этом разделе займемся изучением следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{2.1}$$

$$U_1(u) = u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0, \tag{2.2}$$

$$U_2(u) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0, \tag{2.3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0. \tag{2.4}$$

Здесь $q(x) \in L[0,1]$, α_1, β_1, α_2, β_2 — произвольные комплексные числа.

Формальное решение по теореме 1 с учетом замечания 3 есть

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\biggl(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \ge n_0} \int\limits_{\gamma_n}\biggr)(R_\lambda \varphi)\cos\rho t\, d\lambda\,, \tag{2.5}$$

где контуры интегрирования те же, что и в (1.4), а $Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$, $U_1(y) = y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0$, $U_2(y) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0$.

2.1. О продолжении интегрируемой функции с отрезка на вещественную ось

Рассмотрим задачу (2.1)–(2.4) в случае $q(x) = 0$. В [6] при $U_j(\varphi) = 0$ $(j = 1, 2)$ получена

Теорема 8 [6, теорема 7, усл. п. 3., с. 247]. *Если $\varphi(x) \in W_2^2[0, 1]$, то классическое решение задачи (2.1)–(2.4) при $q(x) = 0$ существует (уравнение (2.1) удовлетворяется почти всюду) и выполняется условие единственности: $\partial^2 u(x, t)/\partial t^2 \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$.*

Замечание 5. Условия единственности в теореме 7 в [6] нет, но оно тривиально вытекает из текста статьи [6].

По теореме 1 с учетом замечания 3 для решения смешанной задачи в условиях теоремы 8 справедлива формула (2.5) с заменой R_λ на R^0_λ, и ряд сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном t. Отсюда, используя лемму 20 из [6] для данного вида краевых условий, ряду, получающемуся из (2.5) заменой R_λ на R^0_λ и рассматриваемому теперь как расходящийся, назначаем сумму

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde\varphi(x + t) + \tilde\varphi(x - t)], \tag{2.6}$$

где $\tilde\varphi(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0, 1]$, а для других x точно определена в этом подразделе ниже.

Допустим, что $\tilde\varphi(x) \in C^1(-\infty, \infty)$. Подставляя (2.6) в краевые условия (2.2), (2.3), получим следующую систему уравнений (в которой t заменяем на x):

$$\tilde\varphi'(x) + \tilde\varphi'(-x) + \alpha_1[\tilde\varphi(x) + \tilde\varphi(-x)] + \beta_1[\tilde\varphi(1 + x) + \tilde\varphi(1 - x)] = 0, \tag{2.7}$$

$$\tilde\varphi'(1 + x) + \tilde\varphi'(1 - x) + \alpha_2[\tilde\varphi(x) + \tilde\varphi(-x)] + \beta_2[\tilde\varphi(1 + x) + \tilde\varphi(1 - x)] = 0, \tag{2.8}$$

$$\tilde\varphi(x) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1]. \tag{2.9}$$

Здесь в (2.7), (2.8) $x \in [0, \infty)$ и $\tilde\varphi'(\psi(x)) = \tilde\varphi'(y)$, $y = \psi(x)$.

Теорема 9. *Имеет место формула*

$$(\tilde\varphi(-x), \tilde\varphi(1 + x))^T = (\tilde\varphi(x), \tilde\varphi(1 - x))^T + 2M \int\limits_0^x e^{M(x-t)}(\tilde\varphi(t), \tilde\varphi(1 - t))^T dt, \quad x \in [0, \infty), \tag{2.10}$$

где T — знак транспонирования, $M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\alpha_2 & -\beta_2 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Положим $Y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, где $y_1(x) = \tilde\varphi(-x)$, $y_2(x) = \tilde\varphi(1 + x)$. Тогда система (2.7)–(2.9) примет вид

$$Y'(x) = MY(x) + F(x), \tag{2.11}$$

$$Y(0) = (\tilde\varphi(0), \tilde\varphi(1))^T, \tag{2.12}$$

где $F(x) = (\tilde\varphi'(x) + \alpha_1\tilde\varphi(x) + \beta_1\tilde\varphi(1 - x), -\tilde\varphi'(1 - x) - \alpha_2\tilde\varphi(x) - \beta_2\tilde\varphi(1 - x))^T$.

Решая задачу Коши (2.11), (2.12), получим

$$Y(x) = e^{Mx}Y(0) + \int\limits_0^x e^{M(x-t)}F(t)\,dt.$$

Далее, имеем

$$(\tilde\varphi'(t), -\tilde\varphi'(1 - t))^T = \frac{d}{dt}(\tilde\varphi(t), \tilde\varphi(1 - t))^T.$$

Поэтому

$$\int_0^x e^{M(x-t)}\frac{d}{dt}(\tilde\varphi(t),\tilde\varphi(1-t))^T dt$$

$$= e^{M(x-t)}(\tilde\varphi(t),\tilde\varphi(1-t))^T\Big|_0^x - \int_0^x\Big(\frac{d}{dt}e^{M(x-t)}\Big)(\tilde\varphi(t),\tilde\varphi(1-t))^T\,dt$$

$$= (\tilde\varphi(x),\tilde\varphi(1-x))^T - e^{Mx}(\tilde\varphi(0),\tilde\varphi(1))^T + \int_0^x Me^{M(x-t)}(\tilde\varphi(t),\tilde\varphi(1-t))^T\,dt.$$

Так как $F(x)=(\tilde\varphi'(x),-\tilde\varphi'(1-x))^T + M(\tilde\varphi(x),\tilde\varphi(1-x))^T$, то

$$Y(x)=e^{Mx}Y(0)+(\tilde\varphi(x),\tilde\varphi(1-x))^T - e^{Mx}(\tilde\varphi(0),\tilde\varphi(1))^T$$

$$+\,2M\int_0^x e^{M(x-t)}(\tilde\varphi(t),\tilde\varphi(1-t))^T\,dt = (\tilde\varphi(x),\tilde\varphi(1-x))^T + 2M\int_0^x e^{M(x-t)}(\tilde\varphi(t),\tilde\varphi(1-t))^T\,dt,$$

т. е. пришли к (2.10). □

Будем теперь рассматривать формулу (2.10), считая, что $(\tilde\varphi(x),\tilde\varphi(1-x))^T=(\varphi(x),\varphi(1-x))^T$ при $x\in[0,1]$ и $\varphi(x)$ — произвольная функция из $L[0,1]$. Равенство (2.10) дает однозначное продолжение $\tilde\varphi(x)$ произвольной функции $\varphi(x)\in L[0,1]$ на всю ось $(-\infty,\infty)$. Займемся изучением этого продолжения.

Теорема 10. *Пусть $0\le t\le x\le a$. Существует постоянная $d_a>0$, не зависящая от $q(x)$ и $\varphi(x)$ из $L[0,1]$, такая, что имеет место неравенство*

$$|\tilde\varphi(-x)|+|\tilde\varphi(1+x)| \le |\tilde\varphi(x)|+|\tilde\varphi(1-x)| + 2d_a\int_0^x(|\tilde\varphi(t)|+|\tilde\varphi(1-t)|)\,dt. \tag{2.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $a_{ij}(x,t)$ $(i,j=1,2)$ компоненты матрицы $2Me^{M(x-t)}$. В качестве d_a возьмем любую константу, удовлетворяющую при $0\le t\le x\le a$ неравенствам $|a_{ij}(x,t)|\le d_a$ $(i,j=1,2)$. Проводя с учетом этого очевидные оценки компонент из (2.10) и сложив их, придем к (2.13). □

Лемма 2. *Пусть $a\ge 2$ и n — наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $n+1\le a$. Тогда имеет место оценка*

$$\int_{-n}^{n+1}|\tilde\varphi(x)|\,dx \le (3+4d_a)^n\|\varphi\|_1. \tag{2.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $x\in[0,1]$. По теореме 10 имеем

$$|\tilde\varphi(-x)|+|\tilde\varphi(1+x)| \le |\varphi(x)|+|\varphi(1-x)|+2d_a\int_0^x(|\varphi(t)|+|\varphi(1-t)|)\,dt.$$

Отсюда

$$\int_0^1|\tilde\varphi(-x)|\,dx+\int_0^1|\tilde\varphi(1+x)|\,dx \le 2\|\varphi\|_1 + 2d_a\int_0^1(|\varphi(t)|+|\varphi(1-t)|)\,dt = (2+4d_a)\|\varphi\|_1. \tag{2.15}$$

Но

$$\int\limits_0^1 |\tilde\varphi(-x)|\,dx + \int\limits_0^1 |\tilde\varphi(1+x)|\,dx = \int\limits_{-1}^0 |\tilde\varphi(x)|\,dx + \int\limits_1^2 |\tilde\varphi(x)|\,dx.$$

Поэтому из (2.15) следует (2.14) при $n = 1$.

Пусть теперь $x \in [1,2]$. Тогда аналогично вышеизложенному получаем

$$\int\limits_1^2 (|\tilde\varphi(-x)| + |\tilde\varphi(1+x)|)\;dx \le \int\limits_1^2 (|\tilde\varphi(x)| + |\tilde\varphi(1-x)|)\;dx + 2d_a \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^x (|\tilde\varphi(t)| + |\tilde\varphi(1-t)|)\;dt$$
$$\le \int\limits_1^2 |\tilde\varphi(x)|\,dx + \int\limits_{-1}^0 |\tilde\varphi(x)|\,dx + 2d_a\Bigg(\int\limits_0^2 |\tilde\varphi(t)|\,dt + \int\limits_{-1}^1 |\tilde\varphi(t)|\,dt\Bigg). \tag{2.16}$$

Так как $\int_1^2 |\tilde\varphi(-x)|\,dx + \int_1^2 |\tilde\varphi(1+x)|\,dx = \int_{-2}^{-1} |\tilde\varphi(x)|\,dx + \int_2^3 |\tilde\varphi(x)|\,dx$, то из (2.16), используя оценку (2.14) при $n = 1$, выводим

$$\int\limits_{-2}^3 |\tilde\varphi(x)|\,dx \le 2\int\limits_1^2 |\tilde\varphi(x)|\,dx + \int\limits_{-1}^0 |\tilde\varphi(x)|\,dx + 2d_a\Bigg(\int\limits_0^2 |\tilde\varphi(t)|\,dt + \int\limits_{-1}^1 |\tilde\varphi(t)|\,dt\Bigg)$$
$$\le [2(3+4d_a) + (3+4d_a) + 2d_a(3+4d_a) + 2d_a(3+4d_a)]\,\|\varphi\|_1$$
$$= (3+4d_a)(2+1+4d_a)\|\varphi\|_1 = (3+4d_a)^2\|\varphi\|_1,$$

т. е. получаем (2.14) при $n = 2$. Продолжая этот процесс при $x \in [2,3]$, затем при $x \in [3,4]$ и так далее, придем к (2.14). □

2.2. Метод исследования ряда формального решения

Возвращаемся к смешанной задаче (2.1)–(2.4). Построение ряда $A(x,t)$ в этом случае имеет свои особенности, связанные с тем, что мы не прибегаем к вычетам при изучении формального решения. Итак, пусть $\varphi(x) \in L[0,1]$. Ряд (2.5) в этом случае рассматриваем как расходящийся. Представим его в виде

$$u(x,t) = u_{01}(x,t) + u_1(x,t), \tag{2.17}$$

где $u_{01}(x,t)$ есть ряд (2.5) с заменой R_λ на $R^0_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}$, L_0 есть L при $q(x) \equiv 0$.

Расходящемуся ряду $u_{01}(x,t)$ на основании теоремы 8, (2.4) и (2.6) приписываем сумму

$$u_{01}(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde\varphi(x+t) + \tilde\varphi(x-t)]. \tag{2.18}$$

Правая часть (2.18) имеет смысл при любых $(x,t) \in (-\infty,\infty) \times [0,\infty)$. Обозначим ее $a_0(x,t)$. Так как $a_0(x,t)$ — обобщенное решение задачи (2.1)–(2.4) при $q(x) = 0$, то $u_1(x,t)$ соответствует задаче

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u_1(x,t) + f_0(x,t), \quad x,t \in [0,1]\times[0,\infty), \tag{2.19}$$
$$U_j(u_1) = 0, \quad j = 1,2, \tag{2.20}$$
$$u_1(x,0) = u'_{1t}(x,0) = 0, \tag{2.21}$$

где $f_0(x,t) = -q(x)a_0(x,t)$.

Формальное решение по методу Фурье задачи (2.19)–(2.21) есть

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)\int\limits_0^t R_\lambda(f_0(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda\,, \qquad (2.22)$$

где $R_\lambda(f_0(\cdot,\tau))$ означает, что R_λ применяется к $f_0(x,\tau)$ по переменной x (τ — параметр). Тем самым мы совершили переход от расходящегося ряда для $u_1(x,t)$ из (2.17) к расходящемуся ряду (2.22).

Подобно (2.17) представим ряд (2.22) в виде

$$u_1(x,t) = u_{02}(x,t) + u_2(x,t), \qquad (2.23)$$

где $u_{02}(x,t)$ — ряд (2.22) с заменой R_λ на R^0_λ. Так как $\rho^{-1}\sin\rho(t-\tau) = \int_0^{t-\tau}\cos\rho\eta\,d\eta$, то ряд $u_{02}(x,t)$ преобразуется опять как расходящийся ряд к виду

$$u_{02}(x,t) = \int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{t-\tau} Z_0(x,\eta;f_0(\cdot,\tau))\,d\eta,$$

где $Z_0(x,t;f_0(\cdot,\tau))$ — формальное решение задачи (2.1)–(2.4) при $q(x)=0$, $\varphi(x)=f_0(x,\tau)$. По формуле (2.18)

$$Z_0(x,\eta;f_0(\cdot,\tau)) = \frac{1}{2}\big[\tilde f_0(x+\eta,\tau) + \tilde f_0(x-\eta,\tau)\big].$$

Здесь $\tilde f(\eta,\tau)$ есть продолжение $f_0(\eta,\tau)$ по η (τ — параметр).

В результате получаем следующую сумму ряда $u_{02}(x,t)$:

$$u_{02}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{t-\tau}[\tilde f_0(x+\eta,\tau) + \tilde f_0(x-\eta,\tau)]\,d\eta = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde f_0(\eta,\tau)\,d\eta. \qquad (2.24)$$

Функцию $u_{02}(x,t)$, определенную при $(x,t)\in(-\infty,\infty)\times[0,\infty)$, обозначим $a_1(x,t)$.

Продолжаем наш процесс. Ряд $u_2(x,t)$ из (2.23) есть

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)\int\limits_0^t \big(R_\lambda(f_0(\cdot,\tau)) - R^0_\lambda(f_0(\cdot,\tau))\big)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda\,, \qquad (2.25)$$

а смешанная задача для $u_2(x,t)$ получается из задачи (2.19)–(2.21) заменами $u_1(x,t)$ на $u_2(x,t)$ и $f_0(x,t)$ на $f_1(x,t) = -q(x)a_1(x,t)$ ($a_1(x,t)$ есть $u_{02}(x,t)$ из (2.24)). Поэтому ряд (2.25) заменяем на формальное решение смешанной задачи для $u_2(x,t)$, т. е. на ряд

$$-\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)\int\limits_0^t R_\lambda(f_1(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda\,,$$

и дальше производим такие же действия, как с рядом $u_1(x,t)$. Продолжаем этот процесс шаг за шагом, держа жесткую связь: смешанная задача — ее формальное решение.

В итоге приходим к ряду

$$A(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x,t),$$

где

$$a_0(x,t)=\frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t)+\tilde{\varphi}(x-t)],\quad a_m(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde{f}_{m-1}(\eta,\tau)\,d\eta\quad(m\geq 1),$$
$$f_m(x,t)=-q(x)a_m(x,t),$$

т. е. к форме такой же, как и для закрепленных концов.

Приступаем к исследованию этого ряда. Считаем, что $x,t\in Q_T$. Берем a в лемме 2 настолько большим, чтобы выполнялось $n\geq T$.

Лемма 3. *Функции $a_m(x,t)$ при $m\geq 1$ непрерывны по x и t из Q_T, причем справедливы оценки*

$$|a_m(x,t)|\leq C_T^{m+1}\|q\|_1^m\|\varphi\|_1\frac{t^{m-1}}{(m-1)!},\tag{2.26}$$

где $C_T=(1/2)(3+4d_a)^n$ из леммы 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непрерывность $a_m(x,t)$ при $m\geq 1$ очевидна. Пусть $m=1$. Тогда, так как $\tilde{f}_0(\eta,\tau)=f_0(\eta,\tau)=-q(\eta)a_0(\eta,\tau)$ при $\eta\in[0,1]$, то

$$\begin{aligned}|a_1(x,t)|&\leq\frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau\int\limits_{-T}^{T+1}|\tilde{f}_0(\eta,\tau)|\,d\eta\leq C_T\int\limits_0^T d\tau\int\limits_0^1|q(\eta)||a_0(\eta,\tau)|\,d\eta\\
&\leq\frac{1}{2}C_T\int\limits_0^1|q(\eta)|\,d\eta\int\limits_0^T(|\tilde{\varphi}(\eta+\tau)|+|\tilde{\varphi}(\eta-\tau)|)\,d\tau=\frac{C_T}{2}\int\limits_0^1|q(\eta)|\,d\eta\int\limits_{\eta-T}^{\eta+T}|\tilde{\varphi}(\xi)|\,d\xi\\
&\leq\frac{C_T}{2}\int\limits_0^1|q(\eta)|\,d\eta\int\limits_{-T}^{T+1}|\tilde{\varphi}(\xi)|\,d\xi\leq\frac{C_T}{2}\|q\|_1\,2C_T\|\varphi\|_1=C_T^2\|q\|_1\|\varphi\|_1.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Пусть $m\geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned}|a_m(x,t)|&\leq\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-T}^{T+1}|\tilde{f}_{m-1}(\eta,\tau)|\,d\eta\leq C_T\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^1|q(\eta)||a_{m-1}(\eta,\tau)|\,d\eta\\
&=C_T\int\limits_0^1|q(\eta)|\,d\eta\int\limits_0^t|a_{m-1}(\eta,\tau)|\,d\tau.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Из (2.28) оценка (2.26) при $m=2$ следует из (2.27).

В общем случае (2.26) получается по индукции из (2.28). □

На основании леммы 3 справедлива

Теорема 11. *Ряд $A(x,t)$ при $x,t\in Q_T$ сходится абсолютно и равномерно с экспоненциальной скоростью.*

Ряд $A(x,t)$ по определению считаем решением обобщенной задачи (2.1)–(2.4). Тем самым это решение представляется в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда при $x,t\in Q_T$.

2.3. Обоснование метода

Наша задача — показать, что в случае классического решения задачи (2.1)–(2.4) ряд $A(x,t)$ и есть такое решение. Ради простоты ограничимся случаем $q(x) \in C[0,1]$.

Под классическим решением задачи (2.1)–(2.4) понимаем функцию $u(x,t)$, непрерывную вместе с производными $u'_x(x,t)$, $u'_t(x,t)$, причем $u'_x(x,t)$ ($u'_t(x,t)$) абсолютно непрерывна по x (по t), удовлетворяющую уравнению (2.1) почти всюду, краевым и граничным условиям.

Тогда мы имеем очевидные необходимые условия классического решения: $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $U_j(\varphi)=0$ $(j=1,2)$.

Привлекаем формулу продолжения (2.9), (2.10).

Лемма 4. *Если* $\varphi(x) \in C[0,1]$, *то* $\tilde\varphi(x) \in C(-\infty,\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в (2.10) $x \in [0,1]$. Тогда в правой части (2.10) вместо $\tilde\varphi(x)$ надо брать $\varphi(x)$, т. е.

$$(\tilde\varphi(-x),\tilde\varphi(1+x))^T = (\varphi(x),\varphi(1-x))^T + 2M\int_0^x e^{M(x-t)}(\varphi(t),\varphi(1-t))^T dt. \tag{2.29}$$

Правая часть (2.29) непрерывна, значит, и левая часть также непрерывна, т. е. $\tilde\varphi(x) \in C[-1,0]$, $\tilde\varphi(x) \in C[0,1]$. Итак, имеем

$$\tilde\varphi(x) \in C([-1,0]\cup[0,1]\cup[1,2]). \tag{2.30}$$

Положим в (2.29) $x=+0$. Получим

$$(\tilde\varphi(-0),\tilde\varphi(1+0))^T = (\varphi(+0),\varphi(1-0))^T, \tag{2.31}$$

т. е. $\tilde\varphi(-0)=\varphi(+0)$, $\tilde\varphi(1+0)=\varphi(1-0)$. Поэтому (2.30) с учетом (2.31) переходит в

$$\tilde\varphi(x) \in C[-1,2]. \tag{2.32}$$

Пусть теперь в (2.10) $x \in [1,2]$. Тогда правая часть (2.10) в силу (2.32) непрерывна. Значит, непрерывна и левая. Отсюда

$$\tilde\varphi(x) \in C([-2,-1]\cup[-1,2]\cup[2,3]). \tag{2.33}$$

Пусть в (2.10) $x=1+0$. Тогда

$$(\tilde\varphi(-1-0),\tilde\varphi(2+0))^T = (\tilde\varphi(1+0),\tilde\varphi(-0))^T + 2M\int_0^1 e^{M(1-t)}(\tilde\varphi(t),\tilde\varphi(1-t))^T dt$$

$$= (\tilde\varphi(1-0),\tilde\varphi(+0))^T + 2M\int_0^1 e^{M(1-t)}(\tilde\varphi(t),\tilde\varphi(1-t))^T dt = (\tilde\varphi(-1+0),\tilde\varphi(2-0))^T,$$

т. е. $\tilde\varphi(x)$ непрерывна в точках -1 и 2. В итоге из (2.33) имеем

$$\tilde\varphi(x) \in C[-2,3]. \tag{2.34}$$

Далее, берем в (2.10) $x \in [2,3]$ и, как в случае $x \in [1,2]$ получаем, что правая часть (2.10) непрерывна. Поэтому и левая часть непрерывна. Значит, $\tilde\varphi(x) \in C[-3,-2]$, $\tilde\varphi(x) \in C[3,4]$ и в сочетании с (2.34) получаем

$$\tilde\varphi(x) \in C([-3,-2]\cup[-2,3]\cup[3,4]). \tag{2.35}$$

Пусть в (2.10) $x = 2 + 0$. Тогда выводим

$$(\tilde{\varphi}(-2-0), \tilde{\varphi}(3+0))^T = (\tilde{\varphi}(2+0), \tilde{\varphi}(-1-0))^T + 2M \int\limits_0^2 e^{M(2-t)} (\tilde{\varphi}(t), \tilde{\varphi}(1-t))^T dt$$

$$= (\tilde{\varphi}(2-0), \tilde{\varphi}(-1+0))^T + 2M \int\limits_0^2 e^{M(2-t)} (\tilde{\varphi}(t), \tilde{\varphi}(1-t))^T dt = (\tilde{\varphi}(-2+0), \tilde{\varphi}(3-0))^T.$$

Следовательно, в силу (2.35)

$$\tilde{\varphi}(x) \in C[-3, 4];$$

и так далее последовательно рассматриваем $x \in [3, 4]$, затем $x \in [4, 5]$ и приходим к утверждению леммы. □

Лемма 5. *Если* $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$, $U_j(\varphi) = 0 \quad (j = 1, 2)$, *то* $\tilde{\varphi}(x) \in C^1(-\infty, \infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о схоже с доказательством леммы 4. Пусть $x \in [0, 1]$. Тогда правая часть (2.29) дифференцируема. Значит, дифференцируема и левая. Проведем это дифференцирование. Получим

$$(-\tilde{\varphi}'(-x), \tilde{\varphi}'(1+x))^T = (\varphi'(x), -\varphi'(1-x))^T + 2M(\varphi(x), \varphi(1-x))^T$$
$$+ 2M^2 \int\limits_0^x e^{M(x-t)} (\varphi(t), \varphi(1-t))^T dt. \tag{2.36}$$

Итак, получили $\tilde{\varphi}(x) \in C^1([-1, 0] \cup [0, 1] \cup [1, 2])$. Положив теперь в (2.36) $x = +0$, имеем

$$(-\tilde{\varphi}'(-0), \tilde{\varphi}'(1+0))^T = (\varphi'(+0), -\varphi'(1-0))^T + 2M(\varphi(0), \varphi(1))^T. \tag{2.37}$$

Первая компонента в левой части (2.37) в силу $U_1(\varphi) = 0$ дает

$$-\tilde{\varphi}'(-0) = -\varphi'(-0) + 2\alpha_1\varphi(0) + 2\beta_1\varphi(1) = \alpha_1\varphi(0) + \beta_1\varphi(1) = -\varphi'(0).$$

Отсюда

$$\tilde{\varphi}'(-0) = \varphi'(0).$$

Вторая компонента (2.37) аналогично дает

$$\tilde{\varphi}'(1+0) = -\varphi'(1-0) + 2(-\alpha_2\varphi(0) - \beta_2\varphi(1)) = -\alpha_2\varphi(0) - \beta_2\varphi(1) = \varphi'(1).$$

Значит,

$$\tilde{\varphi}'(x) \in C^1[-1, 2]. \tag{2.38}$$

Пусть теперь $x \in [1, 2]$. С учетом (2.38) правая часть (2.10) дифференцируема. Следовательно, дифференцируема и левая. Дифференцируем (2.10). Имеем

$$(-\tilde{\varphi}'(-x), \tilde{\varphi}'(1+x))^T = (\tilde{\varphi}'(x), -\tilde{\varphi}'(1-x))^T + 2M(\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(1-x))^T$$
$$+ 2M^2 \int\limits_0^x e^{M(x-t)} (\tilde{\varphi}(t), \tilde{\varphi}(1-t))^T dt. \tag{2.39}$$

Таким образом, $\tilde{\varphi}(x) \in C^1([-2, -1] \cup [-1, 2] \cup [2, 3])$.

Положим в (2.39) $x = 1 + 0$. Тогда

$$(-\tilde{\varphi}'(-1-0), \tilde{\varphi}'(2+0))^T = (\tilde{\varphi}'(1+0), -\tilde{\varphi}'(-0))^T + 2M(\tilde{\varphi}(1+0), \tilde{\varphi}(-0))^T$$

$$+ 2M^2 \int\limits_0^1 e^{M(1-t)} (\tilde{\varphi}(t), \tilde{\varphi}(1-t))^T dt = (\tilde{\varphi}'(1-0), -\tilde{\varphi}'(+0))^T + 2M(\tilde{\varphi}(1-0), \tilde{\varphi}(+0))^T$$

$$+ 2M^2 \int\limits_0^1 e^{M(1-t)} (\tilde{\varphi}(t), \tilde{\varphi}(1-t))^T dt = (-\tilde{\varphi}'(-1+0), \tilde{\varphi}'(2-0))^T,$$

т. е. $\tilde{\varphi}'(-1-0) = \tilde{\varphi}'(-1+0)$, $\tilde{\varphi}'(2+0) = \tilde{\varphi}'(2-0)$. Значит, $\tilde{\varphi}(x) \in C^1[-2,3]$, и так далее. □

Следствие 1. *Если $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и удовлетворяются краевые условия $U_j(\varphi) = 0$ $(j = 1, 2)$, то $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\varphi}'(x)$ абсолютно непрерывны на $(-\infty, \infty)$.*

Теорема 12. *Если $\varphi(x)$ удовлетворяет следствию из леммы 5, то*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)] \tag{2.40}$$

является классическим решением задачи (2.1)–(2.4) при $q(x) = 0$ с условием единственности $\partial^2 u_0(x,t)/\partial t^2 \in L[Q_T]$.

Доказательство. В самом деле, из следствия леммы 5 вытекает, что $u_0(x,t)$ из (2.40) удовлетворяет уравнению (1.21) при $q(x) = 0$ с условием единственности и начальным условиям. Граничные условия также выполняются, ибо они есть (2.7)–(2.8) при замене x на t. □

Рассмотрим следующий член ряда $A(x,t)$:

$$a_1(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_0(\eta, \tau)\, d\eta, \tag{2.41}$$

где $f_0(x,t) = -q(x) a_0(x,t)$.

Теперь у нас $f_0(x,t)$ непрерывна по x и t, причем по t $f_0(x,t)$ абсолютно непрерывна вместе с первой производной $f'_{0t}(x,t)$.

Поскольку дальше комбинации вида $q(\cdot)\, a(\cdot,\cdot)$ используются только при $x, t \in (-\infty, \infty) \times [0, \infty)$, т. е. со знаком $\tilde{}$, то для упрощения записи знак $\tilde{}$ опускаем.

Лемма 6. *Функция $a_1(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x и t, причем*

$$\frac{\partial a_1(x,t)}{\partial t} = J_{11}(x,t) + J_{21}(x,t), \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial a_1(x,t)}{\partial x} = J_{11}(x,t) - J_{21}(x,t), \tag{2.43}$$

где $J_{11}(x,t) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_x^{x+t} \tilde{f}_0(\xi, x+t-\xi)\, d\xi$, $J_{21}(x,t) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{x-t}^{x} \tilde{f}_0(\xi, \xi - x + t)\, d\xi$.

Утверждение леммы 6 следует из формулы (2.41) с учетом следствия леммы 5, когда в этой лемме вместо $\varphi(x)$ берется $f_0(x,t)$. □

Лемма 7. *Функции $J_{11}(x,t)$, $J_{21}(x,t)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по x и t, причем*

$$2\frac{\partial J_{11}(x,t)}{\partial t} = -q(x+t)a_0(x+t,0) - \int\limits_x^{x+t} q(\xi)a'_{0t}(\xi, x+t-\xi)\,d\xi,$$

$$2\frac{\partial J_{21}(x,t)}{\partial t} = -q(x-t)a_0(x-t,0) - \int\limits_{x-t}^{x} q(\xi)a'_{0t}(\xi, \xi-x+t)\,d\xi;$$

$$2\frac{\partial J_{11}(x,t)}{\partial x} = -q(x+t)a_0(x+t,0) + q(x)a_0(x,t) - \int\limits_x^{x+t} q(\xi)a'_{0t}(\xi, x+t-\xi)\,d\xi,$$

$$2\frac{\partial J_{21}(x,t)}{\partial x} = -q(x)a_0(x,t) + q(x-t)a_0(x-t,0) + \int\limits_{x-t}^{x} q(\xi)a'_{0t}(\xi, \xi-x+t)\,d\xi.$$

Эта лемма также очевидна. Заметим лишь, что в леммах 6 и 7 $x,t \in (-\infty,\infty)\times[0,\infty)$. □

Лемма 8. *Функция $a_1(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и t из $(-\infty,\infty)\times[0,\infty)$, причем*

$$\frac{\partial^2 a_1(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_1(x,t)}{\partial x^2} - q(x)a_0(x,t), \tag{2.44}$$

$$a_1(x,0) = a'_{1t}(x,0) = 0. \tag{2.45}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, из (2.42) имеем

$$2\frac{\partial^2 a_1(x,t)}{\partial t^2} = 2\frac{\partial J_{11}(x,t)}{\partial t} + 2\frac{\partial J_{21}(x,t)}{\partial t} = -q(x+t)a_0(x+t,0)$$
$$- \int\limits_x^{x+t} q(\xi)a'_{0t}(\xi, x+t-\xi)\,d\xi - q(x-t)a_0(x-t,0) - \int\limits_{x-t}^{x} q(\xi)a'_{0t}(\xi, \xi-x+t)\,d\xi;$$

$$-2\frac{\partial^2 a_1(x,t)}{\partial x^2} = q(x+t)a_0(x+t,0) - q(x)a_0(x,t) + \int\limits_x^{x+t} q(\xi)a'_{0t}(\xi, x+t-\xi)\,d\xi$$
$$- q(x)a_0(x,t) + q(x-t)a_0(x-t,0) + \int\limits_{x-t}^{x} q(\xi)a'_{0t}(\xi, \xi-x+t)\,d\xi.$$

Отсюда получаем (2.44). Начальные условия (2.45) следуют из (2.41). □

Теперь займемся проверкой краевых условий.

Лемма 9. *Имеет место формула*

$$2U_1(a_1(\cdot,t)) = \int\limits_0^t \Phi_1(x,\tau)\,d\tau, \tag{2.46}$$

где $U_1(a_1(\cdot,t))$ означает, что U_1 применяется к $a_1(\xi,t)$ по ξ (t — параметр),

$$\Phi_1(x,\tau) = \tilde f_0(x,\tau) - \tilde f_0(-x,\tau) + \alpha_1 \int\limits_0^x \Big[\tilde f_0(\eta,\tau) + \tilde f_0(-\eta,\tau)\Big]\,d\eta$$
$$+ \beta_1 \int\limits_0^x \Big[\tilde f_0(1+\eta,\tau) + \tilde f_0(1-\eta,\tau)\Big]\,d\eta, \quad x = t-\tau.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В $J_{11}(x,t)$ из леммы 6 положим $\tau = x+t-s$. Тогда

$$2J_{11}(x,t) = \int_0^t \tilde f_0(x+t-\tau,\tau)\,d\tau.$$

Аналогично,

$$2J_{21}(x,t) = \int_0^t \tilde f_0(\tau+x-t,\tau)\,d\tau.$$

Поэтому по лемме 6 из (2.43) получим

$$2\frac{\partial a_1(0,t)}{\partial x} = \int_0^t \Big\{\tilde f_0(t-\tau,\tau) - \tilde f_0(\tau-t,\tau)\Big\}\,d\tau. \tag{2.47}$$

Далее,

$$2a_1(0,t) = \int_0^t d\tau \int_{-t+\tau}^{t-\tau} \tilde f_0(\eta,\tau)\,d\eta = \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} \Big[\tilde f_0(\eta,\tau)+\tilde f_0(-\eta,\tau)\Big]\,d\eta, \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned} 2a_1(1,t) &= \int_0^t d\tau \int_{1-t+\tau}^{1+t-\tau} \tilde f_0(\eta,\tau)\,d\eta = \int_0^t d\tau \int_{-t+\tau}^{t-\tau} \tilde f_0(1+\eta,\tau)\,d\eta \\ &= \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} \Big[\tilde f_0(1+\eta,\tau)+\tilde f_0(1-\eta,\tau)\Big]\,d\eta. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Из (2.47)–(2.49) выводим (2.46). □

Рассмотрим теперь $U_2(a_1(\cdot,t))$. Имеем

$$2\frac{\partial a_1(1,t)}{\partial t} = \int_1^{1+t} \tilde f_0(\xi,1+t-\xi)\,d\xi - \int_{1-t}^{1} \tilde f_0(\xi,\xi-1+t)\,d\xi = \int_0^t \Big[\tilde f_0(1+t-\tau,\tau) - \tilde f_0(1-t+\tau,\tau)\Big]\,d\tau.$$

Поэтому, как и в случае леммы 9, справедлива

Лемма 10. *Имеет место формула*

$$2U_2(a_1(\cdot,t)) = \int_0^t \Phi_2(x,\tau)\,d\tau,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_2(x,\tau) &= \tilde f_0(1+x,\tau) - \tilde f_0(1-x,\tau) + \alpha_2\int_0^x \Big[\tilde f_0(\eta,\tau)+\tilde f_0(-\eta,\tau)\Big]\,d\eta \\ &+ \beta_2\int_0^x \Big[\tilde f_0(1+\eta,\tau)+\tilde f_0(1-\eta,\tau)\Big]\,d\eta, \quad x = t-\tau. \end{aligned}$$

На основании лемм 9 и 10 получается

Лемма 11. *Функция* $a_1(x,t)$ *удовлетворяет по* x *краевым условиям* $U_j(a_1(\cdot,t)) = 0$ $(j=1,2)$.

Доказательство. Функции $\Phi_j(x,t)$ непрерывно дифференцируемы по x на всей оси. Проведем это дифференцирование. В результате имеем

$$\Phi'_{1x}(x,t) = \tilde f'_{0x}(x,t) + \tilde f'_{0x}(-x,t) + \alpha_1\big[\tilde f_0(x,t) + \tilde f_0(-x,t)\big] + \beta_1\big[\tilde f_0(1+x,t) + \tilde f_0(1-x,t)\big],$$
$$\Phi'_{2x}(x,t) = \tilde f'_{0x}(1+x,t) + \tilde f'_{0x}(1-x,t) + \alpha_2\big[\tilde f_0(x,t) + \tilde f_0(-x,t)\big] + \beta_2\big[\tilde f_0(1+x,t) + \tilde f_0(1-x,t)\big].$$

В силу формул продолжения (2.7), (2.8) $\Phi'_{jx}(x,t) = 0$. Значит, $\Phi_j(x,t) = c_j(t)$, где $c_j(t)$ — функции, не зависящие от x. Но, очевидно, $\Phi_j(0,t) = 0$. Следовательно, и $c_j(t) = 0$, а тогда $\Phi_j(x,t) = 0$ при всех x, и в силу лемм 9 и 10 получаем $U_j(a_1(\cdot,t)) = 0$. □

Из лемм 8–11 вытекает

Теорема 13. *Функция* $a_1(x,t)$ *дважды непрерывно дифференцируема по* $(x,t)\in(-\infty,\infty)\times[0,\infty)$, *и*

$$\frac{\partial^2 a_1(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_1(x,t)}{\partial x^2} - q(x)a_0(x,t), \tag{2.50}$$
$$a_1(x,0) = a'_{1t}(x,0) = 0, \tag{2.51}$$
$$U_j(a_1(\cdot,t)) = 0 \quad (j=1,2). \tag{2.52}$$

Для $a_m(x,t)$ при $m\ge 2$ по индукции (рассуждения для $a_1(x,t)$ дословно переносятся на случай $a_2(x,t)$ и так далее) получаем в итоге следующий результат.

Теорема 14. *Функция* $a_m(x,t)$ *при* $m\ge2$ *дважды непрерывно дифференцируема по* $x,t\in(-\infty,\infty)\times[0,\infty)$, *и*

$$\frac{\partial^2 a_m(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_m(x,t)}{\partial x^2} - q(x)a_{m-1}(x,t),$$
$$a_m(x,0) = a'_{mt}(x,0) = 0, \quad U_j(a_m(\cdot,t)) = 0 \quad (j=1,2).$$

Лемма 12. *Если* $u(x,t)$ — *классическое решение с условием единственности задачи* (2.1)–(2.4), *то*

$$u(x,t) = A_m(x,t) + \Omega_m(x,t) \quad (m\ge1),$$

где

$$A_m(x,t) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x,t), \quad \Omega_m(x,t) = \Big(\ \Big)\int_0^t (R_\lambda - R_\lambda^0)(f_{m-1}(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda,$$
$$f_k(x,t) = -q(x)a_k(x,t),$$

а через $\Big(\ \Big)$ *здесь и в дальнейшем мы обозначаем*

$$-\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big).$$

Доказательство. По теореме 1 имеем

$$u(x,t) = \Big(\ \Big)(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\,d\lambda, \tag{2.53}$$

и ряд справа сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ при каждом фиксированном t. Представим его в виде

$$u(x,t) = u_{01}(x,t) + u_1(x,t), \tag{2.54}$$

где $u_{01}(x,t)$ есть ряд (2.53), в котором R_λ заменено на R^0_λ. Найдем сумму ряда $u_{01}(x,t)$.

Обозначим через $u_0(x,t)$ классическое решение задачи с условием единственности

$$\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2},$$
$$U_j(u_0(\cdot,t) = 0 \quad (j=1,2),$$
$$u_0(x,0) = \varphi(x), \quad u'_{0t}(x,0) = 0.$$

Необходимые условия классического решения этой задачи таковы: $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $U_j(\varphi) = 0$ $(j=1,2)$. Считаем, что сейчас $\varphi(x)$ удовлетворяет этим требованиям. Тогда по теореме 12 классическое решение задачи существует и имеет вид (2.40), причем выполняется условие единственности.

Обозначим правую часть (2.40) через $a_0(x,t)$. По теореме 1 и замечанию 3

$$a_0(x,t) = \Big(\;\Big)(R^0_\lambda\varphi)\cos\rho t\, d\lambda.$$

Значит, сумма ряда $u_{01}(x,t)$ при $x \in [0,1]$ есть $a_0(x,t)$. Теперь из (2.54) получаем и сумму ряда $u_1(x,t)$: $u(x,t) - a_0(x,t)$. Эта сумма есть классическое решение задачи

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u_1(x,t) + f_0(x,t),$$
$$U_j(u_1(\cdot,t) = 0 \quad (j=1,2),$$
$$u_1(x,0) = u'_{1t}(x,0) = 0,$$
$$f_0(x,t) = -q(x)a_0(x,t)$$

с условием единственности. Поэтому по теореме 1 имеет место представление

$$u_1(x,t) = \Big(\;\Big)\int_0^t R_\lambda(f_0(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda. \tag{2.55}$$

Запишем далее для ряда (2.55)

$$u_1(x,t) = u_{02}(x,t) + u_2(x,t),$$

где

$$u_{02}(x,t) = \Big(\;\Big)\int_0^t R^0_\lambda(f_0(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda.$$

Займемся нахождением суммы ряда $u_{02}(x,t)$. Для этого привлечем теорему 13 при $x \in [0,1]$. Получаем, что $a_1(x,t)$ при $x \in [0,1]$ есть классическое решение задачи (2.50)–(2.52) (причем $a_1(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема, и тем самым автоматически выполняется условие единственности). Тогда по теореме 1 $a_1(x,t)$ есть сумма ряда $u_{02}(x,t)$. В итоге получаем

$$u(x,t) = a_0(x,t) + u_1(x,t) = a_0(x,t) + u_{02}(x,t) + u_2(x,t)$$
$$= a_0(x,t) + a_1(x,t) + \Big(\;\Big)\int_0^t (R_\lambda - R^0_\lambda)(f_0(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda = a_0(x,t) + a_1(x,t) + \Omega_1(x,t).$$

Продолжая этот процесс с привлечением теоремы 14, придем к утверждению леммы 12. □

Теорема 15. *Если $u(x,t)$ — классическое решение задачи* (2.1)–(2.4) *с условием единственности, то $u(x,t) = A(x,t)$.*

Доказательство. Следуем доказательству теоремы 5 из [11]. Для любой $f(x) \in L[0,1]$ имеет место равномерная по $x \in [0,1]$ оценка на контурах из формального решения

$$(R_\lambda - R_\lambda^0)f = O\Big(\frac{1}{\rho^2}\|f\|_1\Big).$$

Тогда равномерно по x и t из Q_T

$$\Omega_m(x,t) = O\Big(\iint\limits_{Q_T} |f_{m-1}(x,t)|\,dx\,dt\Big).$$

По лемме 3

$$\iint\limits_{Q_T} |f_{m-1}(x,t)|\,dx\,dt \le C_T^m \|q\|_1^{m-1} \frac{T^{m-1}}{(m-1)!}\|\varphi\|_1.$$

Тем самым $\Omega_m(x,t) \to 0$ при $m \to \infty$ равномерно по $x, t \in Q_T$. Отсюда по лемме 12 следует утверждение теоремы. □

Замечание 6. Как и в [11], может быть получен следующий результат: для того чтобы существовало классическое решение задачи (2.1)–(2.4), необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ были абсолютно непрерывны и $U_j(\varphi) = 0$ $(j = 1,2)$.

Замечание 7. Теорема 15 справедлива и в случае $q(x) \in L[0,1]$. Это утверждение получается из тех же рассуждений, что и в [11] в случае краевых условий $u(0,t) = u(1,t) = 0$, и не приводится лишь потому, чтобы не утяжелять рассуждения, изложенные выше.

Благодарности. Благодарим М. Ш. Бурлуцкую и Ф. П. Васильева за ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стеклов В.А.** Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983. 432 с.
2. **Крылов А.Н.** О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 368 с.
3. **Чернятин В.А.** Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.
4. **Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.** Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. РАН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140. doi: 10.7868/S0869565214260041 .
5. **Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.** Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2015. Т. 55, № 2. С. 229–241. doi: 10.7868/S0044466915020052 .
6. **Хромов А.П.** Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 2. С. 239–251. doi: 10.7868/S0044466916020149 .
7. **Хромов А.П.** О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 10. С. 1795–1809. doi: 10.7868/S0044466916100112 .
8. **Корнев В.В., Хромов А.П.** Резольвентный подход в методе Фурье для волнового уравнения в несамосопряженном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2015. Т. 55, № 7. С. 1156–1167. doi: 10.7868/S004446691507008X .
9. **Корнев В.В., Хромов А.П.** Резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения // Изв. Саратовского ун-та. Новая сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 403–413. doi: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-403-413.
10. **Хромов А.П.** Классическое решение методом Фурье смешанной задачи // Новые методы аппроксимации в задачах действительного анализа и спектральной теории / А. П. Хромов, С. Ф. Лукомский, С. П. Сидоров, П. А. Терехин. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2015. С. 6–94.

11. **Хромов А.П.** Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731. doi: 10.1134/S0374064119050121 .
12. **Хромов А.П., Корнев В.В.** Классическое и обобщенные решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2019. Т. 59, № 2. С. 286–300. doi: 10.1134/S0044466919020091 .
13. **Эйлер Л.** Дифференциальное исчисление. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. 580 с.
14. **Харди Г.** Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951. 504 с.
15. **Хромов А.П.** Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии // Современные методы теории краевых задач: материалы Междунар. науч. конф.: Воронежская весен. мат. шк. "Понтрягинские чтения — XXX" (Воронеж, 3–9 мая 2019). Воронеж: Изд-во ИД ВГУ, 2019. С. 291–300.
16. **Хромов А.П.** О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Изв. Саратовского ун-та. Новая. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 280–288. doi: 10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288 .
17. **Хромов А.П.** Расходящиеся ряды и смешанная задача для волнового уравнения // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2019. Вып. 21. С. 62–67.
18. **Хромов А.П.** Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы Междунар. науч. конф.: Сарат. зимн. шк. (Саратов, 28 янв.–1 февр. 2020). Саратов: Изд-во "Научная книга", 2020. С. 433–439.
19. **Корнев В.В., Курдюмов В.П., Хромов А.П.** Смешанная задача для волнового уравнения с граничными условиями, содержащими производные // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Междунар. науч. конф.: Воронеж. зимн. мат. шк. (Воронеж, 28 янв.–2 февр. 2021). Воронеж: Изд-во ИД ВГУ, 2021. С. 148–152.
20. **Белова Д.В., Бурлуцкая М.Ш.** О смешанной задаче для волнового уравнения на графе // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Междунар. науч. конф.: Воронеж. зимн. мат. шк. (Воронеж, 28 янв.–2 февр. 2021). Воронеж: Изд-во ИД ВГУ, 2021. С. 52–54.
21. **Расулов М.А.** Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964. 462 с.
22. **Вагабов А.И.** Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов на Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1994. 160 с.
23. **Левитан Б.М.** Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения. М.: Физматгиз, 1962. 323 с.

Поступила 18.03.2021
После доработки 13.05.2021
Принята к публикации 17.05.2021

Хромов Август Петрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики
Саратовский национальный исследовательский университет им. Н. Г. Чернышевского
г. Саратов
e-mail: KhromovAP@sgu.ru

Корнев Владимир Викторович
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики
Саратовский национальный исследовательский университет им. Н. Г. Чернышевского
г. Саратов
e-mail: KornevVV@sgu.ru

REFERENCES

1. Steklov V.A. *Osnovnye zadachi matematicheskoi fiziki* [Basic problems of mathematical physics]. Moscow: Nauka Publ., 1983, 432 p.

2. Krylov A.N. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniyakh matematicheskoi fiziki, imeyushchikh prilozheniya v tekhnicheskikh voprosakh* [On some differential equations of mathematical physics having application to technical problems]. Moscow; Leningrad: GITTL, 1950, 368 p.
3. Chernyatin V.A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoi zadache dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Substantiation of the Fourier method in mixed problems for partial differential equations]. Moscow: Moscow Univ. Publ., 1991, 112 p. ISBN: 5-211-01579-7 .
4. Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. Resolvent approach in the Fourier method. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, no. 2, pp. 545–548. doi: 10.1134/S1064562414060076 .
5. Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. The resolvent approach for the wave equation. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2015, vol. 55, no. 2, pp. 227–239. doi: 10.1134/S0965542515020050 .
6. Khromov A.P. Behavior of the formal solution to a mixed problem for the wave equation. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 2, pp. 243–255. doi: 10.1134/S0965542516020135 .
7. Khromov A.P. On the convergence of the formal Fourier solution of the wave equation with a summable potential. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 10, pp. 1778–1792. doi: 10.1134/S0965542516100110 .
8. Kornev V.V., Khromov A.P. A resolvent approach in the Fourier method for the wave equation: the non-selfadjoint case. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2015, vol. 55, no. 7, pp. 1138–1149. doi: 10.1134/S0965542515070088 .
9. Kornev V.V., Khromov A.P. Resolvent approach to Fourier method in a mixed problem for non-homogeneous wave equation. *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, no. 4, pp. 403–413 (in Russian). doi: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-403-413 .
10. Khromov A.P. Classical solution of a mixed problem by the Fourier method. In: *New methods of approximation in problems of real analysis and spectral theory*, A.P. Khromov, S.F. Lukomskii, S.P. Sidorov, P.A. Terekhin (eds). Saratov: Saratov Univ. Publ., 2015, pp. 6–94 (in Russian). ISBN: 978-5-292-04345-4 .
11. Khromov A.P. Necessary and sufficient conditions for the existence of a classical solution of the mixed problem for the homogeneous wave equation with an integrable potential. *Diff. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 5, pp. 703–717. doi: 10.1134/S0012266119050112 .
12. Khromov A.P., Kornev V.V. Classical and generalized solutions of a mixed problem for a nonhomogeneous wave equation. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 2, pp. 275–289. doi: 10.1134/S096554251902009X .
13. Euler L. *Foundations of differential calculus.* NY: Springer-Verlag, 2000, 194 p. doi: 10.1007/b97699 . Translated to Russian under the title *Differentsial'noe ischislenie.* Moscow; Leningrad: GITTL, 1949, 580 p.
14. Hardy G.H. *Divergent series.* NY: Chelsea, 1991, 396 p. ISBN: 0828403341 . Translated to Russian under the title *Raskhodyashchiesya ryady*, Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1951, 504 p.
15. Khromov A.P. Divergent series and functional equations, related to analogs of geometric progression. In: *Modern methods of the theory of boundary value problems*: Proc. Int. Conf. Voronezh Spring Math. School "Pontryagin readings — XXX", Voronezh: VGU Publ., 2019, pp. 291–300 (in Russian). ISBN: 978-5-9273-2799-7 .
16. Khromov A.P. On classic solution of the problem for a homogeneous wave equation with fixed end-points and zero initial velocity. *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, no. 3, pp. 280–288 (in Russian). doi: 10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288 .
17. Khromov A.P. Divergent series and a mixed problem for a wave equation. In: *Mathematics. Mechanics*, Saratov: Saratov Univ. Publ., 2019, no. 21, pp. 62–67 (in Russian).
18. Khromov A.P. Divergent series and the Fourier method for a wave equation. In: *Contemporary problems of function theory and their applications*: Proc. Int. Saratov Winter School, Saratov: Nauchnaya Kniga Publ., 2020, pp. 433–439 (in Russian). ISBN: 978-5-9758-1911-6 .
19. Kornev V.V., Kurdyumov V.P., Khromov A.P. A mixed problem for a wave equation with boundary conditions containing derivatives. In: *Modern methods of function theory and related problems*: Proc. Int. Conf. Voronezh Winter Math. School, Voronezh: VGU Publ., 2021, pp. 147–151. ISBN: 978-5-9273-3153-6 .
20. Belova D.V., Burlutskaya M.Sh. On a mixed problem for a wave equation on a graph. In: *Modern methods of function theory and related problems*: Proc. Int. Conf. Voronezh Winter Math. School, Voronezh: VGU Publ., 2021, pp. 51–53. ISBN: 978-5-9273-3153-6 .

21. Rasulov M.L. *Methods of contour integration.* Amsterdam: North Holland, 1967, 440 p. ISBN: 9781483275000 . Original Russian text published in Rasulov M.A. *Metod konturnogo integrala i ego primenenie k issledovaniyu zadach dlya differentsial'nykh uravnenii*, Moscow: Nauka Publ., 1964, 462 p.
22. Vagabov A.I. *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to the spectral theory of differential operators]. Rostov-on-Don: Rostov. Univ. Publ., 1994, 160 p. ISBN: 5-7507-0342-8 .
23. Levitan B.M. *Generalized translation operators and some of their applications.* Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1964, 200 p. Original Russian text published in Levitan B.M. *Operatory obobshchennogo sdviga i nekotorye ikh primeneniya*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1962, 323 p.

Received March 18, 2021
Revised May 13, 2021
Accepted May 17, 2021

Avgust Petrovich Khromov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Saratov State University, Saratov, 410012 Russia, e-mail: KhromovAP@sgu.ru .

Vladimir Victorovich Kornev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Saratov State University, Saratov, 410012 Russia, e-mail: KornevVV@sgu.ru .

Cite this article as: A. P. Khromov, V. V. Kornev. Divergent series in the Fourier method for the wave equation, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 215–238 .