ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 4 2021

УДК 519.853+517.988.523

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ СИСТЕМЫ С БИНАРНОЙ СТРУКТУРОЙ

А. И. Смирнов, Вл. Д. Мазуров

Рассматривается динамическая задача оптимальной устойчивой эксплуатации системы возобновляемых биоресурсов, в равновесном состоянии эквивалентная задаче математического программирования. Последняя для системы с бинарной структурой, описываемой нелинейным обобщением модели Лесли, при фиксированном значении некоторой агрегированной переменной превращается в задачу линейного программирования. Предложен алгоритм решения задачи оптимальной устойчивой эксплуатации, использующий особенности системы ограничений задачи, двойственной к этой задаче линейного программирования. Данный алгоритм позволяет свести решение исходной задачи к решению серии задач одномерной оптимизации.

Ключевые слова: рациональная эксплуатация экосистем, оптимальные сохраняющие управления, вогнутое программирование.

A. I. Smirnov, Vl. D. Mazurov. A solution algorithm for a problem of optimal exploitation of a system with a binary structure.

We consider a dynamic problem of an optimal sustainable exploitation of a renewable bioresource system that in equilibrium is equivalent to a mathematical programming problem. The latter, in the case of a system with a binary structure described by a nonlinear generalization of Leslie's model, for a fixed value of some aggregated variable, turns into a linear program. A solution algorithm is proposed for the optimal sustainable exploitation problem. The algorithm employs the peculiarities of the constraint system of the problem dual to this linear program and reduces the original problem to a series of one-dimensional optimization problems.

Keywords: rational exploitation of ecosystems, optimal nondestructive controls, concave programming.

MSC: 47N05, 37N25, 37N40

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-142-160

1. Введение

Проблема сохранения возобновляемых природных ресурсов является в настоящее время одной из насущных проблем развития человеческого общества. Особенно остро эта проблема стоит в отношении промысловых биоресурсов — основных источников пищи человека, среди которых ведущими являются водные и лесные биоресурсы.

В настоящее время общепризнано, что антропогенная деятельность — основная причина истощения ресурсов и деградации среды обитания. Так, по оценке Продовольственной и сельскохозяйственной организации ООН (Food and Agriculture Organization of the United Nations — FAO) доля рыбных запасов, находящихся в пределах биологически устойчивых уровней, сократилась с 90% в 1974 г. до 65,8% в 2017 г. (см. [1]). К концу второй декады XXI в. около половины морских экосистем мира классифицировались как переловленные [2].

Деградация лесов в результате их промышленной эксплуатации по-прежнему происходит тревожными темпами, что в значительной степени способствует продолжающейся утрате биоразнообразия. По оценкам FAO в абсолютном выражении площадь лесов в мире за период с 1990 по 2020 г. сократилась на 178 млн га (см. [3]).

Многочисленные данные по истощению и деградации эксплуатируемых экосистем стимулировали исследования по проблемам сбережения природных ресурсов. Сформировалась новая самостоятельная область исследований — природоохранная биология (conservation biology), которая в настоящее время является научной базой для решения теоретических и практических задач сберегающей эксплуатации природных ресурсов (см. [4; 5]).

К сожалению, экология и экономика часто противопоставляются, и экологические требования при ведении хозяйственной деятельности по-прежнему воспринимаются как необязательные. В связи с этим интересной представляется работа [6], где суммируются первые результаты инициативы Global Futures — партнерства между Всемирным фондом природы (World Wildlife Fund — WWF), Проектом анализа глобальной торговли (Global Trade Analysis Project) и Проектом природного капитала (Natural Capital Project), в рамках которой была разработана новая инновационная модель для расчета воздействия упадка природы на мировую экономику. Для сценария, когда мировая экономика продолжает потреблять природные ресурсы в прежних темпах, при ставке дисконтирования в 3% получен прогноз потерь глобального ВВП к 2050 г. в размере около 10 трлн долл. Выводы этой работы дают экономические обоснования для сохранения природных ресурсов, стимулируют хозяйствующие объекты к долгосрочному планированию производственной деятельности.

Мировое сообщество, понимая эти угрозы, предпринимает существенные усилия для сохранения и рационального использования биоресурсов. В 2015 г. государства — члены ООН приняли стратегическую программу “Преобразование нашего мира: Повестка дня в области устойчивого развития на период до 2030 г.”, направленную, в частности, на поддержку рационального использования биоресурсов и сохранение биоразнообразия природных систем.

Хотя Россия располагает огромными природными богатствами, при существующих темпах их эксплуатации велика вероятность подорвать способность ее экосистем к самовосстановлению, что со временем может привести к их частичной или полной деградации как источника жизненно важных для населения биоресурсов. В последние десятилетия Россия активизировала усилия по предотвращению подобных сценариев. Так, для реализации целей ООН по устойчивому развитию разработан ряд национальных программ и проектов, приняты “Основы государственной политики в области экологического развития России до 2030 г.”.

Данная работа продолжает серию статей авторов по формализации понятия устойчивой эксплуатации систем возобновляемых биоресурсов и исследованию свойств полученных задач оптимизации. Возрастающая актуальность этого направления подчеркивается в классических монографиях [7; 8]. Имеющиеся здесь постановки задач и полученные результаты, а также отличия нашего подхода к данной проблеме от подходов других авторов подробно описаны в предыдущих статьях этой серии, которые будут упомянуты далее.

Наиболее полный обзор постановок задач оптимальной эксплуатации популяций и полученных результатов содержится в монографиях [8;9]. В ранних работах в этой области рассматривалась общая биомасса системы (см., например, [7]); в более поздних учитывалась структура популяции [10]. В исследованиях по эксплуатации структурированных популяций использовались различные модификации или обобщения так называемой матричной модели Лесли (см. [11]) возрастной структуры популяции. Подход, основанный на этой модели (или ее обобщениях), превалирует в современной экологии [12].

Роль математического моделирования в решении комплекса сложных проблем, связанных с управлением природными ресурсами, подчеркивается в работе [13]. В частности, здесь обоснована необходимость построения и исследования свойств теоретических (низкоразмерных) моделей, к классу которых относится и рассматриваемая нами. Такие модели, представляя лишь основные функции и процессы сложной системы, допускают теоретическое исследование и тем самым дают понимание общих связей элементов этих систем и механизмов их взаимодействия. Результаты изучения этих моделей должны служить руководством для анализа более расширенных моделей, что позволит избежать сложностей, созданных их многочисленными параметрами.

Мы стремились к максимальной степени общности в первоначальной постановке исходной задачи: предполагается, что смена последовательных состояний используемого объекта описывается дискретной динамической системой, оператор шага которой принадлежит к некоторому общему классу отображений. Для класса вогнутых отображений исходная динамическая задача оптимизации (в случае существования нетривиального равновесия системы) может быть сведена к некоторой общей задаче математического программирования. Для системы с бинарной структурой, описываемой обобщением (см. [14]) модели Лесли, показано существование на положительной границе допустимого множества так называемых *сохраняющих* управлений — управлений, которые сохраняют все структурные подразделения системы [14, Corollary 3], а также получен критерий существования *квазисохраняющих* управлений, допускающих элиминацию некоторых структурных подразделений системы [15, Theorem 1]. Найдены квазисохраняющие (неотрицательные) управления с минимальным числом ненулевых координат, и доказано обобщение известного свойства бимодальности оптимальных стратегий эксплуатации популяций с линейной структурой на случай бинарной структуры. Наконец, получен критерий существования оптимальных сохраняющих управлений для заданной целевой функции [16].

Эти результаты позволяют перейти к построению алгоритма решения задачи оптимальной эксплуатации для системы, описываемой упомянутым выше обобщением модели Лесли.

Будем использовать следующие обозначения:

$\mathbb{R}^q_+$ означает неотрицательный ортант пространства $\mathbb{R}^q$; $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел; $\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных действительных чисел; $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; $\overline{m,n} = \{i \in \mathbb{Z} \mid m \le i \le n\}$; $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}^q \mid a \le x \le b\}$; $(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^q \mid a < x < b\}$; $\operatorname{co} M$ — выпуклая оболочка элементов множества M; $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ — символ скалярного произведения.

Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_q)$ иногда кратко будем записывать в виде $x = (x_i)$. Множество ненулевых (соответственно положительных) неподвижных точек отображения $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ обозначается N_F (соответственно N_F^+).

2. Некоторые предварительные результаты

Согласно заявленному выше подходу эксплуатируемая система моделируется итерационным процессом

$$x^{t+1} = F_u(x^t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $F_u(x) = F(x) - u$, $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$, $x^t \ge 0$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$. Компоненты вектора x^t соответствуют структурным единицам системы, состоящей из $q \ge 1$ подразделений; компоненты вектора u определяют объемы биоресурсов, изымаемых из этих структурных подразделений.

Предполагается, что отображение F является вогнутым на $\mathbb{R}^q_+$ и исходная система (в отсутствие управления, при $u = 0$) наряду с тривиальным состоянием равновесия $(F(0) = 0)$ имеет и нетривиальное состояние равновесия, которое является положительным: $N_F^+ \ne \varnothing$.

Рассматривается задача максимизации эффекта $c(u)$ эксплуатации системы на допустимом множестве $\overline{U}$, которое представляет собой замыкание множества сохраняющих управлений U. Управление u является *сохраняющим*, если хотя бы для одного начального состояния x^0 траектория процесса (1) отделена от нуля, т. е. все подразделения системы существуют бесконечное время.

Управления, при которых некоторые структурные подразделения системы элиминируются (чтобы восстановиться в следующем цикле воспроизводства), называются *квазисохраняющими*.

Следствием вогнутости отображения F являются ограниченность множества N_F и существование наибольшей неподвижной точки $\bar{x}_F$ этого отображения. В этих условиях задача оптимальной эксплуатации эквивалентна задаче математического программирования

$$\max\{c(u) \mid x = F(x) - u,\ x \ge 0,\ u \ge 0\}, \tag{2}$$

где $c(u)$ — монотонно возрастающая на $\mathbb{R}^q_+$ функция. Допустимое множество этой задачи совпадает с $\overline{U}$.

Пусть $\tilde{u}$ и $\widetilde{U}$ — оптимальное множество и оптимальный вектор этой задачи соответственно; N_u и N_u^+ — множества ненулевых и положительных неподвижных точек отображения F_u соответственно. Непустое множество N_u содержит наибольший элемент $\bar{x}(u)$, причем отображение $\bar{x}(u)$ является вогнутым и монотонно убывающим на $\overline{U}$ (см. [16, утверждение 1]).

Из ограниченности множества N_F^+ вытекает ограниченность множеств $\overline{U}$ и N_u при $u \in \overline{U}$. Множество U содержит положительный вектор и является выпуклым и нисходящим (downward set), т. е. вместе с каждым вектором $u \geq 0$ содержит весь отрезок $[0, u]$.

Поскольку целевая функция $c(u)$ является неотрицательной и монотонно возрастающей, все потенциально оптимальные управления находятся в множестве

$$D = \{u \in \mathbb{R}_+^q \mid N_u \neq \varnothing,\ N_v = \varnothing\ (\forall v > u)\},$$

состоящем из двух непересекающихся частей D' и D'', содержащих соответственно сохраняющие и квазисохраняющие управления:

$$D' = \{u \in \mathbb{R}_+^q \mid N_u^+ \neq \varnothing,\ N_v = \varnothing\ (\forall v > u)\}, \quad D'' = \{u \in \mathbb{R}_+^q \mid N_u \neq \varnothing,\ N_u^+ = \varnothing\}. \tag{3}$$

Множество D иногда называют *положительной границей* допустимого множества.

Вышеупомянутое обобщение модели Лесли описывает популяцию с бинарной структурой: имеется m ее подразделений, каждое из которых содержит особи n возрастов. Таким образом, мы рассматриваем далее процесс (1) с оператором шага $F(x) = \big(f_{i,j}(x)\big)$ следующего вида:

$$f_{i,1}(x) = f_i(a), \quad f_{i,j+1}(x) = \alpha_{i,j} x_{i,j}, \quad a = a(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \beta_{i,j} x_{i,j} \quad (i \in \overline{1,m},\ j \in \overline{1,n-1}\,). \tag{4}$$

Здесь $\alpha_{i,j} > 0$ и $\beta_{i,j} \geq 0$ — коэффициенты дожития и репродукции соответственно, $a(x)$ означает суммарное число новорожденных в популяции, хотя может иметь и иные интерпретации.

Будем считать, что координаты векторов с двойной нумерацией расположены в лексикографическом порядке: $x = \big(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}\big)$, где $x^{(i)} = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,n})$ $(i \in \overline{1,m}\,)$.

Предполагается, что функции $f_i(a)$ удовлетворяют условиям

$$f_i(0) = 0, \quad f_i(a) \quad \text{вогнуты на} \quad \mathbb{R}_+ \quad (i \in \overline{1,m}\,). \tag{5}$$

Таким образом, функции $f_i(a)$ монотонно возрастающие и положительные на $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Поэтому всякое нетривиальное равновесие $\bar{x}_F$ этой модели является положительным.

Введем в рассмотрение величины

$$\sigma(a) = \sum_{i=1}^{m} \sigma^{(i)} f_i(a), \quad \sigma^{(i)} = \sigma_n^i, \quad \sigma_0^i = 0, \quad \sigma_j^i = \sum_{k=1}^{j} \beta_{i,k} \prod_{\ell=1}^{k-1} \alpha_{i,\ell} \quad (i \in \overline{1,m},\ j \in \overline{1,n}). \tag{6}$$

Необходимое и достаточное условие существования единственного равновесия

$$\sigma'(+\infty) < 1 < \sigma'(+0) \tag{7}$$

гарантирует также телесность допустимого множества, которое задается ограничениями

$$x_{i,1} = f_i\big(a(x)\big) - u_{i,1}, \ \ x_{i,j+1} = \alpha_{i,j} x_{i,j} - u_{i,j+1}, \ \ a(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \beta_{i,j} x_{i,j} \ \ (i \in \overline{1,m},\ j \in \overline{1,n-1}\,) \tag{8}$$

для неотрицательных векторов x, u.

Введем следующие обозначения (здесь $i \in \overline{1,m},\ j,k \in \overline{1,n}\,$):

$$\pi^{(i)} = \pi_n^{(i)}, \quad \pi_j^{(i)} = p_{1,j}^{(i)}, \quad p_j^{(i)} = p_{j,n}^{(i)}, \quad p_{j,k}^{(i)} = \prod_{\ell=j}^{k-1} \alpha_{i,\ell}, \tag{9}$$

$$p^{(i)}(u) = p_n^{(i)}(u), \quad p_j^{(i)}(u) = \sum_{k=1}^{j} p_{k,j}^{(i)} u_{i,k}, \tag{10}$$

$$q(u) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} q_j^{(i)} u_{i,j}, \quad q_j^{(i)} = q_{j,n}^{(i)}, \quad q_{j,k}^{(i)} = \sum_{s=j}^{k} \beta_{i,s} \prod_{t=j}^{s-1} \alpha_{i,t}, \tag{11}$$

$$\mu(a) = \sigma(a) - a, \quad \mu^* = \max_{a \geq 0} \mu(a), \quad \lambda_i(a) = \pi^{(i)} f_i(a). \tag{12}$$

Нетрудно получить явные выражения для координат блоков $x^{(i)}$ вектора $x = x(a,u)$ из (8):

$$x_{i,j} = \pi_j^{(i)} f_i(a) - p_j^{(i)}(u) \quad (j \in \overline{1, n-1}\,), \quad x_{i,n} = \lambda_i(a) - p^{(i)}(u) \quad \big(a = a(x)\big). \tag{13}$$

Из (13) получаем следующие представления множеств (3):

$$D' = \big\{ u \in \mathbb{R}_+^q \mid p^{(i)}(u) < \lambda_i^* \ (i \in \overline{1,m}), \ q(u) = \mu^*, \ u \geq 0 \big\}, \tag{14}$$

$$D'' = \left\{ u \in \mathbb{R}_+^q \mid I_0(u) \neq \varnothing, \ p^{(i)}(u) \begin{cases} = \lambda_i(a), \ i \in I_0(u), \\ < \lambda_i(a), \ i \notin I_0(u), \end{cases} q(u) = \mu(a), \ u \geq 0 \right\}, \tag{15}$$

где для наибольшего элемента $\bar{x}(u) = \big(\bar{x}_{i,j}(u)\big)$ множества N_u обозначено

$$I_0(u) = \{ i \in \overline{1,m} \mid \bar{x}_{i,n}(u) = 0 \}. \tag{16}$$

Множество (16) показывает, последние возрастные группы каких подразделений $i \in \overline{1,m}$ в результате промысла полностью элиминируются.

В предположениях (5), (7) множество D' является непустым (см. [14, Corollary 3]) и, как видно из (14), целиком лежит на гиперплоскости Γ с уравнением $q(u) = \mu^*$.

Далее будут фигурировать упорядоченные подмножества множеств $\overline{1,m}$, $\overline{0,n}$, для обозначения которых естественно использовать символ вектор-строки: запись $I = (i_1, \ldots, i_\ell)$ означает, что имеется множество $I = \{i_1, \ldots, i_\ell\}$ с фиксированным порядком элементов $i_1, \ldots, i_\ell$.

Пусть $I \subseteq \overline{1,m}$, $J = (j_1, \ldots, j_\ell) \subseteq \overline{0,n}$, причем второй из этих наборов допускает повторение элементов в отличие от первого: $|I| = \ell$, $|J| \leq \ell$. Введем следующие обозначения:

$$S(I,J,a) = S_{j_1,\ldots,j_\ell}^{i_1,\ldots,i_\ell}(a) = S(i_1(j_1), \ldots, i_\ell(j_\ell), a) = \sum_{k=1}^{\ell} \sigma_{j_k}^{(i_k)} f_{i_k}(a),$$

$$\bar{S}(I,J,a) = \bar{S}_{j_1,\ldots,j_\ell}^{i_1,\ldots,i_\ell}(a) = \bar{S}(i_1(j_1), \ldots, i_\ell(j_\ell), a) = S(I,J,a) + \sum_{i \notin I} \sigma^{(i)} f_i(a),$$

$$S(I,J',a) = S_{j_1-1,\ldots,j_\ell-1}^{i_1,\ldots,i_\ell}(a), \quad \bar{S}(I,J',a) = \bar{S}_{j_1-1,\ldots,j_\ell-1}^{i_1,\ldots,i_\ell}(a), \quad J' = \{ j-1 \mid j \in J \}. \tag{17}$$

Если $i \in \overline{1,m}$, $I \subseteq \overline{1,m} \setminus \{i\}$, то эти величины можно представить в виде

$$S_j^{(i)}(I,J,a) = S_{j_1,\ldots,j_\ell,j}^{i_1,\ldots,i_\ell,i}(a), \quad \bar{S}_j^{(i)}(I,J,a) = S_j^{(i)}(I,J,a) + \sum_{i \notin I'} \sigma^{(i)} f_i(a), \quad I' = I \cup \{i\}, \tag{18}$$

$$S_j^{(i)}(I,J',a) = S_{j_1-1,\ldots,j_\ell-1,j-1}^{i_1,\ldots,i_\ell,i}(a), \quad \bar{S}_j^{(i)}(I,J',a) = S_j^{(i)}(I,J',a) + \sum_{i \notin I'} \sigma^{(i)} f_i(a). \tag{19}$$

В частности, при $I = \varnothing$

$$\bar{S}_j^{(i)}(a) = \sigma_j^{(i)} f_i(a) + \sum_{k \neq i} \sigma^{(k)} f_k(a) \quad (i \in \overline{1,m}, \ j \in \overline{0,n}\,). \tag{20}$$

Множество $D'' \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $J^* \neq \varnothing$ (см. [15, Theorem 1]), где

$$J^* = \big\{ k \in \overline{1,m} \mid J_k^* \neq \varnothing \big\}, \quad J_k^* = \overline{1,n} \setminus I_k^* \quad \big(k \in \overline{1,m}\,\big), \tag{21}$$

$$I^* = \{\, k \in \overline{1,m} \mid I_k^* \neq \varnothing \,\}, \quad I_k^* = \{\, j \in \overline{1,n} \mid \bar{S}_{j-1}^{(k)}(a^*) < a^* \,\} \quad \bigl(k \in \overline{1,m}\,\bigr). \tag{22}$$

Обозначим через $a_j^{(i)}$ решение уравнения

$$\bar{S}_{j-1}^{(i)}(a) = a \quad (i \in \overline{1,m},\ j \in \overline{1,n}\,), \tag{23}$$

которое разрешимо тогда и только тогда, когда $J^* \neq \varnothing$ и $j \in J_i^*$ [15, Lemma 1].

Для множества $V \subseteq \overline{U}$ обозначим $\bar{a}_V = \sup\{\bar{a}(u) \mid u \in V\}$, где $\bar{a}(u) = a\bigl(\bar{x}(u)\bigr)$. Тогда

$$\bar{a}_{\overline{U}} = \bar{a}_F, \quad \bar{a}_{D'} = a^*, \quad D'' \neq \varnothing \Rightarrow \bar{a}_D = \bar{a}_{D''} = \max\{a_n^{(i)} \mid i \in J^*\}. \tag{24}$$

Зафиксируем $a \in [0, \bar{a}_F]$, где $\bar{a}_F = a(\bar{x}_F)$, и рассмотрим многогранник

$$\overline{U}(a) = \bigl\{u \mid p^{(i)}(u) \leq \lambda_i(a)\ (\forall i \in \overline{1,m}),\ q(u) = \mu(a),\ u \geq 0\bigr\} \tag{25}$$

(см. обозначения (10)–(12)). Очевидно, $\overline{U} = \bigcup \bigl\{\overline{U}(a) \mid a \in [0, \bar{a}_F]\bigr\}$.

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$V(a) \text{ — множество всех вершин многогранника } \overline{U}(a), \tag{26}$$

$$D(a) = \overline{U}(a) \cap D'', \quad V_{D'} = V(a^*) \cap D', \quad V_{D''}(a) = V(a) \cap D(a) \quad (a \in [a^*, \bar{a}_{D''}]\,), \tag{27}$$

$$L_i(a) = \bigl\{u \mid p^{(i)}(u) = \lambda_i(a),\ p^{(j)}(u) \leq \lambda_j(a)\ \ (\forall j \neq i),\ q(u) = \mu(a)\bigr\} \cap \mathbb{R}_+^{mn}. \tag{28}$$

Очевидно, $L_i(a)$ — неотрицательная часть $(mn-2)$-мерного аффинного многообразия.

Используя параметризацию (25), из (26)–(28) получаем параметрическое представление для (вообще говоря) нелинейной части положительной границы

$$D'' = \bigcup \bigl\{D(a) \mid a \in [a^*, \bar{a}_{D''}]\bigr\}, \quad D(a) = \bigcup_{i=1}^{m} L_i(a). \tag{29}$$

Будем также использовать следующие обозначения (здесь $i \in \overline{1,m}$, $j \in \overline{1,n}$, $k \in \overline{2,n+1}$, $j \leq k$):

$$\begin{gathered}\bar{\Delta}_{j,k}^{i}(I,J,a) = \bar{\Delta}_{j,k}^{i}(i_1(j_1),\ldots,i_\ell(j_\ell),a) = \bigl[\bar{S}_{j-1}^{(i)}(I,J',a),\, \bar{S}_{k-1}^{(i)}(I,J',a)\bigr],\\ J' = \{j-1 \mid j \in J\,\}.\end{gathered} \tag{30}$$

В работе [15, Theorem 2] элементы множества $V_{D''}(a)$ из (27) найдены в явном виде. Пусть

$$I_0(u) \subseteq I \cup \{i\}, \quad I_i^+(u) \subseteq \{j,k\}, \quad I = (i_1, i_2, \ldots, i_\ell) \subseteq \overline{1,m}\setminus\{i\}, \quad J = (j_1, j_2, \ldots, j_\ell) \subseteq \overline{1,n}.$$

Тогда положительные координаты управления $u \in V_{D''}(a)$ определяются следующим образом:

$$u_{i_r,j_r} = \pi_{j_r}^{(i_r)} f_{i_r}(a) \quad (r \in \overline{1,\ell}\,), \quad u_{i,j} = \frac{\bar{S}(I,J',a) - a}{q_{j,n}^{(i)}} \tag{31}$$

в случае $I_0(u) = I,\ \sum\limits_{s=j}^{n} \beta_{i,s} > 0,\ a \in \bar{\Delta}_{j,n+1}^{i}(I,J,a)$;

$$u_{i_r,j_r} = \pi_{j_r}^{(i_r)} f_{i_r}(a) \quad (r \in \overline{1,\ell}), \quad u_{i,j} = \frac{\bar{S}_{k-1}^{(i)}(I,J',a) - a}{q_{j,k-1}^{(i)}}, \quad u_{i,k} = p_{j,k}^{(i)}\, \frac{a - \bar{S}_{j-1}^{(i)}(I,J',a)}{q_{j,k-1}^{(i)}} \tag{32}$$

в случае $I_0(u) = I_1(u),\ \sum\limits_{s=j}^{k-1} \beta_{i,s} > 0,\ \ a \in \bar{\Delta}_{j,k}^{i}(I,J,a),\ I_1(u) = \{k \in \overline{1,m} \mid \exists j \in \overline{1,n}\colon u_{k,j} > 0\}$.

Введем обозначения $u_j^i(i_1(j_1),\ldots,i_\ell(j_\ell),a) = u_j^i(I,J,a)$, $u_{j,k}^i(i_1(j_1),\ldots,i_\ell(j_\ell),a) = u_{j,k}^i(I,J,a)$ — управления с координатами (31) и (32) соответственно.

Вершине $u \in V(a)$ соответствует промежуток $\Delta(a) = \Delta(u, a)$ ее существования, где

$$\Delta(u,a) = \begin{cases} \bar\Delta^i_{j,k}(I,J,a), & u = u^i_{j,k}(I,J,a), \\ \bar\Delta^i_j(I,J,a), & u = u^i_j(I,J,a). \end{cases} \tag{33}$$

Условие $a \in \Delta(u,a)$ гарантирует допустимость управления $u \in \{u^i_{j,k}(I,J,a),\ u^i_j(I,J,a)\}$:

$$a \in \Delta(u,a) \Leftrightarrow u \in \overline{U}. \tag{34}$$

Заметим, что D' не является замкнутым (его граница с D'' ему не принадлежит; см. [16, утверждение 3]), а D'', вообще говоря, при $m > 1$ не является связным (см. (14), (15)).

3. Алгоритм решения задачи (2) для отображения F вида (4)

Прежде всего нас будет интересовать ситуация существования сохраняющих оптимальных управлений, когда $\widetilde{U} \cap D' \neq \varnothing$. Тот факт, что все такие управления принадлежат гиперплоскости $\varGamma$ с уравнением $q(u) = \mu^*$ (см. (14)), существенно облегчает их нахождение.

Пусть $c(u) = \langle c, u\rangle$, где $c = \big(c^{(1)}, \dots, c^{(m)}\big)$, $c^{(i)} = (c_{i,1}, \dots, c_{i,n})$ $(i \in \overline{1,m},\ c \neq 0)$,

$$Q_i^+ = \big\{ j \in \overline{1,n} \mid q^i_{j,n} > 0 \big\}, \quad Q_i^0 = \overline{1,n} \backslash Q^i_+ \quad (i \in \overline{1,m}\,),$$

$$\gamma^{(i)}_j = c_{i,j}(q^{(i)}_{j,n})^{-1} \quad (i \in \overline{1,m},\ j \in Q_i^+), \quad \gamma = \max\{\gamma^{(i)}_j \mid i \in \overline{1,m},\ j \in Q_i^+\}.$$

Очевидно, $j \in Q_i^+$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{k=j}^{n} \beta_{i,k} > 0$.

Сохраняющее оптимальное управление существует тогда и только тогда (см. [16, утверждение 4]), когда выполнены следующие условия:

$$Q_i^0 \subseteq C_i^0 \quad (\forall i \in \overline{1,m}\,), \tag{35}$$

$$I^* = \varnothing \Rightarrow \gamma^{(i)}_j = \gamma \quad (\forall i \in \overline{1,m},\ j \in Q_i^+), \tag{36}$$

$$I^* \neq \varnothing \Rightarrow \exists\, i_0 \in I^*, \quad j_0 \in I^*_{i_0} : \gamma = \gamma^{(i_0)}_{j_0}. \tag{37}$$

В случае (37) множество $V_{D'} = \{u(i,j) \mid i \in I^*,\ j \in I^*_i\}$ из (27) управлений с единственной положительной координатой $u_{i,j} = \mu^*/q^{(i)}_{j,n}$ непусто, и оптимальным является вектор $u(i_0, j_0)$.

В случае (36) $\widetilde{U} = \overline{D'} = D' \cup D(a^*)$, и для нахождения сохраняющих управлений можно использовать представление $D' = \big(\operatorname{co} V(a^*)\big)\backslash D(a^*)$ (см. [16, утверждение 3]), где $V(a^*) \subset D'' \cap \varGamma$, и, следовательно, вершины из $V(a^*)$ находятся по формулам (31), (32). Дело в том, что поскольку множество D' не является замкнутым (в относительной топологии), при $I^* = \varnothing$ множество $V_{D'}$ является пустым и $V_{D''}(a^*) = V(a^*)$. Заметим, что в этом случае оптимальными являются и квазисохраняющие управления из множества $D(a^*) \subset D'' \cap \varGamma$, которые представляют собой предельные точки для множества сохраняющих управлений D'.

Если же оказалось, что $\widetilde{U} \subseteq D''$, то, используя параметризацию (29) множества D'', можно предложить относительно простой алгоритм решения рассматриваемой задачи, основанный на подходе с позиций теории двойственности. Действительно, при фиксированном $a \in [a^*, \bar a_{D''}]$ задача с ограничениями (8) превращается в задачу линейного программирования. Учитывая, что неотрицательность последней координаты $x_{i,n}$ блока $x^{(i)}$ в (8) равносильна неотрицательности всех его координат $x_{i,j}$, можно рассматривать эту задачу в виде

$$\begin{cases} \max\,\langle c, u\rangle: \\ x_{i,1} = f_i(a) - u_{i,1} \quad (i \in \overline{1,m}), \\ x_{i,j+1} = \alpha_{i,j} x_{i,j} - u_{i,j+1} \quad (i \in \overline{1,m},\ j \in \overline{1,n-1}\,), \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{i,j} x_{i,j} = a, \\ x_{i,n} \geq 0, \quad u_{i,j} \geq 0 \quad (i \in \overline{1,m},\ j \in \overline{1,n}\,). \end{cases} \tag{38}$$

Двойственной к задаче (38) является задача

$$\begin{cases} \min\Big[\,\upsilon_0 a + \sum\limits_{i=1}^{m} \upsilon_1^{(i)} f_i(a)\Big]: \\ \beta_{i,j}\upsilon_0 + \upsilon_j^{(i)} - \alpha_{i,j}\upsilon_{j+1}^{(i)} = 0 \quad (i \in \overline{1,m},\ j \in \overline{1,n-1}\,), \\ \beta_{i,n}\upsilon_0 + \upsilon_n^{(i)} \geq 0 \quad (i \in \overline{1,m}), \quad \upsilon_j^{(i)} \geq c_{i,j} \quad (i \in \overline{1,m},\ j \in \overline{1,n}\,). \end{cases} \tag{39}$$

Используя обозначения (6), (9), из равенств в (39) нетрудно получить соотношения $\upsilon_{j+1}^{(i)} = (\sigma_j^{(i)}\upsilon_0 + \upsilon_1^{(i)})/\pi_{j+1}^{(i)}$ $(i \in \overline{1,m},\ j \in \overline{1,n-1})$. Отсюда с учетом равенств $\sigma_{n-1}^{(i)} + \pi^{(i)}\beta_{i,n} = \sigma^{(i)}$ легко получить равносильность неравенств $\beta_{i,n}\upsilon_0 + \upsilon_n^{(i)} \geq 0$ и $\sigma_n^{(i)}\upsilon_0 + \upsilon_1^{(i)} \geq 0$ $(i \in \overline{1,m})$. Поэтому, формируя вектор $\upsilon = (\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_m)$ из переменных υ_0, $\upsilon_1^{(i)} = \upsilon_i$ $(i \in \overline{1,m})$ и целевой вектор $d(a) = \big(a, f_1(a), \ldots, f_m(a)\big)$, получаем эквивалентную (39) задачу с ограничениями, не зависящими от a (здесь для удобства записи принято $c_{i,n+1} = 0$, $\alpha_{i,n+1} = 1$):

$$\min\big\{\, d(\upsilon, a) = \langle d(a), \upsilon\rangle \mid \sigma_{j-1}^{(i)}\upsilon_0 + \upsilon_i \geq c_{i,j}\pi_j^{(i)}\ (i \in \overline{1,m},\ j \in \overline{1,n+1}\,)\big\}. \tag{40}$$

Заметим, что в силу $\sigma_0^{(i)} = 0$ $(\forall i \in \overline{1,m})$ координаты $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_m$ допустимого υ неотрицательны. Будем обозначать через $P(a)$ и $P^*(a)$ задачи (38), (40) соответственно, при фиксированном a.

3.1. Обоснование алгоритма

В ограничениях задачи (40) отдельно выделим последние ограничения i-й группы

$$(i,j)\colon \quad \sigma_{j-1}^{(i)}\upsilon_0 + \upsilon_i \geq c_{i,j}\pi_j^{(i)} \quad (i \in \overline{1,m},\ j \in \overline{1,n}\,), \tag{41}$$

$$(i,n+1)\colon \qquad \sigma^{(i)}\upsilon_0 + \upsilon_i \geq 0 \qquad (i \in \overline{1,m}). \tag{42}$$

Здесь (i,j) — идентификатор соответствующего ограничения.

В наших предположениях исходная задача (38) разрешима. Ее решение $\tilde{u} = (\tilde{u}_{i,j})$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_{i,j})$ является решением задачи линейного программирования $P(a)$ при $a = \tilde{a} = a(\tilde{x})$ (см. (4)).

Пусть $l_{\,i,j}$ — прямая в системе координат υ_0, υ_i, задающая ограничение (i,j). Заметим, что при $q_{j,k-1}^{(i)} = 0$ прямые $l_{\,i,j}$, $l_{\,i,k}$ параллельны; при $q_{j,k-1}^{(i)} \neq 0$ эти прямые пересекаются в точке

$$\upsilon_0 = (c_{i,k}\, p_{j,k}^{(i)} - c_{i,j})/q_{j,k-1}^{(i)}, \quad \upsilon_i = (c_{i,j}\, \sigma_{k-1}^{(i)} - c_{i,k}\, p_{j,k}^{(i)}\, \sigma_{j-1}^{(i)})/q_{j,k-1}^{(i)}, \tag{43}$$

где $i \in \overline{1,m}$, $j,k \in \overline{1,n+1}$, $j < k$ (как и выше, здесь принято $c_{i,n+1} = 0$, $\alpha_{i,n+1} = 1$).

Пусть a — фиксированное значение из промежутка $[a^*, \bar{a}_{D''}]$. Оптимальное решение $\tilde{u}(a)$ задачи $P(a)$ является одной из вершин ее допустимого множества. Как мы видели выше, эта вершина может быть только одного из двух типов (31), (32), причем в обоих случаях имеется свой промежуток (33) изменения величины a.

Предположим, что $I = (i_1, i_2, \ldots, i_\ell) \subseteq \overline{1,m} \setminus \{i\}$, $J = (j_1, j_2, \ldots, j_\ell) \subseteq \overline{1,n})$, $j < k$ $(i \in \overline{1,m},\ j,k \in \overline{1,n})$ и $q_{j,k-1}^{(i)} \neq 0$. Обозначим через $\upsilon_{j,k}^{i}(I,J)$ точку $\upsilon = (\upsilon_0, \upsilon_i, \ldots, \upsilon_m)$, где

$$\begin{cases} \upsilon_0 = \big(c_{i,k}\, p_{j,k}^{(i)} - c_{i,j}\big)/q_{j,k-1}^{(i)}, \\ \upsilon_i = \big(c_{i,j}\sigma_{k-1}^{(i)} - c_{i,k}\, p_{j,k}^{(i)}\, \sigma_{j-1}^{(i)}\big)/q_{j,k-1}^{(i)}, \\ \upsilon_s = \sigma^{(s)}\,\big(c_{i,j} - c_{i,k}\, p_{j,k}^{(i)}\big)/q_{j,k-1}^{(i)} \quad (\forall s \notin I \cup \{i\}), \\ \upsilon_{i_r} = c_{i_r,j_r}\pi_{j_r}^{(i_r)} + \sigma_{j_r-1}^{(i_r)}\big(c_{i,j} - c_{i,k}\, p_{j,k}^{(i)}\big)/q_{j,k-1}^{(i)} \quad (\forall r \in \overline{1,\ell}\,). \end{cases} \tag{44}$$

Соответственно через $\upsilon^i_j(I,J)$ обозначим точку с координатами

$$\begin{cases} \upsilon_0 = -c_{i,j}/q^{(i)}_{j,k-1}, \\ \upsilon_i = c_{i,j}\,\sigma^{(i)}/q^{(i)}_{j,k-1}, \\ \upsilon_s = c_{i,j}\sigma^{(s)}/q^{(i)}_{j,k-1} \quad (\forall s\notin I\cup\{i\}), \\ \upsilon_{i_r} = c_{i_r,j_r}\pi^{(i_r)}_{j_r} + c_{i,j}\sigma^{(i_r)}_{j_r-1}/q^{(i)}_{j,k-1} \quad (\forall r\in\overline{1,\ell}\,). \end{cases} \tag{45}$$

Очевидно, точки $\upsilon^i_{j,k}(I,J)$, $\upsilon^i_j(I,J)$ (и только они) — вершины многогранника задачи $P^*(a)$, если являются допустимыми. Множество всех вершин вида (44), (45) будем обозначать через $\mathcal{V}$.

Следующее утверждение устанавливает соответствие между оптимальными вершинами задач $P(a)$, $P^*(a)$, явно указывая эти вершины.

Лемма 1. *Существуют такие индексы $i\in\overline{1,m}$, $j,k\in\overline{1,n}$ $(j<k)$ и множества $I=\{i_1,i_2,\ldots,i_\ell\}\subseteq\overline{1,m}\setminus\{i\}$, $J=\{j_1,j_2,\ldots,j_\ell\}\subseteq\overline{1,n}$, что если вершина $\upsilon^i_{j,k}(I,J)$ (соответственно $\upsilon^i_j(I,J)$) является оптимальной для задачи $P^*(a)$, то вершина $u^i_{j,k}(I,J,a)$ из* (32) *(соответственно вершина $u^i_j(I,J,a)$ из* (31)) *является оптимальной для задачи $P(a)$.*

Доказательство. Заметим сначала, что при определении точки $\upsilon^i_{j,k}(I,J)$ предполагалось $q^{(i)}_{j,k-1}\neq 0$, поэтому точки $u^i_{j,k}(I,J,a)$, $u^i_j(I,J,a)$ существуют. Если вершина $\upsilon^i_{j,k}(I,J)$ является оптимальной, то в i-й группе ограничений активными являются неравенства (i,j), (i,k), и координаты υ_0, υ_i вершины определяются точкой пересечения (43) прямых $l_{\,i,\,j}$, $l_{\,i,\,k}$.

Покажем сначала, что точка $u^i_{j,k}(I,J,a)$ является допустимой для $P(a)$. Учитывая, что

$$\upsilon_{i_r} = c_{i_r,j_r}\pi^{(i_r)}_{j_r} - \sigma^{(i_r)}_{j_r-1}\upsilon_0 \quad (\forall r\in\overline{1,\ell}), \quad \upsilon_s = -\sigma^{(s)}\upsilon_0 \quad (\forall s\notin I\cup\{i\})$$

и обозначая

$$c(I) = \sum_{r=1}^{\ell} c_{i_r,j_r}\pi^{(i_r)}_{j_r} f_{i_r}(a), \quad S(a) = \sum_{r=1}^{\ell}\sigma^{(i_r)}_{j_r-1}f_{i_r}(a) + \sum_{s\notin I\cup\{i\}}\sigma^{(s)}f_s(a),$$

находим

$$d\big(\upsilon^i_{j,k}(I,J),a\big) = \upsilon_0\,a + \upsilon_i f_i(a) + \sum_{s\notin I\cup\{i\}}\upsilon_s f_s(a) + \sum_{r=1}^{\ell}\upsilon_{i_r}f_{i_r}(a) = \upsilon_0\,\big(a - S(a)\big) + \upsilon_i f_i(a) + c(I).$$

Введем в рассмотрение следующие векторы на плоскости переменных υ_0, υ_i:

$$n_i = \big(a - S(a), f_i(a)\big), \quad n^i_j = \big(\sigma^{(i)}_{j-1},1\big), \quad n^i_k = \big(\sigma^{(i)}_{k-1},1\big).$$

Поскольку последнее слагаемое $c(I)$ в полученном выше выражении для $d(\upsilon^i_{j,k}(I,J),a)$ не зависит от a, из условий оптимальности вершины $\upsilon^i_{j,k}(I,J)$ на плоскости переменных υ_0, υ_i имеем $n_i = \alpha n^i_j + \beta n^i_k$, где $\alpha\ge 0$, $\beta\ge 0$. Расписывая последнее равенство покоординатно, получаем

$$\alpha+\beta = f_i(a), \quad \alpha\sigma^{(i)}_{j-1} + \beta\sigma^{(i)}_{k-1} = a - S(a).$$

Подставляя $\beta = f_i(a)-\alpha$ во второе равенство, имеем

$$a - S(a) = \alpha\sigma^{(i)}_{j-1} + (f_i(a)-\alpha)\sigma^{(i)}_{k-1} = \alpha(\sigma^{(i)}_{j-1}-\sigma^{(i)}_{k-1}) + \sigma^{(i)}_{k-1}f_i(a),$$

т. е. $\alpha = \big(a - S(a) - \sigma^{(i)}_{k-1}f_i(a)\big)/\big(\sigma^{(i)}_{j-1}-\sigma^{(i)}_{k-1}\big)$. Величина $\sigma^{(i)}_j$ является монотонно возрастающей по нижнему индексу, поэтому из неотрицательности α следует, что $a - S(a) - \sigma^{(i)}_{k-1}f_i(a)\le 0$, или $a - S(a) \le \sigma_{k-1}^{(i)} f_i(a)$. Точно так же из неотрицательности величины β можно получить $a - S(a) \ge \sigma_{j-1}^{(i)} f_i(a)$. Далее, с учетом обозначений (18), (30) выводим

$$\sigma_{j-1}^{(i)} f_i(a) \le a - S(a) \le \sigma_{k-1}^{(i)} f_i(a) \Rightarrow \sigma_{j-1}^{(i)} f_i(a) + S(a) \le a \le S(a) + \sigma_{k-1}^{(i)} f_i(a)$$
$$\Rightarrow \bar{S}_{j-1}^{(i)}(I, J', a) \le a \le \bar{S}_{k-1}^{(i)}(I, J', a) \Rightarrow a \in \bar{\Delta}_{j,k}^{i}(I, J, a).$$

Последнее включение в силу (33), (34) означает, что точка $u_{j,k}^{i}(I, J, a)$ допустима. В этом случае она является вершиной многогранника задачи $P(a)$.

Докажем ее оптимальность. Обозначим $q' = 1/q_{j,k-1}^{(i)}$. Имеем цепочку равенств

$$d\big(\upsilon_{j,k}^{i}(I, J), a\big) = \upsilon_0 a + \upsilon_i f_i(a) + \sum_{s \notin I \cup \{i\}} \upsilon_s f_s(a) + \sum_{r=1}^{\ell} \upsilon_{i_r} f_{i_r}(a) = c_{i,k}\, p_{j,k}^{(i)}\, q' a - c_{i,j}\, q' a$$
$$+ c_{i,j} q' \sigma_{k-1}^{(i)} f_i(a) - c_{i,k}\, p_{j,k}^{(i)}\, q' \sigma_{j-1}^{(i)} f_i(a) + c_{i,j}\, q' \sum_{s \notin I \cup \{i\}} \sigma^{(s)} f_s(a) - c_{i,k}\, p_{j,k}^{(i)}\, q' \sum_{s \notin I \cup \{i\}} \sigma^{(s)} f_s(a)$$
$$+ c(I) - c_{i,k}\, p_{j,k}^{(i)}\, q' \sum_{r=1}^{\ell} \sigma_{j_r-1}^{(i_r)} f_{i_r}(a) + c_{i,j} \sum_{r=1}^{\ell} \sigma_{j_r-1}^{(i_r)} f_{i_r}(a) = c_{i,j}\, q' \Big[\sigma_{k-1}^{(i)} f_i(a) + \sum_{s \notin I \cup \{i\}} \sigma^{(s)} f_s(a)$$
$$+ \sum_{r=1}^{\ell} \sigma_{j_r-1}^{(i_r)} f_{i_r}(a) - a\Big] + c_{i,k}\, p_{j,k}^{(i)}\, q' \Big[a - \sigma_{j-1}^{(i)} f_i(a) - \sum_{s \notin I \cup \{i\}} \sigma^{(s)} f_s(a) - \sum_{r=1}^{\ell} \sigma_{j_r-1}^{(i_r)} f_{i_r}(a)\Big] + c(I)$$
$$= c_{i,j} q' \Big[\bar{S}_{j_1-1,\ldots,j_\ell-1,k-1}^{i_1,\ldots,i_\ell,i}(a) - a\Big] + c_{i,k} p_{j,k}^{(i)} q' \Big[a - \bar{S}_{j_1-1,\ldots,j_\ell-1,j-1}^{i_1,\ldots,i_\ell,i}(a)\Big] + c(I) = c\big(u_{j,k}^{i}(I, J, a)\big).$$

Полученное равенство значений целевых функций прямой и двойственной задач показывает, что вершина $u_{j,k}^{i}(I, J, a)$ является оптимальной.

Оптимальность вершины $u_{j}^{i}(I, J, a)$ в случае оптимальности вершины $\upsilon_{j}^{i}(I, J)$ доказывается аналогично. □

Следующее утверждение сводит решение задачи (40) к серии задач одномерной оптимизации.

Утверждение 1. *Оптимальное значение* $\tilde{c}$ *задачи* (40) *совпадает с величиной*

$$\bar{d} = \max\{\, d(\upsilon, a) \mid \upsilon \in \mathcal{V},\ a \in \Delta(\upsilon)\}, \tag{46}$$

где $\mathcal{V}$ *— множество всех вершин многогранника ограничений задачи* (40),

$$\Delta(\upsilon) = \begin{cases} \big[\, a_j^{(i)}(I, J), a_k^{(i)}(I, J)\,\big], & \upsilon = \upsilon_{j,k}^{i}(I, J, a), \\ \big[\, a_j^{(i)}(I, J), a_{n+1}^{(i)}(I, J)\,\big], & \upsilon = \upsilon_{j}^{i}(I, J, a) \end{cases} \quad (i \in \overline{1, m},\ j, k \in \overline{1, n},\ j < k). \tag{47}$$

Здесь $a_\ell^{(i)}(I, J)$ *— решение уравнения*

$$\bar{S}_{\ell-1}^{(i)}(I, J', a) = a \quad (i \in \overline{1, m},\ \ell \in \overline{1, n+1}\,) \tag{48}$$

(*см. обозначения* (19)).

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем, например, для вершин $u = u_{j,k}^{i}(I, J, a)$, $\upsilon = \upsilon_{j,k}^{i}(I, J, a)$. Покажем сначала, что

$$a \in \Delta(u, a) \Leftrightarrow a \in \Delta(\upsilon). \tag{49}$$

Действительно, из (17), (19) видно, что функции $\bar{S}_{\ell-1}^{(i)}(I, J', a)$ являются вогнутыми и отношения $\bar{S}_{\ell-1}^{(i)}(I, J', a)/a$ монотонно убывающие ($\ell = j,\ k$). Отсюда получаем

$$a \in \Delta(u, a) \Leftrightarrow a \in \bar{\Delta}_{j,k}^{i}(I, J, a) \Leftrightarrow a \in \big[\,\bar{S}_{j-1}^{(i)}(I, J', a),\ \bar{S}_{k-1}^{(i)}(I, J', a)\,\big] \Leftrightarrow \bar{S}_{j-1}^{(i)}(I, J', a)/a$$
$$\le \bar{S}_{j-1}^{(i)}(I, J', a_j^{(i)}(I, J))/a_j^{(i)}(I, J) = 1 = \bar{S}_{k-1}^{(i)}(I, J', a_k^{(i)}(I, J))/a_k^{(i)}(I, J)$$
$$\le \bar{S}_{k-1}^{(i)}(I, J', a)/a \Leftrightarrow a_j^{(i)}(I, J) \le a \le a_k^{(i)}(I, J) \Leftrightarrow a \in \Delta(\upsilon), \tag{50}$$

и (49) доказано.

Если оптимальное значение $\tilde{c}$ задачи (40) достигается при $a = \tilde{a}$, то в соответствии с (34) $\tilde{a} \in \Delta(u, \tilde{a})$, и в силу (49) $\tilde{a} \in \Delta(v)$. Оптимальное значение $\tilde{c}$ является общим значением целевых функций задач $P(\tilde{a})$, $P^*(\tilde{a})$. Поскольку $\tilde{c}$ достигается на одной из вершин $v \in \mathcal{V}$ и $\tilde{a} \in \Delta(v)$, справедливо $\bar{d} \geq \tilde{c}$.

Предположим, что $\bar{d} > \tilde{c}$. Пусть максимум в (46) достигается при $a = \bar{a}$ на вершине $\bar{v} \in \mathcal{V}$. Тогда $\bar{v}$ — вершина, оптимальная для задачи $P^*(\bar{a})$, и согласно лемме 1 существует вершина $\bar{u} \in V(\bar{a})$, оптимальная для задачи $P(\bar{a})$, причем $c(\bar{u}) = \bar{d} > \tilde{c}$. Но это противоречит оптимальности значения $\tilde{c}$. Отсюда $\tilde{c} = \bar{d}$, что и требовалось доказать. □

Заметим, что промежуток $\Delta(v)$ в отличие от $\Delta(u, a)$ из (33) не зависит от величины a, но для его нахождения требуется решение двух уравнений вида (48). Однако свойство (49) избавляет от необходимости решать эти уравнения для проверки условия $a \in \Delta(v)$, сводя ее к простому нахождению промежутка $\Delta(a) = \Delta(u, a)$ при конкретном a.

Допустимое множество задачи $P^*(a)$ не зависит от параметра a. Как видно из (41)–(42), его ограничения разделены на m групп, связанных между собой только одной переменной v_0. Ограничения i-й группы задаются прямыми в системе координат v_0, v_i, взаимное расположение которых имеет ряд особенностей, облегчающих нахождение активных ограничений.

Следующее утверждение как раз демонстрирует некоторые из этих особенностей.

Лемма 2. *Пусть* $i \in \overline{1,m}$, $j \in \overline{1,n}$, $k \in \overline{j+1,n+1}$, $s \in \overline{1,m} \setminus \{i\}$ *и* $q^{(i)}_{j,k-1} > 0$. *Обозначим*

$$P^i_k = \big\{(v_0, v_i) \mid \sigma^{(i)}_{k-1} v_0 + v_i \geq c_{i,k}\pi^{(i)}_k\big\} \quad (i \in \overline{1,m},\ k \in \overline{1,n+1}\,),$$

$$L^i_j = \big\{(v_0, v_i) \mid \sigma^{(i)}_{j-1} v_0 + v_i = c_{i,j}\pi^{(i)}_j,\ v_0 \geq (c_{i,k}p^{(i)}_{j,k} - c_{i,j})/q^{(i)}_{j,k-1}\big\} \quad (i \in \overline{1,m},\ j \in \overline{1,n+1}\,),$$

$$\Lambda^i_k = \big\{(v_0, v_i) \mid \sigma^{(i)}_{k-1} v_0 + v_i = c_{i,k}\pi^{(i)}_k,\ v_i \geq (c_{i,j}\sigma^{(i)}_{k-1} - c_{i,k}p^{(i)}_{j,k}\sigma^{(i)}_{j-1})/q^{(i)}_{j,k-1}\big\} \ (i \in \overline{1,m},\ k \in \overline{1,n+1}),$$

$$\bar{v}_s = \max_{j \in \overline{1,n+1}} v_s(j), \quad j_s \in \operatorname{Arg} \max_{j \in \overline{1,n+1}} v_s(j), \tag{51}$$

$$v_s(j) = c_{s,j}\pi^{(s)}_j - \sigma^{(s)}_{j-1} v_0 \quad (v_0 \in \mathbb{R},\ s \in \overline{1,m} \setminus \{i\},\ j \in \overline{1,n+1}). \tag{52}$$

Тогда справедливы следующие свойства:

(1) $L^i_j \subset P^i_k$; (2) $\Lambda^i_k \subset P^i_j$; (3) $\sigma^{(s)}_{j-1} v_0 + \bar{v}_s \geq c_{s,j}\pi^{(s)}_j$ $(\forall j \in \overline{1,n+1})$.

Доказательство. (1) Пусть v^i_j — направляющий вектор прямой $l_{i,j}$, направленный в сторону увеличения переменной v_0, n^i_k — вектор нормали прямой $l_{i,k}$, направленный в положительную полуплоскость, соответствующую неравенству (i,k). Тогда, очевидно, $v^i_j = \big(1, -\sigma^{(i)}_{j-1}\big)$, $n^i_k = \big(\sigma^{(i)}_{k-1}, 1\big)$ и $\langle v, n^i_k \rangle = \sigma^{(i)}_{k-1} - \sigma^{(i)}_{j-1} = \pi^{(i)}_j q^{(i)}_{j,k-1} > 0$, откуда следует (1). Свойство (2) доказывается аналогично.

(3) Имеем $\bar{v}_s = c_{s,j_s}\pi^{(s)}_{j_s} - \sigma^{(s)}_{j_s-1} v_0 \geq c_{s,j}\pi^{(s)}_j - \sigma^{(s)}_{j-1} v_0$ $(\forall v_0 \in \mathbb{R},\ j \in \overline{1,n+1})$, откуда следует свойство (3).

Лемма доказана. □

Заключения (1), (2) леммы 2 означают следующее. В i-й группе ограничений (41)–(42) неравенству (i,k) удовлетворяют все лучи прямых $l_{i,j}$ (от точки пересечения с прямой $l_{i,j}$ в сторону увеличения переменной v_0), соответствующих предшествующим ограничениям (i,j), где $j < k$. Неравенству (i,j) удовлетворяют все лучи прямых $l_{i,k}$ (от точки пересечения с прямой $l_{i,k}$ в сторону увеличения переменной v_i), соответствующих последующим ограничениям (i,k), где $k > j$.

Заключение (3) означает, что при любом $v_0 \in \mathbb{R}$ точка $(v_0, \bar{v}_s)$ пересечения вертикальной прямой $v_0 = \mathrm{const}$ с прямой $l_{s,j}$, дающей наибольшую координату v_s среди прямых s-й группы ограничений (41)–(42), является допустимой для этой группы ограничений, и точки с меньшими значениями координаты v_s не являются допустимыми.

Перейдем к описанию работы алгоритма.

3.2. Описание алгоритма решения задачи (2) для отображения F вида (4)

Согласно утверждению 1 решение рассматриваемой задачи оптимальной эксплуатации системы сводится к решению ряда задач максимизации одномерной функции на некоторых отрезках, соответствующих вершинам многогранника системы неравенств (41)–(42). Лемма 2 дает возможность построить экономный алгоритм нахождения этих вершин.

Пусть задано некоторое фиксированное значение $i \in \overline{1,m}$. Как нетрудно заметить, в i-й группе ограничений (41)–(42) первому неравенству $(i,1)$ (или нескольким первым неравенствам, если часть начальных коэффициентов $\beta_{i,j} = 0$) соответствует горизонтальная прямая на плоскости переменных υ_0, υ_i. Это неравенство (или такое неравенство с наибольшим номером j) является первым активным ограничением.

Следующее активное ограничение в i-й группе ограничений согласно заключению (1) леммы 2 дает прямая $l_{i,j}$, имеющая в точке пересечения с горизонтальной прямой, соответствующей первому активному ограничению, наибольшую координату υ_0 по сравнению с другими прямыми той же группы. Если таких прямых несколько, следует выбрать прямую $l_{i,j}$ с наибольшим номером j. Точка пересечения (43) прямых, соответствующих этим двум активным ограничениям, дает координаты υ_0, υ_i вершины многогранника.

Другие ее координаты находятся из ограничений остальных групп с номерами из $\overline{1,m} \setminus \{i\}$. В силу заключения (3) леммы 2, чтобы получить вершину, необходимо в качестве активного ограничения в s-й группе ограничений взять неравенство (s,j), для которого точка (υ_0, υ_s) прямой $l_{s,j}$ $(j \in \overline{1,n+1})$ при найденном ранее значении υ_0 имеет наибольшую координату υ_s среди прямых, соответствующих ограничениям s-й группы (см. (51)–(52)).

Таким образом, точка $\upsilon^i_{k,\ell}(I,J) = (\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_m)$ $(i \in \overline{1,m},\ k \in \overline{1,n},\ \ell \in \overline{k+1,n+1})$, где

$$\begin{cases} \upsilon_0 = (c_{i,\ell}\, p^{(i)}_{k,\ell} - c_{i,k})/q^{(i)}_{k,\ell-1}, \\ \upsilon_i = (c_{i,k}\, \sigma^{(i)}_{\ell-1} - c_{i,\ell}\, p^{(i)}_{k,\ell}\, \sigma^{(i)}_{k-1})/q^{(i)}_{k,\ell-1}, \\ \upsilon_s = \upsilon_s(j_s) \quad (\forall s \in \overline{1,m} \setminus \{i\}), \\ j_s \in \operatorname{Arg} \max\limits_{j \in \overline{1,n+1}} \upsilon_s(j), \end{cases} \tag{53}$$

$$\upsilon_s(j) = c_{s,j}\pi^{(s)}_j - \sigma^{(s)}_{j-1}\upsilon_0 \quad (s \in \overline{1,m} \setminus \{i\}), \tag{54}$$

удовлетворяет системе неравенств задачи (40), причем $m+1$ из них выполняются в форме равенств; следовательно, точка $\upsilon^i_{k,\ell}(I,J)$ является вершиной этой системы ограничений. Заметим, что при $\ell = n+1$ вершина $\upsilon^i_{k,\ell}(I,J)$ совпадает с вершиной $\upsilon^i_k(I,J)$ из (45). Здесь

$$I = \overline{1,m} \setminus \{i\}, \quad J = \{j_s \mid s \in I\}. \tag{55}$$

Если при некотором $s \in I$ индекс j_s в (53) определяется неоднозначно, то необходимо рассмотреть все возможные множества J для данного I.

Покажем, что можно определить такие множества $K(\mathcal{V}_i) = \{k^{(i)}_0, k^{(i)}_1, \ldots, k^{(i)}_{r_i}\}$ $(i \in \overline{1,m})$, что множество всех вершин $\mathcal{V}(a)$ многогранника задачи $P^*(a)$ представимо в виде

$$\mathcal{V}(a) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{V}_i(a), \quad \mathcal{V}_i(a) = \bigl\{ \upsilon^i(s) = \upsilon^i\bigl(k^{(i)}_{s-1}, k^{(i)}_s\bigr) \mid s \in \overline{1,r_i} \bigr\},$$

где $\mathcal{V}_i(a)$ — множество всех вершин (53) (в обозначении вершины $\upsilon^i(k^{(i)}_{s-1}, k^{(i)}_s)$ опущены множества I, J, поскольку задание индексов i, k, ℓ однозначно определяет эти множества).

Алгоритм построения множеств $K(\mathcal{V}_i)$ $(i \in \overline{1,m}\,)$ начинает работу с $i = 1$. Полагаем

$$k^{(i)}_0 = \begin{cases} 1, & j_+(i) = 1, \\ \max K^i_0, & j_+(i) > 1, \end{cases} \tag{56}$$

где

$$K_0^i = \operatorname{Arg}\max H_0^i, \quad H_0^i = \{c_{i,j}\pi_j^{(i)} \mid j \in \overline{1, j_+(i)}\}. \tag{57}$$

Здесь $j_+(i) = \min J_i^+$, $J_i^+ = \{j \in \overline{1,n} \mid \beta_{i,j} > 0\}$.

Если $k_\ell^{(i)} \le n$ определено, то

$$k_{\ell+1}^{(i)} = \begin{cases} \max K_{\ell+1}^i, & k_\ell^{(i)} < \max C_i^+, \\ n+1, & k_\ell^{(i)} = \max C_i^+, \end{cases} \tag{58}$$

где $K_{\ell+1}^i = \operatorname{Arg}\max H_{\ell+1}^i$,

$$H_{\ell+1}^i = \{(c_{i,j}p_{k_\ell^{(i)},j}^{(i)} - c_{i,k_\ell^{(i)}})/q_{k_\ell^{(i)},j-1}^{(i)} \mid j \in \overline{k_\ell^{(i)}+1, n+1} \cap \widehat{C}_i^+ \cap Q_{k_\ell^{(i)}}^{i+}\}. \tag{59}$$

Здесь $Q_{k_\ell^{(i)}}^{i+} = \{j \in \overline{1,n} \mid q_{k_\ell^{(i)},j-1}^{(i)} > 0\}$, $C_i^+ = \{j \in \overline{1,n} \mid c_{i,j} > 0\}$, $\widehat{C}_i^+ = C_i^+ \cup \{n+1\}$.

В результате этого процесса будет построено множество $K(\mathcal{V}_1)$, что позволяет перейти к нахождению соответствующего множества вершин. Для найденной из (53) (сначала для $s = 1$) вершины $\upsilon^i(s)$ введем обозначения: $d_s^{(i)} = \max\limits_{a \in \Delta(\upsilon^i(s))} d(\upsilon^i(s), a)$, $\bar{a}_s^{(i)} = \arg\max\limits_{a \in \Delta(\upsilon^i(s))} d(\upsilon^i(s), a)$. Если функция $d(\upsilon^i(s), a)$ является монотонно возрастающей на $\mathbb{R}_+$, то величина $d_s^{(i)}$ достигается на правой границе промежутка $\Delta(\upsilon^i(s))$; в противном случае определена величина $\bar{a} = \arg\max\limits_{a \ge 0} d(\upsilon^i(s), a)$. В этом случае при $\bar{a} \in \Delta(\upsilon^i(s), \bar{a})$ имеем $d_s^{(i)} = d(\upsilon^i(s), \bar{a})$ и $\bar{a}_s^{(i)} = \bar{a}$; иначе значение $d_s^{(i)}$ достигается в ближайшей к точке $\bar{a}$ границе промежутка $\Delta(\upsilon^i(s))$. Таким образом, потребуется решить либо задачу безусловной оптимизации, либо одно из уравнений $\bar{S}_{j-1}^{(i)}(I, J', a) = a$ $(j \in \{k, \ell\})$ для нахождения одной из границ $a_k^{(i)}(I, J)$, $a_\ell^{(i)}(I, J)$ промежутка $\Delta(\upsilon^i(s))$ (см. обозначения (47)).

Как уже отмечалось выше, в силу (49) проверку условия $\bar{a} \in \Delta(\upsilon^i(s))$ можно заменить более простой проверкой включения $\bar{a} \in \Delta(\bar{a}) = \Delta(u, \bar{a})$, где $u = u(I, J, a)$ определено в (33).

Эти шаги алгоритма последовательно повторяются для всех вершин $\upsilon^i(s)$ $(s = 1, \ldots, r_i)$ при данном i и всех $i \in \overline{1,m}$. По завершении этого процесса находится $\max\limits_{i,s} d_s^{(i)}$. Если это значение достигается на вершине $\upsilon^i(s)$, то решение задачи (38) в соответствии с (13), (31), (32) определяется следующим образом (множества I, J определены в (55)):

$$\tilde{c} = c(\tilde{u}), \quad \tilde{u} = \begin{cases} u_{k_{s-1}^{(i)}, k_s^{(i)}}^i(I, J, \bar{a}_s^{(i)}), & k_s^{(i)} < n+1, \\ u_{k_{s-1}^{(i)}}^i(I, J, \bar{a}_s^i), & k_s^{(i)} = n+1, \end{cases} \quad \tilde{x} = x(\bar{a}_s^{(i)}, \tilde{u}). \tag{60}$$

Таким образом, для решения задачи (38) достаточно решить не более mn задач одномерной оптимизации по нахождению величин $\bar{a}_s^{(i)} = \arg\max\limits_{a \ge 0} d(\upsilon^i(s), a)$.

Приведем примеры, иллюстрирующие работу алгоритма. Первый пример показывает возможность для $\tilde{a} = a(\tilde{x})$ быть как граничной, так и внутренней точкой промежутка $\Delta(\upsilon^i(s))$; второй пример демонстрирует случай бесчисленного множества оптимальных решений.

П р и м е р 1. Рассмотрим задачу вида (38) для следующих данных: $m = 2$, $n = 3$, $f_1(a) = f_2(a) = \sqrt{a}$, $\alpha_{1,2} = \alpha_{2,1} = \alpha_{2,2} = 1/2$, $\beta_{1,1} = \beta_{1,2} = 3$, $\beta_{1,3} = 0$, $\beta_{2,1} = \beta_{2,3} = 4$, $\beta_{2,2} = 2$.

В соответствии с обозначениями (9)–(12) находим $p_{1,1}^{(1)} = \pi_1^{(1)} = 1$, $p_{1,2}^{(1)} = \pi_2^{(1)} = 1/3$, $p_{1,3}^{(1)} = p_{1,4}^{(1)} = \pi_{1,3}^{(1)} = \pi_{1,4}^{(1)} = \pi^{(1)} = 1/6$, $p_{1,1}^{(2)} = \pi_1^{(2)} = 1$, $p_{1,2}^{(2)} = \pi_2^{(2)} = 1/2$, $p_{1,3}^{(2)} = p_{1,4}^{(2)} = \pi_{1,3}^{(2)} = \pi_{1,4}^{(2)} = \pi^{(2)} = 1/4$, $\sigma_1^{(1)} = 3$, $\sigma_2^{(1)} = \sigma_3^{(1)} = \sigma^{(1)} = 4$, $\sigma_1^{(2)} = 4$, $\sigma_2^{(2)} = 5$, $\sigma_3^{(2)} = \sigma^{(2)} = 6$, $q_{1,1}^{(1)} = 3$, $q_{1,2}^{(1)} = 4$, $q_{1,3}^{(1)} = 4$, $q_{2,2}^{(1)} = 3$, $q_{2,3}^{(1)} = 3$, $q_{3,3}^{(1)} = 0$, $q_{1,1}^{(2)} = 4$, $q_{1,2}^{(2)} = 5$, $q_{1,3}^{(2)} = 6$, $q_{2,2}^{(2)} = 2$, $q_{2,3}^{(2)} = 4$, $q_{3,3}^{(2)} = 4$, $\lambda_1(a) = \sqrt{a}/6$, $\lambda_2(a) = \sqrt{a}/4$, $\sigma(a) = 10\sqrt{a}$, $\mu(a) = 10\sqrt{a} - a$.

Функция $f_1(a) = f_2(a) = \sqrt{a}$ вогнута и строго возрастает; условия (5), (7), очевидно, выполнены. Решая задачу $\max\limits_{a\geq 0}(10\sqrt{a}-a)$, находим $a^* = \mu^* = 25$ и $f_1(a^*) = f_2(a^*) = 5$.

Ввиду (11) уравнение гиперплоскости $q(u) = \mu^*$, содержащей сохраняющие управления, имеет вид $4u_{1,1} + 3u_{1,2} + 6u_{2,1} + 4u_{2,2} + 4u_{2,3} = 25$.

Из (20) при $j = 0$ получаем $\bar{S}_0^{(1)}(a^*) = \bar{S}^{(1)}(a^*) = \sigma^{(2)} f_2(a^*) = 30 > a^*$, поэтому исходя из (21), (22) $I_1^* = \varnothing$, $J_1^* = \{1,2\}$. Поскольку $a^* \in \bar{\Delta}^2_{1,2}(a^*) = \big[\bar{S}_0^{(2)}(a^*), \bar{S}_1^{(2)}(a^*)\big] = [20, 40]$, имеем $I_2^* = \{1\}$, $J_2^* = \{2\}$, $I^* = \{2\}$. Отсюда $J^* = \{1,2\} \neq \varnothing$ и $D'' \neq \varnothing$.

Решая согласно (23), (24) уравнения $9\sqrt{a} = a$, $10\sqrt{a} = a$ из (23) при $j = n-1$ и выбирая наибольшее решение, получаем $\bar{a}_D = \bar{a}_{D''} = 100$.

(1) Пусть $c = (2,3,6;4,4,4)$.

Сохраняющего оптимального управления не существует, поскольку условие (35) нарушено в силу $q^{(1)}_{3,3} = 0$, $c_{1,3} > 0$. Ограничения двойственной задачи имеют следующий вид:

$$
\begin{array}{llll}
(1)\ \upsilon_1 \geq 2, & (2)\ 3\upsilon_0 + \upsilon_1 \geq 1, & (1')\ \upsilon_2 \geq 4, & (2')\ 4\upsilon_0 + \upsilon_2 \geq 2,\\
(3)\ 4\upsilon_0 + \upsilon_1 \geq 1, & (4)\ 4\upsilon_0 + \upsilon_1 \geq 0, & (3')\ 5\upsilon_0 + \upsilon_2 \geq 1, & (4')\ 6\upsilon_0 + \upsilon_2 \geq 0.
\end{array}
$$

Найдем $K(\mathcal{V}_1)$. С учетом (56) имеем $k_0^{(1)} = 1$. Из (58), (59) находим $H_1^1 = \big\{(c_{i,j}p^{(1)}_{1,j} - c_{1,1})/q^{(1)}_{1,j-1} \mid j \in \overline{2,4}\big\} = \big\{-1/3, -1/4, -1/2\big\}$, $k_1^{(1)} = \arg\max H_1^1 = 3$. В силу $q^{(1)}_{3,3} = 0$ процесс построения $K(\mathcal{V}_1)$ на этом заканчивается, и $K(\mathcal{V}_1) = \big\{1,3\big\}$.

Найдем вершину $\upsilon^1(1) = \upsilon^1_{1,3}(I,J)$. Согласно (53) $\upsilon_0 = -1/4$, $\upsilon_1 = 2$. Из (54) имеем $\max\limits_{j\in\overline{1,4}} \upsilon_2(j) = \max\big\{4, 3, 9/4, 3/2\big\} = 4$, поэтому $\upsilon_2 = 4$, $j_2 = 1$, $I = \big\{2\big\}$, $J = \big\{1\big\}$. Отсюда $\upsilon^1(1) = \upsilon^1_{1,3}(I,J) = (-1/4, 2, 4)$ и $d(a) = d(\upsilon^1(1), a) = 6\sqrt{a} - a/4$.

Решая задачу $\max\limits_{a\geq 0} d(a)$, получаем $\bar{a} = 144$. Далее, $\Delta(\bar{a}) = \bar{\Delta}^1_{0,2}(2(1), \bar{a}) = \big[0, 4\sqrt{\bar{a}}\,\big] = [\,0, 48\,]$ и $\bar{a} \notin \Delta(\bar{a})$ ввиду (33), (30), (19). Решая уравнение $4\sqrt{a} = a$, находим $a_1^{(1)}(I,J) = 16$, и максимальное значение целевой функции на этом промежутке $d_1^{(1)} = d(16) = 20$.

Найдем $K(\mathcal{V}_2)$. Очевидно, $k_0^{(2)} = 1$. Имеем $H_1^2 = \big\{(c_{2,j}p^{(2)}_{1,j} - c_{2,1})/q^{(2)}_{1,j-1} \mid j \in \overline{2,4}\big\} = \big\{-1/2, -3/5, -2/3\big\}$, $k_1^{(2)} = \arg\max H_1^2 = 2$. Далее, $H_2^2 = \big\{(c_{2,j}p^{(2)}_{2,j} - c_{2,2})/q^{(2)}_{2,j-1} \mid j \in \overline{3,4}\big\} = \big\{-1, -1\big\}$, $K_2^2 = \big\{3,4\big\}$, $k_2^{(2)} = \max K_2^2 = 4$. Таким образом, $K(\mathcal{V}_2) = \big\{1,2,4\big\}$.

Найдем вершину $\upsilon^2(1) = \upsilon^2_{1,2}(I,J)$. Исходя из (53), (54) находим $\upsilon_0 = -1/2$, $\upsilon_2 = 4$ и $\max\limits_{j\in\overline{1,4}} \upsilon_1(j) = \max\big\{2, 5/2, 3, 2\big\} = 3$, поэтому $\upsilon_1 = 3$, $j_1 = 3$, $I = \big\{1\big\}$, $J = \big\{3\big\}$. Отсюда $\upsilon^2(1) = \upsilon^2_{1,2}(I,J) = \big(-1/2, 3, 4\big)$ и $d(a) = d(\upsilon^2(1), a) = -a/2 + 7\sqrt{a}$. Далее, $\bar{a} = \max\limits_{a\geq 0} d(a) = 49$, $\Delta(\bar{a}) = \bar{\Delta}^2_{0,1}(1(3), \bar{a}) = \big[\,4\sqrt{\bar{a}}, 8\sqrt{\bar{a}}\,\big] = [\,28, 56\,]$. Поскольку $\bar{a} \in \Delta(\bar{a})$, $d_1^{(2)} = d(49) = 49/2$.

Для вершины $\upsilon^2(2) = \upsilon^2_{2,4}(I,J)$ имеем $\upsilon_0 = -1$, $\upsilon_2 = 6$, $\max\limits_{j\in\overline{1,4}} \upsilon_1(j) = \max\big\{2, 4, 5, 4\big\} = 5$, поэтому $\upsilon_1 = 5$, $j_1 = 3$, $I = \big\{1\big\}$, $J = \big\{3\big\}$. Из (53) находим $\upsilon^2(2) = \upsilon^2_{1,2}(I,J) = (-1, 5, 6)$, $d(a) = d(\upsilon^2(2), a) = -a + 11\sqrt{a}$. Далее, $\bar{a} = \max\limits_{a\geq 0} d(a) = 121/4$ и $\Delta(\bar{a}) = \bar{\Delta}^2_{1,3}(1(3), \bar{a}) = \big[8\sqrt{\bar{a}}, 10\sqrt{\bar{a}}\,\big] = [\,44, 55\,]$, т. е. $\bar{a} \notin \Delta(\bar{a})$. Поэтому, решая уравнение $8\sqrt{a} = a$, находим $a_1^{(2)}(I,J) = 64$ и $d_2^{(2)} = d(64) = 24$.

Вершины и соответствующие им значения целевой функции найдены. Оптимальное значение $\tilde{c} = \max\big\{d_1^{(1)}, d_1^{(2)}, d_2^{(2)}\big\} = \max\{20, 49/2, 24\} = 49/2$ достигается на вершине $\upsilon^2(1) = \upsilon^2_{1,2}(1(3), 49)$. Отсюда в силу соотношений (60), (32) получаем оптимальное решение

$$\tilde{c} = 49/2, \quad \tilde{u} = \big(0, 0, 7/6; 7/4, 21/8, 0\big), \quad \tilde{x} = \big(7, 7/3, 0; 21/4, 0, 0\big).$$

(2) Пусть $c = (0,1,1;0,1,1)$.

Сохраняющего оптимального управления не существует по той же причине, что и в случае целевой функции (1). Ограничения двойственной задачи имеют в этом случае следующий вид:

(1) $\upsilon_1 \geq 0$,	(2) $3\upsilon_0 + \upsilon_1 \geq 1/3$,	(1′) $\upsilon_2 \geq 0$,	(2′) $4\upsilon_0 + \upsilon_2 \geq 1/2$,
(3) $4\upsilon_0 + \upsilon_1 \geq 1/6$,	(4) $4\upsilon_0 + \upsilon_1 \geq 0$,	(3′) $5\upsilon_0 + \upsilon_2 \geq 1/4$,	(4′) $6\upsilon_0 + \upsilon_2 \geq 0$.

Найдем $K(\mathcal{V}_1)$. Согласно (56) имеем $k_0^{(1)} = 1$. Из (58), (59) находим $H_1^1 = \big\{(c_{i,j}p_{1,j}^{(1)} - c_{1,1})/q_{1,j-1}^{(1)} \mid j \in \overline{2,4}\big\} = \big\{1/9, 1/24, 0\big\}$, $k_1^{(1)} = \arg\max H_1^1 = 2$. Далее, $H_2^1 = \big\{(c_{i,j}p_{2,j}^{(1)} - c_{1,2})/q_{2,j-1}^{(1)} \mid j \in \overline{3,4}\big\} = \big\{-1/6, -1/3\big\}$, $k_2^{(1)} = \arg\max H_2^1 = 3$. Процесс построения множества $K(\mathcal{V}_1)$ заканчивается, так как $q_{3,3}^{(1)} = \beta_{1,3} = 0$. Таким образом, $K(\mathcal{V}_1) = \big\{1, 2, 3\big\}$.

Найдем вершину $\upsilon^1(1) = \upsilon_{1,2}^1(I,J)$. Из (53), (54) имеем $\upsilon_0 = 1/9$, $\upsilon_1 = 0$, $\max\limits_{j \in \overline{1,4}} \upsilon_2^{(1)}(j) = \max\big\{0, 1/18, -11/36, -2/3\big\} = 1/18$, поэтому $j_2^{(1)} = 2$, $I = \big\{2\big\}$, $J = \big\{2\big\}$ и $\upsilon^1(1) = \upsilon_{1,2}^1(I,J) = (1/9, 0, 1/18)$, $d(a) = d(\upsilon^1(1), a) = \sqrt{a}/18 + a/9$. Далее, $\Delta(a) = \bar{\Delta}_{0,1}^1(2(2), a) = \big[4\sqrt{a}, 7\sqrt{a}\,\big]$. Функция $d(a)$ монотонно возрастает, поэтому находим решение $a_2^{(1)}(I,J) = 49$ уравнения $7\sqrt{a} = a$ и $d_1^{(1)} = d(49) = 35/6$.

Найдем вершину $\upsilon^1(2) = \upsilon_{2,3}^1(I,J)$. Имеем $\upsilon_0 = -1/6$, $\upsilon_1 = 5/6$, $\max\limits_{j \in \overline{1,4}} \upsilon_2^{(1)}(j) = \max\big\{0, 7/6, 13/12, 1\big\} = 7/6$, поэтому $j_2^{(1)} = 2$, $I = \big\{2\big\}$, $J = \big\{2\big\}$. Отсюда получаем $\upsilon^1(2) = \upsilon_{2,3}^1(I,J) = (-1/6, 5/6, 7/6)$, $d(a) = d(\upsilon^1(2), a) = 2\sqrt{a} - a/6$ и $\bar{a} = \arg\max\limits_{a \geq 0} d(a) = 36$, $\Delta(\bar{a}) = \bar{\Delta}_{1,2}^1(2(2), \bar{a}) = \big[7\sqrt{\bar{a}}, 8\sqrt{\bar{a}}\,\big] = [42, 48]$. Поскольку $\bar{a} \notin \bar{\Delta}(\bar{a})$, решая уравнение $7\sqrt{a} = a$, находим $a_1^{(1)}(I,J) = 49$ и $d_2^{(1)} = d(49) = 35/6$.

Найдем $K(\mathcal{V}_2)$. Имеем $k_0^{(2)} = 1$, $H_1^2 = \big\{(c_{2,j}p_{2,j}^{(1)} - c_{2,1})/q_{1,j-1}^{(2)} \mid j \in \overline{2,4}\,\big\} = \big\{1/8, 1/20, 0\big\}$, $k_1^{(2)} = \arg\max H_1^2 = 2$. Далее, $H_2^1 = \big\{(c_{2,j}p_{2,j}^{(1)} - c_{2,2})/q_{2,j-1}^{(1)} \mid j \in \overline{3,4}\big\} = \{-1/4, -1/4\}$, $K_2^2 = \big\{3, 4\big\}$, $k_2^{(2)} = \max K_2^2 = 4$. Таким образом, $K(\mathcal{V}_2) = \big\{1, 2, 4\,\big\}$.

Для вершины $\upsilon^2(1) = \upsilon_{1,2}^1(I,J)$ имеем $\upsilon_0 = 1/8$, $\upsilon_2 = 0$, $\max\limits_{j \in \overline{1,4}} \upsilon_1^{(2)}(j) = \max\limits_{j \in \overline{1,4}} \big\{c_{1,j}\pi_j^{(1)} - \sigma_{j-1}^{(1)}/8\big\} = \max\big\{0, -1/24, -1/3, -1/2\big\} = -1/24$, поэтому $j_1^{(2)} = 1$, $\upsilon_1 = 0$, $I = \{2\}$, $J = \{1\}$. Отсюда $\upsilon^2(1) = \upsilon_{1,2}^2(I,J) = (1/8, 0, 0)$, и функция $d(a) = d(\upsilon^2(1), a) = a/8$ является монотонно возрастающей. Поскольку $\Delta(a) = \bar{\Delta}_{0,1}^2(1(1), a) = \big[0, 4\sqrt{a}\,\big]$, решая уравнение $4\sqrt{a} = a$, получаем $a_1^{(2)}(I,J) = 16$ и $d_1^{(2)} = d(16) = 2$.

Найдем вершину $\upsilon^2(2) = \upsilon_{2,4}^2(I,J)$. Имеем $\upsilon_0 = -1/4$, $\upsilon_2 = 3/2$, $\max\limits_{j \in \overline{1,4}} \upsilon_1^{(2)}(j) = \max\limits_{j \in \overline{1,4}} \big\{c_{1,j}\pi_j^{(1)} + \sigma_{j-1}^{(1)}/4\big\} = \max\big\{0, 13/12, 7/6, 1\,\big\} = 7/6$, поэтому $j_2^{(1)} = 3$, $\upsilon_1 = 7/6$, $I = \big\{1\big\}$, $J = \big\{3\big\}$ и $\upsilon^2(2) = \upsilon_{2,4}^2(I,J) = (-1/4, 7/6, 3/2)$. Отсюда $d(a) = d(\upsilon^2(2), a) = 8\sqrt{a}/3 - a/4$, $\bar{a} = \arg\max\limits_{a \geq 0} d(a) = 256/9$ и $\Delta(\bar{a}) = \bar{\Delta}_{2,4}^2(1(3), \bar{a}) = \big[8\sqrt{\bar{a}}, 10\sqrt{\bar{a}}\,\big] = \big[\,128/3, 160/3\big]$. Поскольку $\bar{a} \notin \bar{\Delta}(\bar{a})$, решая уравнение $8\sqrt{a} = a$, находим $a_1^{(2)}(I,J) = 64$, $d_2^{(2)} = d(64) = 16/3$.

Все вершины и соответствующие им значения целевой функции найдены. Осталось найти оптимальное значение $\tilde{c} = \max\,\big\{d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, d_1^{(2)}, d_2^{(2)}\big\} = \max\,\big\{35/6, 35/6, 2, 16/3\big\} = 35/6$, которое достигается, как мы видели выше, на вершинах $\upsilon^1(1) = \upsilon_{1,2}^1\big(2(2)\big)$, $\upsilon^1(2) = \upsilon_{2,3}^1\big(2(2)\big)$. Отсюда в силу соотношений (60), (32) выводим оптимальное решение

$$\tilde{c} = 35/6, \quad \tilde{u} = \big(0, 7/3, 0; 0, 7/2, 0\big), \quad \tilde{x} = \big(7, 0, 0; 7, 0, 0\big).$$

П р и м е р 2. Рассмотрим задачу вида (38) для следующих данных: $m = 3$, $n = 5$, $c_{i,1} = 0$, $c_{i,2} = 1$, $c_{i,3} = 5$, $c_{i,4} = 5$, $c_{i,5} = 15/2$, $\alpha_{i,1} = 1$, $\alpha_{i,2} = 3/4$, $\alpha_{i,3} = 4/5$, $\alpha_{i,4} = 5/9$, $\beta_{i,1} = 0$, $\beta_{i,2} = 1$, $\beta_{i,3} = 4/3$, $\beta_{i,4} = 5/3$, $\beta_{i,5} = 5$, $f_i(a) = f(a) = 8a/7(1+a)$ $(i = 1, 2, 3)$.

В соответствии с (6), (9)–(12) находим $p_{1,1}^{(i)} = p_{1,2}^{(i)} = 1$, $p_{1,3}^{(i)} = 3/4$, $p_{1,4}^{(i)} = 3/5$, $p_{1,5}^{(i)} = p_{1,6}^{(i)} = 1/3$, $p_{2,2}^{(i)} = 1$, $p_{2,3}^{(i)} = 3/4$, $p_{2,4}^{(i)} = 3/5$, $p_{2,5}^{(i)} = p_{2,6}^{(i)} = 1/3$, $p_{3,3}^{(i)} = 1$, $p_{3,4}^{(i)} = 4/5$, $p_{3,5}^{(i)} = p_{3,6}^{(i)} = 4/9$, $p_{4,4}^{(i)} = 1$, $p_{4,5}^{(i)} = p_{4,6}^{(i)} = 5/9$, $p_{5,5}^{(i)} = p_{5,6}^{(i)} = 1$, $\pi_1^{(i)} = 1$, $\pi_2^{(i)} = 1$, $\pi_3^{(i)} = 3/4$, $\pi_4^{(i)} = 3/5$, $\pi_5^{(i)} = \pi_6^{(i)} = 1/3$, $q_{1,1}^{(i)} = 0$, $q_{1,2}^{(i)} = 1$, $q_{1,3}^{(i)} = 2$, $q_{1,4}^{(i)} = 3$, $q_{1,5}^{(i)} = 14/3$, $q_{2,2}^{(i)} = 1$, $q_{2,3}^{(i)} = 2$, $q_{2,4}^{(i)} = 3$, $q_{2,5}^{(i)} = 14/3$, $q_{3,3}^{(i)} = 4/3$, $q_{3,4}^{(i)} = 8/3$, $q_{3,5}^{(i)} = 44/9$, $q_{4,4}^{(i)} = 5/3$, $q_{4,5}^{(i)} = 35/6$, $q_{5,5}^{(i)} = 5$, $\sigma_0^{(i)} = 0$, $\sigma_1^{(i)} = 0$, $\sigma_2^{(i)} = 1$, $\sigma_3^{(i)} = 2$, $\sigma_4^{(i)} = 3$, $\sigma^{(i)} = \sigma_5^{(i)} = 14/3$ $(i = 1,2,3)$, $\sigma(a) = 16a/(1+a)$, $\mu(a) = 16a/(1+a) - a$.

Поскольку функция $f(a)$ вогнута, $\sigma'(+0) = 16$ и $\sigma'(+\infty) = 0$, условия (5), (7) выполнены. Из (12) находим $a^* = 3$, $\mu^* = 9$, $f(a^*) = 6/7$. Используя (22), имеем $I^* = \varnothing$, $J^* = \{1,2,3\}$, так как согласно (20), $\bar{S}_j^{(i)}(a^*) \geq \sum\limits_{k \neq i} \sigma^{(k)} f_k(a^*) = 8 > a^* = 3$ $(\forall i, j)$. Поскольку $J^* \neq \varnothing$, множество D'' непусто. Решая уравнения (23) для $j = n$, выводим в силу (24) $\bar{a}_D = \bar{a}_{D''} = 275/21$.

Сохраняющего оптимального управления не существует, поскольку, как нетрудно проверить, не выполнено условие (36). Задача (40) имеет следующий вид:

$$\max \Big(a\upsilon_0 + \frac{8a}{7(1+a)}(\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3) \Big):$$
$$(1)\ \upsilon_i \geq 0,\quad (2)\ \upsilon_i \geq 1,\quad (3)\ \upsilon_0 + \upsilon_i \geq \frac{15}{4},\quad (4)\ 2\upsilon_0 + \upsilon_i \geq 3,$$
$$(5)\ 3\upsilon_0 + \upsilon_i \geq \frac{225}{76},\quad (6)\ \frac{14}{3}\upsilon_0 + \upsilon_i \geq 0 \quad (\text{здесь } (i = 1,2,3)).$$

Поскольку $i_+ = 2 > 1$ и $C'_+ = \overline{2,6}$, то согласно (56), (57) $H_0^1 = \{c_2\pi_2\}$, $K_0^1 = \{2\}$, $k_0^{(1)} = 2$.

Найдем множество $K(\mathcal{V}_1)$. Из (58), (59) имеем $H_1^1 = \{(c_{1,j}p_{2,j}^{(1)} - c_{1,2})/q_{2,j-1}^{(1)} \mid j \in \overline{3,6}\} = \{11/4, 1, 149/228, -3/14\}$, $K_1^1 = \operatorname{Arg\,max} H_1^1 = \{3\}$, $k_1^{(1)} = \max K_1^1 = 3$.

Далее, $H_2^1 = \{(c_{1,j}p_{3,j}^{(1)} - c_{1,3})/q_{3,j-1}^{(1)} \mid j \in \overline{4,6}\} = \{-3/4, -15/38, -45/44\}$, $K_2^1 = \operatorname{Arg\,max} H_2^1 = \{5\}$, $k_2^{(1)} = \max K_2^1 = 5$. Таким образом, $K(\mathcal{V}_1) = \{2,3,5\}$.

Найдем вершину $\upsilon^1(1) = \upsilon_{2,3}^1(I,J)$. Ввиду (53) $\upsilon_0 = 11/4$, $\upsilon_1 = 1$; для остальных координат получаем из (54): $\max\{\upsilon_s(j) \mid j \in \overline{1,6}\} = \max\{0, 1, 1, -5/2, -104/19, -77/6\} = 1$, $\operatorname{Arg} \max\limits_{j \in \overline{1,6}} \upsilon_s(j) = \{2,3\}$ $(s = 2,3)$. Отсюда $I = \{2,3\}$, $J_1 = \{2,2\}$, $J_2 = \{2,3\}$, $J_3 = \{3,2\}$, $J_4 = \{3,3\}$, $\upsilon^1(1) = \upsilon^1(1,3) = \upsilon_{2,3}^1(I,J) = (11/4, 1, 1, 1)$ и $d(a) = d(\upsilon^1(1), a) = 11a/4 + 3f(a) = 11a/4 + 24a/7(1+a)$. Эта функция является монотонно возрастающей, поэтому возьмем промежуток с наибольшей правой границей: $\bar{\Delta}_{2,3}^1(I, J_4, a) = \bar{\Delta}_{2,3}^1(2(3), 3(3), a) = \big[S_{1,2,2}^{1,2,3}(a_1), S_{2,2,2}^{1,2,3}(a)\big] = \big[2f(a), 3f(a)\big] = [16a/7(1+a), 24a/7(1+a)]$. Решая уравнение $24a/7(1+a) = a$, находим $a_2^{(1)}(I, J_4) = 17/7$ и $d_1^{(1)} = d(17/7) = 255/28$.

Найдем вершину $\upsilon^1(2) = \upsilon_{3,5}^1(I,J)$. Имеем $\upsilon_0 = -15/38$, $\upsilon_1 = 315/76$, $\max\{\upsilon_s(j) \mid j \in \overline{1,6}\} = \max\{0, 1, 315/76, 72/19, 315/76, 35/19\} = 315/76$, $\operatorname{Arg} \max\limits_{j \in \overline{1,6}} \upsilon_s(j) = \{3,5\}$ $(s = 2,3)$, поэтому $I = \{2,3\}$, $J_1 = \{3,3\}$, $J_2 = \{3,5\}$, $J_3 = \{5,3\}$, $J_4 = \{5,5\}$. Отсюда $\upsilon^1(2) = \upsilon^1(3,5) = (-15/38, 315/76, 315/76, 315/76)$, $d(a) = d(\upsilon^1(2), a) = 945f(a)/76 - 15a/38 = 270\,a/19(1+a) - 15a/38$. Решая задачу $\max\limits_{a \geq 0} d(a)$, находим величины $\bar{a} = 5$, $f(\bar{a}) = 20/21$ и промежутки $\Delta(\bar{a})$:

$$\bar{\Delta}_{3,5}^1(I, J_1, \bar{a}) = \bar{\Delta}_{3,5}^1(2(3), 3(3), \bar{a}) = \big[S_{2,2,2}^{1,2,3}(\bar{a}), S_{4,2,2}^{1,2,3}(\bar{a})\big] = \big[3f(\bar{a}), 5f(\bar{a})\big] = [20/7, 100/21],$$
$$\bar{\Delta}_{3,5}^1(I, J_2, \bar{a}) = \bar{\Delta}_{3,5}^1(2(3), 3(5), \bar{a}) = \big[S_{2,2,4}^{1,2,3}(\bar{a}), S_{4,2,4}^{1,2,3}(\bar{a})\big] = \big[5f(\bar{a}), 7f(\bar{a})\big] = [100/21, 20/3],$$
$$\bar{\Delta}_{3,5}^1(I, J_3, \bar{a}) = \bar{\Delta}_{3,5}^1(2(5), 3(3), \bar{a}) = \big[S_{2,4,2}^{1,2,3}(\bar{a}), S_{4,4,2}^{1,2,3}(\bar{a})\big] = \big[5f(\bar{a}), 7f(\bar{a})\big] = [100/21, 20/3],$$
$$\bar{\Delta}_{3,5}^1(I, J_4, \bar{a}) = \bar{\Delta}_{3,5}^1(2(5), 3(5), \bar{a}) = \big[S_{2,4,4}^{1,2,3}(\bar{a}), S_{4,4,4}^{1,2,3}(\bar{a})\big] = \big[7f(\bar{a}), 9f(\bar{a})\big] = [20/3, 60/7].$$

Как видно, $\bar{a} \in \bar{\Delta}_{3,5}^1(2(3), 3(5), \bar{a}$, $\bar{a} \in \bar{\Delta}_{3,5}^1(2(5), 3(3), \bar{a})$. Находим $d_2^{(1)} = d(5) = 375/38$. Нетрудно проверить, что это значение превышает значения целевой функции, принимаемые на двух остальных промежутках, для которых $\bar{a} \notin \bar{\Delta}\big(\upsilon^1(2)\big)$.

Для $i = 1$ процесс завершен. Рассматриваемая система симметрична в том смысле, что ее параметры одинаковы для всех $i = 1, 2, 3$; результаты для $i = 2, 3$ будут теми же, что и для $i = 1$. Поэтому переходим к нахождению оптимальных решений.

Находя $\max\left\{d_1^{(1)}, d_2^{(1)}\right\} = d_2^{(1)}$, получаем $\tilde{c} = 375/38$. Оптимальные управления определяются множествами J_2, $J_3: \tilde{u}^1 = u^1_{3,5}(2(3), 3(5), \bar{a})$, $\tilde{u}^2 = u^1_{3,5}(2(5), 3(3), \bar{a})$. Из (32) получаем

$\tilde{u}^1 = (0, 0, 5/8, 0, 5/126; 0, 0, 5/7, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 20/63)$,

$\tilde{u}^2 = (0, 0, 5/8, 0, 5/126; 0, 0, 0, 0, 20/63; 0, 0, 5/7, 0, 0)$.

Из (8) находим соответствующие оптимальные векторы состояния системы

$\tilde{x}^1 = \big(20/21, 20/21, 5/56, 1/14, 0;\ 20/21, 20/21, 0, 0, 0;\ 20/21, 20/21, 5/7, 4/7, 0\big)$,

$\tilde{x}^2 = \big(20/21, 20/21, 5/56, 1/14, 0;\ 20/21, 20/21, 5/7, 4/7, 0;\ 20/21, 20/21, 0, 0, 0\big)$.

Из соображений симметрии оптимальными также являются решения $\tilde{u}^3$, $\tilde{u}^4$ и $\tilde{u}^5$, $\tilde{u}^6$, которые получаются из $\tilde{u}^1$, $\tilde{u}^2$ соответственно циклической перестановкой их блоков координат:

$\tilde{u}^3 = \big(0, 0, 0, 0, 20/63;\ 0, 0, 5/8, 0, 5/126;\ 0, 0, 5/7, 0, 0\,\big)$,

$\tilde{u}^4 = \big(0, 0, 5/7, 0, 0;\ 0, 0, 0, 0, 20/63;\ 0, 0, 5/8, 0, 5/126\,\big)$,

$\tilde{u}^5 = \big(0, 0, 5/7, 0, 0;\ 0, 0, 5/8, 0, 5/126;\ 0, 0, 0, 0, 20/63\,\big)$,

$\tilde{u}^6 = \big(0, 0, 0, 0, 20/63;\ 0, 0, 5/7, 0, 0;\ 0, 0, 5/8, 0, 5/126\,\big)$.

Аналогично находятся соответствующие им оптимальные векторы состояния $\tilde{x}^i$ $(i \in \overline{3, 6})$.

Количество $m + 1 = 4$ ненулевых координат найденных оптимальных управлений является минимально возможным для оптимальных управлений [15, Corollary 1]. Заметим, что поскольку последние координаты всех блоков векторов состояния $\tilde{x}^i$ $(i \in \overline{1, 6})$ равны нулю, найденные решения $\tilde{u}^i$ принадлежат множеству $L = \bigcap_{i \in \overline{1,3}} L_i(a_1)$.

Более того, оптимальными являются также все управления из выпуклой оболочки управлений $\tilde{u}^i$ $(i \in \overline{1, 6})$. Это обусловлено той особенностью последних, что множество L является линейным многообразием как пересечение линейных многообразий.

Заключение

В работе предложен алгоритм решения задачи оптимальной эксплуатации для промысловой популяции, поведение которой описывается обобщением модели Лесли. Данное обобщение происходит в двух направлениях: во-первых, оно является нелинейным, и, во-вторых, имеется дополнительный критерий классификации помимо возраста (или стадии развития).

Используемая модель является достаточно общей — на функцию воспроизводства накладываются лишь требования неотрицательности и вогнутости. Как видно из работы алгоритма, решение задачи оптимальной эксплуатации системы для данной модели сводится к решению не более mn задач одномерной оптимизации (заметим, что mn здесь совпадает с количеством структурных подразделений эксплуатируемой системы).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. The state of world fisheries and aquaculture. Sustainability in action. Rome: Food and Agriculture Organization of the United Nations, 2020, 210 p. doi: 10.4060/ca9229en .
2. **Link J. S., Watson R. A.** Global ecosystem overfishing: Clear delineation within real limits to production // Science Advances. 2019. Vol. 5, no. 6. P. 1–11. doi: 10.1126/sciadv.aav0474 .
3. The state of the world's forests. Forests, biodiversity and people. Rome: Food and Agriculture Organization of the United Nations, 2020. 188 p. doi: 10.4060/ca8642en .
4. **Scott Mills L. S.** Conservation of wildlife populations: Demography, genetics and management. 2nd ed. NJ: Wiley-Blackwell, 2013. 342 p.
5. **Fonseca C. R., Paterno G. B., Guadagnin D. L. et al.** Conservation biology — four decades of problem and solution-based research // Perspectives in ecology and conservation. 2021. Vol. 19, no. 2. P. 121–130. doi: 10.1016/j.pecon.2021.03.003 .

6. **Roxburgh T., Ellis K., Johnson J. A., et al.** Global futures: Assessing the global economic impacts of environmental change to support policy-making. Technical report. World Wildlife Fund, 2020. 102 p. Available on: https://www.wwf.org.uk/sites/default/files/2020-02/Global_Futures_Technical_Report.pdf.
7. **Clark C. W.** Mathematical bioeconomics: The mathematics of conservation. 3rd ed. NY: Wiley Interscience, 2010. 368 p. (Pure and applied mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts.) ISBN: 978-0-470-37299-9.
8. **Getz W. M., Haight R. G.** Population harvesting: demographic models of fish, forest and animal resources. Princeton (NJ): Princeton University Press, 1989. 391 p.
9. **Andersen K. H.** Fish ecology, evolution and exploitation: A new theoretical synthesis. Princeton (NJ): Princeton University Press, 2019. 257 p. (Monographs in Population Biology; vol. 62.) doi: 10.23943/princeton/9780691192956.001.0001.
10. **Quaas M. F., Tahvonen O.** Strategic harvesting of age-structured populations // Marine Resource Economics. 2019. Vol. 34, no. 4. P. 291–309. doi: 10.1086/705905.
11. **Tuljapurkar Sh., Coulson T., Steiner U. K.** Structured population models: Introduction // Theoretical Population Biology. 2012. Vol. 82, issue 4. P. 241–243. doi: 10.1016/j.tpb.2012.10.007.
12. **Botsford L. W., White J. W., Hastings A.** Population dynamics for conservation. Oxford: Oxford University Press, 2019. 352 p. doi: 10.1093/oso/9780198758365.003.0003.
13. **De Lara M., Doyen L.** Sustainable management of natural resources: Mathematical models and methods. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 266 p. doi: 10.1007/978-3-540-79074-7.
14. **Smirnov A. I., Mazurov Vl. D.** On existence of optimal non-destructive controls for ecosystem exploitation problem applied to a generalization of Leslie model // DEStech Transactions on Computer Science and Engineering (Suppl. Vol.): Proc. IX International on Conference Optimization and Applications (OPTIMA-2018) / eds. Yu. G. Evtushenko et al. 2018. P. 199–213. doi: 10.12783/dtcse/optim2018/27933.
15. **Smirnov A. I., Mazurov Vl. D.** Generalization of controls bimodality property in the optimal exploitation problem for ecological population with binary structure // Proc. Internat. Conf. on Optimization and Applications (OPTIMA 2019) / eds. M. Jaćimović et al. 2020. P. 206–221. (Ser. Communications in Computer and Information Science; vol. 1145.) doi: 10.1007/978-3-030-38603-0_16.
16. **Мазуров Вл. Д., Смирнов А. И.** Критерий существования сохраняющих управлений задачи оптимальной эксплуатации системы с бинарной структурой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 3. С. 101–117. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-101-117.

Поступила 18.05.2021
После доработки 9.07.2921
Принята к публикации 19.07.2021

Смирнов Александр Иванович
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: asmi@imm.uran.ru

Мазуров Владимир Данилович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: mazurov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. *The state of world fisheries and aquaculture. Sustainability in action.* Rome: Food and Agriculture Organization of the United Nations, 2020, 210 p. doi: 10.4060/ca9229en.
2. Link J.S., Watson R.A. Global ecosystem overfishing: clear delineation within real limits to production. *Science Advances*, 2019, vol. 5, no. 6, art. no. eaav0474, 11 p. doi: 10.1126/sciadv.aav0474.
3. *The state of the world's forests. Forests, biodiversity and people.* Rome: Food and Agriculture Organization of the United Nations, 2020, 188 p. doi: 10.4060/ca8642en.

4. Scott Mills L.S. *Conservation of wildlife populations: Demography, genetics and management.* 2nd Ed. NJ: Wiley-Blackwell, 2013, 342 p. ISBN: 9781118406670 .
5. Fonseca C.R., Paterno G.B., Guadagnin D.L. et al. Conservation biology: four decades of problem- and solution-based research. *Perspectives in Ecology and Conservation*, 2021, vol. 19, no. 2, pp. 121–130. doi: 10.1016/j.pecon.2021.03.003 .
6. Roxburgh T., Ellis K., Johnson J.A., et al. *Global futures: Assessing the global economic impacts of environmental change to support policy-making.* Technical report. World Wildlife Fund, 2020, 102 p. Available on:
https://www.wwf.org.uk/sites/default/files/2020-02/Global_Futures_Technical_Report.pdf .
7. Clark C.W. *Mathematical bioeconomics: The mathematics of conservation.* Ser. Pure and applied mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts, 3rd ed., NY: Wiley Interscience, 2010, 368 p. ISBN: 978-0-470-37299-9 .
8. Getz W.M., Haight R.G. *Population harvesting: demographic models of fish, forest and animal resources.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1989, 391 p. ISBN: 9780691085166 .
9. Andersen K.H. *Fish ecology, evolution and exploitation: A new theoretical synthesis.* Monographs in Population Biology, vol. 62, Princeton, NJ: Princeton University Press, 2019, 257 p. doi: 10.23943/princeton/9780691192956.001.0001 .
10. Quaas M.F., Tahvonen O. Strategic harvesting of age-structured populations. *Marine Resource Economics*, 2019, vol. 34, no. 4, pp. 291–309. doi: 10.1086/705905 .
11. Tuljapurkar T., Coulson C., Steiner S. Structured population models: Introduction. *Theoretical Population Biology*, 2012, vol. 82, no. 4, pp. 241–243. doi: 10.1016/j.tpb.2012.10.007 .
12. Botsford L.W., White J.W., Hastings A. *Population dynamics for conservation.* Oxford: Oxford University Press, 2019, 352 p. doi: 10.1093/oso/9780198758365.003.0003 .
13. De Lara M., Doyen L. *Sustainable management of natural resources: Mathematical models and methods.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008, 266 p. doi: 10.1007/978-3-540-79074-7 .
14. Smirnov A.I., Mazurov Vl.D. On existence of optimal non-destructive controls for ecosystem exploitation problem applied to a generalization of Leslie model. *DEStech Transactions on Computer Science and Engineering* (*Suppl. Vol.*): Proc. Internat. Conf. on Optimization and Applications *(*OPTIMA-2018*)*, Yu. G. Evtushenko et al. (eds.), 2018, pp. 199–213. doi: 10.12783/dtcse/optim2018/27933 .
15. Smirnov A.I., Mazurov Vl.D. Generalization of controls bimodality property in the optimal exploitation problem for ecological population with binary structure. In: *Proc. Internat. Conf. on Optimization and Applications* (*OPTIMA 2019*)*: Optimization and Applications*, M. Jaćimović et al. (eds), Ser. Communications in Computer and Information Science, vol. 1145, Cham: Springer, 2020, pp. 206–221. doi: 10.1007/978-3-030-38603-0_16 .
16. Mazurov V.D., Smirnov A.I. A criterion for the existence of nondestructive controls in the problem of optimal exploitation of an ecosystem with a binary structure. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 101–117 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-101-117 .

Received May 18, 2021
Revised July 9, 2021
Accepted July 19, 2021

Aleksandr Ivanovich Smirnov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: asmi@imm.uran.ru .

Vladimir Danilovich Mazurov, Dr. Phys.-Math. Sci. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: mazurov@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. I. Smirnov, Vl. D. Mazurov. A solution algorithm for a problem of optimal exploitation of a system with a binary structure, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 142–160 .