ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 4 2021

УДК 519.853

МЕТОД КВАЗИРЕШЕНИЙ В АНАЛИЗЕ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ[1]

В. Д. Скарин

Работа посвящена анализу некоторых “вырожденных” задач выпуклого программирования (несобственных, не имеющих решений в обычном смысле). Предлагается подход к коррекции подобных задач, основанный на применении идеологии стандартного в теории некорректных экстремальных задач метода квазирешений. Ограничения начальной проблемы агрегируются с помощью некоторой штрафной функции, которая в явном виде включается в схему метода квазирешений. При этом используются два наиболее распространенных варианта: точная штрафная функция и функция квадратичного штрафа. Для каждого варианта в условиях приближенного задания исходной информации об анализируемой проблеме исследуются вопросы разрешимости возникающих задач, устанавливаются оценки сходимости предлагаемых процедур.

Ключевые слова: выпуклое программирование, несобственная задача, оптимальная коррекция, метод квазирешений, методы штрафных функций.

V. D. Skarin. The quasisolution method in the analysis of convex programs with singularities.

The paper is devoted to the analysis of some convex programs that are “degenerate” (improper, having no solutions in the usual sense). We propose an approach to the correction of such problems based on the ideas of the quasisolution method, which is standard in the theory of ill-posed extremal problems. The constraints of the original problem are aggregated with the use of a certain penalty function, which is explicitly included in the scheme of the quasisolution method. Two most popular variants are used: an exact penalty function and a quadratic penalty function. For each of these variants, the questions of solvability of the arising problems are studied and estimates for the convergence rate of the proposed procedures are established in the case where the input information about the problem to be analyzed is given approximately.

Keywords: convex programming, improper problem, optimal correction, quasisolution method, penalty function methods.

MSC: 47N05, 37N25, 37N40

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-125-141

Введение

Рассмотрим задачу выпуклого программирования (ВП)

$$\min\{f_0(x)\colon x \in X\}, \tag{1}$$

где $X = \{x\colon f(x) \le 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — выпуклые функции, определенные на $\mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \dots, m$. Выпишем для задачи (1) функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x)),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$. Если для этой функции выполняется соотношение двойственности

$$\inf_x \sup_{\lambda \ge 0} L(x, \lambda) = \sup_{\lambda \ge 0} \inf_x L(x, \lambda),$$

то согласно классификации из книги [1] задача (1) называется *собственной*, в противном случае — *несобственной* (НЗ). Чаще всего НЗ ВП возникает по причине несовместности у задачи (1) системы ограничений: $X = \varnothing$. Если при этом множество

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+\colon \inf_x L(x, \lambda) > -\infty\}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-07-01243).

непусто, то такая задача есть пример НЗ ВП 1-го рода. В [1] определяются и другие типы НЗ. Если имеет место ситуация: $X \neq \varnothing, \Lambda = \varnothing$, то задача (1) будет относиться к НЗ ВП 2-го рода. Если $X = \varnothing$ и $\Lambda = \varnothing$, то это случай несобственности 3-го рода.

Несобственные задачи достаточно часто встречаются в практике экономико-математического моделирования, поэтому актуальна проблема разработки теории и численных методов коррекции (аппроксимации) НЗ ВП. Под коррекцией понимается построение близких в определенном смысле к оригинальной постановке разрешимых моделей, решение которых принимается за обобщенное решение исходной НЗ.

Появление книги [1] стимулировало интенсивные исследования в области несобственных задач математического программирования, что нашло отражение в широком круге публикаций как отечественных, так и зарубежных авторов (см., например, [2–5]).

Одной из распространенных причин возникновения в задаче ВП особенностей (несовместности системы ограничений, отсутствия точек минимума, неустойчивости решений) является неточное задание информации о функциях задачи. Подобные постановки, когда данные о задаче носят приближенный характер, исследуются в теории некорректных экстремальных задач (см. [6; 7]). Для того чтобы с помощью анализа возмущенной задачи получить решение исходной задачи, требуется привлечь некоторый метод регуляризации из теории некорректных моделей. Применение идеи регуляризации стало естественным при построении методов коррекции несобственных задач (см. [8–10]).

В данной работе рассматривается задача ВП (1), у которой допустимое множество $X \neq \varnothing$. При этом интерес представляют случаи:

1) $X \neq \varnothing$, $X^* = \{x^* \colon f_0(x^*) = \min\limits_{x \in X} f_o(x)\} = \varnothing$;

2) $X^\varepsilon = \varnothing$, где X^ε — допустимое множество возмущенной задачи;

3) $X \neq \varnothing$, $\Lambda = \varnothing$, т. е. когда задача (1) — НЗ ВП 2-го рода.

Предлагается метод коррекции задач с отмеченными особенностями, в котором используется в качестве регуляризации идея стандартного метода квазирешений (см. [6]) и включается агрегирование ограничений задачи с помощью точной и квадратичной штрафных функций (см. [11]). Основное внимание уделяется выводу оценок, характеризующих сходимость рассматриваемого метода.

1. Постановка задачи, метод квазирешений

Один из подходов к коррекции НЗ ВП предполагает погружение исследуемой проблемы в некоторое параметрическое семейство разрешимых моделей ВП и выбор в этом семействе конкретной задачи. Выбор должен удовлетворять прежде всего двум критериям. Первый из них — оптимальность. Это означает, что требуется найти оптимальную относительно значения параметра модель (оптимальную коррекцию). Второй критерий — объективная обусловленность — заключается в том, что процедура коррекции не требует предварительной информации о разрешимости анализируемой задачи и в то же время дает решение исходной проблемы при его наличии.

Задачу оптимальной коррекции НЗ ВП можно сформулировать следующим образом. Введем меру несовместности системы ограничений задачи (1) как

$$\bar{\varphi} = \inf_x \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = h(f^+(x))$, $h(z)$ — выпуклая функция, определенная на $\mathbb{R}^m_+$, удовлетворяющая условиям

$$h(0) = 0, \quad h(z) > 0 \quad (\forall z \in \mathbb{R}^m_+,\ z \neq 0). \tag{2}$$

Очевидно, что $X \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда существует точка $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$, для которой $\bar{\varphi} = \varphi(\bar{x}) = 0$, поэтому в качестве оптимальной коррекции для НЗ ВП (1) естественно определить

задачу
$$\min\{f_0(x)\colon x \in \bar{X}\}, \tag{3}$$
где $\bar{X} = \{x\colon \varphi(x) \le \bar{\varphi}\}$.

Так как $X = \bar{X}$ при $\bar{\varphi} = \varphi(\bar{x}) = 0$, т. е. задачи (1) и (3) совпадают, то в случае $\bar{\varphi} > 0$ решение задачи (3) будем считать обобщенным решением НЗ ВП (1). Примерами функции $\varphi(x) = h(z(x))$, удовлетворяющей условиям (2), могут служить
$$h_1(z) = \|z\|_1 = \sum_{i=1}^{m} z_i, \quad h_2(z) = \|z\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} z_i^2.$$
Сразу заметим, что так определенные функции
$$\varphi_1(x) = h_1(z(x)) = \sum_{i=1}^{m} f_i^+(x), \quad \varphi_2(x) = h_2(z(x)) = \sum_{i=1}^{m} f_i^{+^2}(x)$$
являются стандартными функциями штрафа для метода штрафных функций в теории математического программирования. Функция $\varphi_1(x)$ известна как точная штрафная функция Еремина — Зангвилла (см. [12]), $\varphi_2(x)$ — квадратичная функция штрафа (см. [11; 13]).

Как уже отмечалось, одной из распространенных причин возникновения НЗ ВП может служить неточное задание функций задачи. Пусть в задаче (1) вместо $f_i(x)$ известны их приближения — непрерывные функции $f_i^\varepsilon(x)$ такие, что
$$|f_i^\varepsilon(x) - f_i(x)| \le \varepsilon\, \Psi_i(x) \tag{4}$$
для любого $x \in \mathbb{R}^n$, где $\varepsilon \ge 0$, $\Psi_i(x)$ — заданные непрерывные на $\mathbb{R}^n$ функции, $i = 0, 1, \ldots, m$. В этом случае задача (1) примет вид
$$\min\{f_0^\varepsilon(x)\colon x \in X^\varepsilon\}, \tag{5}$$
где $X^\varepsilon = \{x\colon f^\varepsilon(x) \le 0\}$, $f^\varepsilon(x) = [f_1^\varepsilon(x), \ldots, f_m^\varepsilon(x)]$. Понятно, что возмущенная задача (5) необязательно будет задачей ВП, и у нее множество X^ε может оказаться пустым для некоторых значений ε даже в том случае, когда $X \ne \varnothing$.

Для того чтобы с помощью анализа задачи (5) получить решение задачи коррекции (3), требуется применить некоторый метод регуляризации из теории некорректных задач оптимизации. В данной работе с этой целью будет использован известный метод квазирешений (см. [7]).

Метод квазирешений заключается в нахождении приближенного с точностью $\delta \ge 0$ решения $x_{rd}^{\varepsilon\delta}$ задачи
$$\min\{P^\varepsilon(x, r) = f_0^\varepsilon(x) + r\varphi^\varepsilon(x)\colon x \in Q_d\}, \tag{6}$$
где $P^\varepsilon(x_{rd}^{\varepsilon\delta}, r) \le \bar{P}(r, d, \varepsilon) + \delta$, $\bar{P}(r, d, \varepsilon) = \inf\limits_{x \in Q_d} P^\varepsilon(x, r)$, $Q_d = \{x\colon \Omega(x) \le d\}$, $r > 0$, $d > 0$, $\varepsilon \ge 0$. Здесь $\Omega(x)$ — стабилизатор задачи (1), представляющий собой определенную на $\mathbb{R}^n$ выпуклую функцию, для которой 1) $\Omega(x) \ge 0$ $(\forall x)$, 2) множество Q_d ограничено для всех d таких, что $Q_d \ne \varnothing$. С помощью штрафной функции $\varphi^\varepsilon(x)$ в (6) агрегируются ограничения возмущенной задачи (5). Ниже будут рассмотрены два случая: $\varphi^\varepsilon(x) = \varphi_1^\varepsilon(x) = \|f^{\varepsilon^+}(x)\|_1$ и $\varphi^\varepsilon(x) = \varphi_2^\varepsilon(x) = \|f^{\varepsilon^+}(x)\|_2^2$.

В методе (6) требуется найти управление параметрами r, d, ε и δ такое, чтобы либо точки $x_{rd}^{\varepsilon\delta}$ приближали решение задачи (1) в собственном случае, либо решали НЗ ВП (1) в обобщенном смысле.

Очевидно, что задача (6) минимизации непрерывной функции на ограниченном замкнутом множестве в отличие от задач (1) и (5) всегда имеет решение. Задача (6) есть задача на условный экстремум. Часто предпочтительнее, например, с точки зрения численной реализации метода, рассматривать задачу безусловной минимизации функции многих переменных, к которой можно эквивалентным образом свести постановку (6). Поэтому далее метод квазирешений будет заключаться в анализе одной из двух задач

$$\min_x\{F_d^\varepsilon(x,R)=f_0^\varepsilon(x)+r\,\varphi_1^\varepsilon(x)+\rho\,(\Omega(x)-d)^+\},\tag{7}$$

$$\min_x\{\Phi_d^\varepsilon(x,R)=f_0^\varepsilon(x)+r\,\varphi_2^\varepsilon(x)+\rho\,(\Omega(x)-d)^{+^2}\},\tag{8}$$

где $R=[r,\rho]\in\mathbb{R}^2$, $r>0$, $\rho>0$, $d>0$, $\varepsilon\geq 0$.

В предыдущей работе[2] автор исследовал метод квазирешений применительно к анализу НЗ ВП 1-го рода. Рассматривались случаи, когда задача коррекции (3) имела решение и когда такое решение отсутствовало. Последнее имело место, например, когда значение $\bar\varphi$ в (3) не достигалось. Это требовало модификации и самого понятия коррекции для НЗ ВП. Были найдены условия и установлены оценки качества сходимости решений задач (7) и (8) к обобщенному решению задачи (1). Были предложены и возможные итерационные процедуры управления параметрами метода квазирешений.

В данной работе рассматриваются задачи ВП, у которых $X\neq\varnothing$, $X^*=\varnothing$, где

$$X^*=\{x^*\in X\colon f_0(x^*)=\min_{x\in X}f_0(x)\}.$$

В частности, это характерно для НЗ ВП 2-го рода. Приведем пример такой задачи.

П р и м е р. Рассмотрим задачу ВП в пространстве $x=[x_1,x_2]\in\mathbb{R}^2$:

$$\min\{-2x_1-x_2\colon (x_1+1)^{-1}-x_2\leq 0,\ x_1\geq 1,\ x_2\leq 2\}.\tag{9}$$

Здесь $X\neq\varnothing$. Запишем для задачи (9) функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda)=-2x_1-x_2+\lambda_1\big[(x_1+1)^{-1}-x_2\big]+\lambda_2(-x_1+1)+\lambda_3(x_2-2),\quad \lambda=[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3]\geq 0.$$

Определим $\Psi(\lambda)=\inf\limits_x L(x,\lambda)=L(x(\lambda),\lambda)$. Точку $x(\lambda)$ будем искать из уравнения

$$\nabla_x L(x,\lambda)=0.$$

Имеем

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1}=-2-\frac{\lambda_1}{(x_1+1)^2}-\lambda_2=0,\quad \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2}=-1-\lambda_1+\lambda_3=0.$$

Полученная система решений $\lambda\geq 0$ не имеет, поэтому $\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{R}^3_+\colon \inf\limits_x L(x,\lambda)>-\infty\}=\varnothing$. Следовательно, задача (9) является НЗ ВП 2-го рода. Так как $0\notin\Lambda$, то $\inf f_0(x)=-\infty$.

2. Метод квазирешений на основе точной штрафной функции

В данном разделе будет исследована связь между задачами (1) и (7).

Краткости ради введем обозначения: $s=[r,\rho,d,\varepsilon]$, $r>0$, $\rho>0$, $d>0$, $\varepsilon\geq 0$;

$$F_s(x)\equiv F_d^\varepsilon(x,R)=f_0^\varepsilon(x)+r\varphi_1^\varepsilon(x)+\rho(\Omega(x)-d)^+,\quad R=[r,\rho];\quad \varphi_1^\varepsilon(x)=\sum_{i=1}^m f_i^{\varepsilon^+}(x);$$

$\Omega(x)$ — некоторый стабилизатор задачи (1), определяющий ограничения в (6). Также, задавая функции $f_i^\varepsilon(x)$ согласно (4), далее в этом разделе будем считать, что $\Psi_i(x)\equiv 1$, $i=0,1,\dots,m$.

[2] Скарин В. Д. О применении метода квазирешений для коррекции противоречивых задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 24, № 4. С. 189–200.

Функция $F_s(x)$ согласно теории ВП может интерпретироваться как точная штрафная функция для задачи

$$\min\{f_0^\varepsilon(x)\colon f_i^\varepsilon(x) \le 0,\ i=\overline{1,m};\ \Omega(x)\le d\} \tag{10}$$

— аналога метода квазирешений (6). Задача (10) наглядно показывает суть метода квазирешений, которая заключается в добавлении к ограничениям возмущенной задачи (5) компактного множества $Q_d = \{x\colon \Omega(x) \le d\}$ и возможности его расширения с ростом d. Наличие множества Q_d помогает снять вопрос о разрешимости соответствующих задач и обеспечивает необходимый характер аппроксимации исходной задачи.

Наряду с (10) будем рассматривать задачу

$$\min\{f_0(x)\colon f_i(x)\le 0,\ i=\overline{1,m};\ \Omega(x)\le d\}, \tag{11}$$

полученную из (10) при $\varepsilon = 0$. Очевидна тесная связь между (11) и начальной постановкой задачи (1). Если множество X^* решений (1) непусто и $d \ge d^* = \min\{\Omega(x) \mid x \in X^*\}$, то оптимальное множество задачи (11) $X_d^* = X^* \cap Q_d$.

Теорема 1. *Пусть для задачи* (1) *выполнено условие*

$$\exists \alpha_1 \ge 0,\ \alpha_2 \ge 0\colon\quad f_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\Omega(x) \ge \sigma > -\infty\ \ (\forall x \in \mathbb{R}^n). \tag{12}$$

Тогда для любого $s = [r,\rho,d,\varepsilon]$, $r > \alpha_1$, $\rho \ge \alpha_2 + 1$, $d > 0$, $\varepsilon \ge 0$ *существует точка* $\tilde{x}_s = \arg\min\limits_x F_s(x)$, *удовлетворяющая неравенствам*

$$\varphi_1(\tilde{x}_s) \le \frac{(1+\alpha_2)(A_1(s)+\alpha_2 d)}{r-\alpha_1}; \tag{13}$$

$$\Omega(\tilde{x}_s) \le d + \frac{A_1(s)+\alpha_2 d}{\rho-\alpha_2}; \tag{14}$$

$$f_0(\tilde{x}_s) \le \bar{f}_d + A(s), \tag{15}$$

где $\bar{f}_d$ *— оптимальное значение задачи* (11), $A(s) = 2\varepsilon(1+mr)$, $A_1(s) = \bar{f}_d - \sigma + A(s)$.

Любая предельная точка $\tilde{x}$ *последовательности* $\{\tilde{x}_s\}$ *при* $r\to\infty$, $\rho\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, $\varepsilon r\to 0$ *решает задачу* (11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие (12) гарантирует выполнение леммы 1 из предыдущей работы автора [3]. Согласно этой лемме задача (7) разрешима для любого $s = [r,\rho,\varepsilon,d]$, если $r > \alpha_1$, $\rho \ge \alpha_2 + 1$, $d > 0$, $\varepsilon \ge 0$. Обозначим решения задач (7) и (11) через $\tilde{x}_s$ и $\bar{x}_d$ соответственно.

Учитывая (4) при $\Psi_i(x) \equiv 1$, имеем

$$\varphi_1(x) = \sum_{i=1}^m f_i^+(x) \le \varphi_1^\varepsilon(x) + m\varepsilon \quad (\forall x).$$

Поэтому

$$|F_s(x) - F_d^0(x,R)| \le \varepsilon\,(1+m\varepsilon) = \frac{1}{2}A(s), \tag{16}$$

где $F_d^0(x,R) = f_0(x) + r\varphi_1(x) + \rho(\Omega(x)-d)^+$, $R = [r,\rho] > 0$.

Из определения точек $\tilde{x}_s$ и $\bar{x}_d$ следует $F_s(\tilde{x}_s) \le F_s(\bar{x}_d)$, откуда

$$f_0(\tilde{x}_s) + r\varphi_1(\tilde{x}_s) + \rho(\Omega(\tilde{x}_s)-d)^+ \le \bar{f}_d + A(s), \tag{17}$$

что с учетом (12) дает $\sigma + (r-\alpha_1)\varphi_1(\tilde{x}_s) + \rho(\Omega(\tilde{x}_s)-d)^+ - \alpha_2\Omega(\tilde{x}_s) \le \bar{f}_d + A(s)$. Отсюда следуют два неравенства

[3]Скарин В. Д. О применении метода квазирешений для коррекции противоречивых задач выпуклого программирования… С. 190.

а) $\rho\,(\Omega(\tilde{x}_s)-d)^+ - \alpha_2\Omega(\tilde{x}_s) \le \bar{f}_d - \sigma + A(s) \equiv A_1(s)$,

б) $(r-\alpha_1)\varphi_1(\tilde{x}_s) \le \alpha_2\Omega(\tilde{x}_s) + A_1(s)$.

Из неравенства а) вытекает

$$(\rho-\alpha_2)(\Omega(\tilde{x}_s)-d) \le \alpha_2 d + A_1(s),$$

что влечет справедливость оценки (14). Применяя эту оценку в б), получим

$$(r-\alpha_1)\varphi_1(\tilde{x}_s) \le \alpha_2\Big(d+\frac{A_1(s)+\alpha_2 d}{\rho-\alpha_2}\Big)+A_1(s) \le \alpha_2(d+A_1(s)+\alpha_2 d)+A_1(s) = (1+\alpha_2)(\alpha_2 d+A_1(s)),$$

что равносильно оценке (13).

Неравенство (15) выполняется в силу (17).

Заметим, что правые части оценок (13) и (14) всегда неотрицательны, несмотря на то что константа σ входит в выражение $A_1(s)$ со знаком “$-$”. В самом деле, из (12) следует

$$A_1(s)+\alpha_2 d = \bar{f}_d + \alpha_2 d - \sigma + A(s) \ge \bar{f}_d + \alpha_2\Omega(\bar{x}_d) - \sigma + A(s) \ge A(s) \ge 0.$$

Далее, пусть параметр d фиксирован, $r\to\infty$, $\rho\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, $\varepsilon r\to 0$. Из оценки (14) следует ограниченность последовательности $\{\tilde{x}_s\}$. Если при этом $\tilde{x}$ — предельная точка $\{\tilde{x}_s\}$, то согласно неравенствам (13)–(15) $\varphi_1(\tilde{x})=0$, $\Omega(\tilde{x})\le d$, $f_0(\tilde{x})\le \bar{f}_d$, т. е. $\tilde{x}$ — решение задачи (11).

Теорема доказана.

Предположим далее, что в задаче (1)

$$\begin{gathered} X\ne\varnothing,\ \ X^*=\varnothing,\ \ \inf_{x\in X} f_0(x)=f^*>-\infty \\ \text{и для задачи (1) выполнено условие Слейтера: } \exists x^0\in X,\ \ f_i(x^0)<0,\ \ i=\overline{1,m}. \end{gathered} \tag{18}$$

Будем считать, что в (11) $d>\Omega(x^0)$. В этом случае функция Лагранжа для задачи (11)

$$L_d(x;\lambda,\mu)=f_0(x)+(\lambda,f(x))+\mu(\Omega(x)-d)$$

будет иметь в области $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+\times\mathbb{R}^1_+$ седловую точку $[\bar{x}_d;\bar{\lambda}_d,\bar{\mu}_d]$, где $\bar{\lambda}_d=[(\bar{\lambda}_d)_1,\dots,(\bar{\lambda}_d)_m]\ge 0$, $\bar{\mu}_d\ge 0$. Из определения седловой точки вытекает соотношение

$$\bar{f}_d\equiv f_0(\bar{x}_d)\le f_0(x)+(\bar{\lambda}_d,f(x))+\bar{\mu}_d(\Omega(x)-d)\quad(\forall x\in\mathbb{R}^n). \tag{19}$$

Полагая в (19) $x=x^0$, получим два неравенства

$$\bar{f}_d\le f_0(x^0)+(\bar{\lambda}_d,f(x^0));\quad \bar{f}_d\le f_0(x^0)+\bar{\mu}_d(\Omega(x^0)-d).$$

Из них следует

1) $(\bar{\lambda}_d)_i \le \dfrac{f_0(x^0)-\bar{f}_d}{\min\limits_{1\le i\le m}|f_i(x^0)|}\quad (i=\overline{1,m});\quad$ 2) $\bar{\mu}_d\le\dfrac{f_0(x^0)-\bar{f}_d}{d-\Omega(x^0)}$.

Так как $f_0(x)\ge f^*>-\infty$ $(\forall x\in X)$, то $f_0(x^0)-\bar{f}_d\le f_0(x^0)-f^*$, и неравенства 1) и 2) дают оценки для множителей Лагранжа $\bar{\lambda}_d$ и $\bar{\mu}_d$:

$$\begin{aligned} &1)\quad (\bar{\lambda}_d)_i\le C_1,\quad i=1,\dots,m,\quad \text{где}\quad C_1=\frac{f_0(x^0)-f^*}{\min\limits_{1\le i\le m}|f_i(x^0)|};\\ &2)\quad \bar{\mu}_d\le\frac{f_0(x^0)-f^*}{d-\Omega(x^0)}. \end{aligned} \tag{20}$$

Очевидно, что последовательность $\{\bar{\mu}_d\}$ при $d\to\infty$ ограничена и $\lim\limits_{d\to\infty}\bar{\mu}_d=0$. Можно считать, что $\bar{\mu}_d\le C_2=\mathrm{const}$, если $d\ge\bar{d}=\Omega(x^0)+\dfrac{f_0(x^0)-f^*}{C_2}$. В частности, $\bar{\mu}_d\le 1$ при $d\ge\Omega(x^0)+f_0(x^0)-f^*$.

Лемма 1. *Пусть для задачи* (1) *выполнены условия* (18). *Существуют такие константы* $\bar r$, $\bar\rho$ *и* $\bar d$, *что задача* (7) *будет разрешима для любых* $r > \bar r$, $\rho = \bar\rho$, $d > \bar d$ *и* $\varepsilon \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^1_+$ $[\bar x_d; \bar\lambda_d, \bar\mu_d]$ — седловая точка функции $L_d(x; \lambda, \mu)$, $d > \Omega(x^0)$. Рассмотрим множество $M_d = \{x\colon F^0_d(x, R) \leq F^0_d(\bar x_d, R)\}$, и пусть $x' \in M_d$. Тогда $f_0(x') + r\varphi_1(x') + \rho(\Omega(x') - d)^+ \leq \bar f_d$. Применяя неравенство (19), получим

$$r\varphi_1(x') + \rho(\Omega(x') - d)^+ \leq \bar f_d - f_0(x') \leq (\bar\lambda_d, f^+(x')) + \bar\mu_d(\Omega(x') - d)^+$$

$$\leq \|\bar\lambda_d\|_\infty \, \|f^+(x')\|_1 + \bar\mu_d(\Omega(x') - d)^+ \leq C_1\varphi_1(x') + \bar\mu_d(\Omega(x') - d)^+.$$

Отсюда

$$(r - C_1)\varphi_1(x') + (\rho - \bar\mu_d)(\Omega(x') - d)^+ \leq 0. \tag{21}$$

Пусть $r > \bar r = C_1$, $\rho > \bar\rho = \dfrac{f_0(x^0) - f^*}{\bar d - \Omega(x^0)}$, $d > \bar d > \Omega(x^0)$. Тогда

$$\rho > \frac{f_0(x^0) - f^*}{\bar d - \Omega(x^0)} > \frac{f_0(x^0) - f^*}{d - \Omega(x^0)} \geq \bar\mu_d,$$

и из (21) вытекает равенство $(\Omega(x') - d)^+ = 0$. Таким образом, $M_d \subset Q_d = \{x\colon \Omega(x) \leq d\}$, и тем самым M_d — ограниченное множество.

Пусть теперь $y \in M(s) = \{x\colon F_s(x) \leq F_s(\bar x_d)\}$. В силу (16) справедливо

$$F^0_d(y, R) \leq F_s(y) + \varepsilon(1 + mr) \leq F_s(\bar x_d) + \varepsilon(1 + mr),$$

поэтому

$$M(s) \subset \widetilde M(s) = \{x\colon F^0_d(x, R) \leq F_s(\bar x_d) + \varepsilon(1 + mr)\}.$$

Так как множество M_d ограничено, то из выпуклости функции $F^0_d(x, R)$ по x следует ограниченность множеств $\widetilde M(s)$ и $M(s)$. Но $\inf\limits_x F_s(x) = \min\limits_{x \in M(s)} F_s(x)$, поэтому существует точка $\tilde x_s = \arg\min F_s(x)$.

Лемма доказана.

Из леммы 1 видно, что параметры ρ и d в задаче (7) тесно взаимосвязаны; а именно, в качестве ρ может быть выбрано любое положительное число $\bar\rho$, например, $\bar\rho = 1$ (другими словами, параметр ρ в явном виде может отсутствовать в выражении для $F_s(x)$). Если параметр ρ зафиксирован: $\rho = \bar\rho$, то для выполнения неравенства $\rho - \bar\mu_d > 0$ в (21) требуется, чтобы $d > \bar d = \Omega(x^0) + \dfrac{f_0(x^0) - f^*}{\bar\rho}$. Следовательно, увеличение $\bar\rho$ ведет к уменьшению $\bar d$, что в свою очередь расширяет область применимости метода квазирешений.

Теорема 2. *Пусть справедливы условия леммы* 1 *и в задаче* (7) $r = \bar r \geq C_1 + 1$, $\rho = \bar\rho > \alpha > 0$, $d > \bar d = \Omega(x^0) + \dfrac{f_0(x^0) - f^*}{\bar\rho - \alpha}$, $\varepsilon \geq 0$, *где* C_1 — *из* (20), α — *некоторая константа. Справедливы следующие соотношения*:

$$f_i^+(\tilde x_s) \leq \varphi_1(\tilde x_s) \leq C_0\,\varepsilon, \quad (\Omega(\tilde x_s) - d)^+ \leq \frac{C_0}{\alpha}\,\varepsilon, \quad |f_0(\tilde x_s) - \bar f_d| \leq C_2\,\varepsilon, \tag{22}$$

где $\tilde x_s = \arg\min\limits_x F_s(x)$, $C_0 = 2(1 + m\bar r)$, $C_2 = C_0 \max\Big\{1, C_1 + \dfrac{\bar\rho}{\alpha} - 1\Big\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 1 задача (7) при сформулированных в теореме условиях имеет решение $\tilde x_s$. Применяя оценки (17) и (19), получаем неравенство, аналогичное (21):

$$(\bar r - C_1)\varphi_1(\tilde x_s) + (\bar\rho - \bar\mu_d)(\Omega(\tilde x_s) - d)^+ \leq C_0\,\varepsilon.$$

Отсюда следует, что
$$(\bar\rho-\bar\mu_d)(\Omega(\tilde x_s)-d)^+ \le C_0\,\varepsilon.$$

Но согласно (20)
$$\bar\mu_d \le \frac{f_0(x^0)-f^*}{d-\Omega(x^0)} < \frac{f_0(x^0)-f^*}{\bar d-\Omega(x^0)} = \frac{f_0(x^0)-f^*}{\Omega(x^0)+(f_0(x^0)-f^*)/(\bar\rho-\alpha)-\Omega(x^0)} = \bar\rho-\alpha,$$

поэтому $(\bar\rho-\bar\mu_d)(\Omega(\tilde x_s)-d)^+ > \alpha(\Omega(\tilde x_s)-d)^+$, что вместе с условием $\bar r > C_1+1$ приводит к первым двум оценкам (22).

Используя эти оценки и неравенство (19) при $x=\tilde x_s$, получим
$$\bar f_d - f_0(\tilde x_s) \le C_1\varphi_1(\tilde x_s) + \bar\mu_d(\Omega(\tilde x_s)-d)^+ \le C_1\varphi_1(\tilde x_s) + (\bar\rho-\alpha)(\Omega(\tilde x_s)-d)^+$$
$$\le C_1C_0\,\varepsilon + (\bar\rho-\alpha)\frac{C_0}{\alpha}\,\varepsilon = C_0\Big(C_1+\frac{\bar\rho}{\alpha}-1\Big)\,\varepsilon.$$

С другой стороны, из неравенства (17) следует $f_0(\tilde x_s)-\bar f_d \le C_0\,\varepsilon$, что вместе с предыдущим неравенством приводит к последней из оценок (22).

Теорема доказана.

Очевидным образом из теоремы 2 вытекают следующие следствия.

Следствие 1. *Пусть в задаче* (7) $d=\bar d$, $\bar d > \Omega(x^0)$, $r=\bar r > \|\bar\lambda_d\|_\infty$, $\rho=\bar\rho>\bar\mu_d$. *Тогда*
$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_s(\tilde x_s) = \bar f_{\bar d}.$$

Следствие 2. *Пусть в задаче* (7) $\varepsilon=0$, *т. е. функции* $f_i(x)$, $i=0,1,\dots,m$, *известны точно,* $d>\Omega(x^0)$. *Существуют пороговые значения* $\bar r$ *и* $\bar\rho$ *параметров* r *и* ρ, *что при* $r\ge\bar r$, $\rho\ge\bar\rho$ *точки* $\tilde x_s$ *будут решениями задачи* (11). *При этом значение* $\bar r$ *не зависит от величины* d.

Этот результат характерен для метода точных штрафных функций в ВП (см. [12]).

Теорема 3. *Пусть в задаче* (1) $X\ne\varnothing$, $X^*=\varnothing$, $\inf\limits_{x\in X} f_0(x) = f^* > -\infty$. *Если выполнены предположения теоремы* 2 *и* $d\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, *то*
$$\lim F_d^*(\varepsilon) = f^*,$$
где $F_d^*(\varepsilon)=\min\limits_x F_d^\varepsilon(x,\bar R)$, $\bar R=[\bar r,\bar\rho]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $d_2>d_1\ge\bar d$, то $X\cap Q_{d_1}\subset X\cap Q_{d_2}$ и $\bar f_{d_2}\le\bar f_{d_1}$. Таким образом, последовательность $\{\bar f_d\}$ монотонно убывает с ростом d и ограничена снизу величиной f^*. Поэтому существует предел $\lim\limits_{d\to\infty}\bar f_d=\tilde f\ge f^*$.

Рассмотрим последовательность точек $x_k\in X$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} f_0(x_k)=f^*$. Обозначим $d_k=\Omega(x_k)$, $\bar f_k=\min\{f_0(x)\colon x\in X\cap Q_{d_k}\}$. Так как $x_k\in X\cap Q_{d_k}$, то $f_0(x_k)\ge\bar f_k$. Поэтому $f^*=\lim\limits_{k\to\infty} f_0(x_k)\ge\lim\limits_{k\to\infty}\bar f_k=\tilde f\ge f^*$. Отсюда $\lim\limits_{d\to\infty}\bar f_d=\tilde f=f^*$.

Оценивая $F_d^*(\varepsilon)$, получим
$$F_d^*(\varepsilon)=f_0^\varepsilon(\tilde x_s)+\bar r\varphi_1^\varepsilon(\tilde x_\varepsilon)+\bar\rho(\Omega(\tilde x_s)-d)^+ \le f_0^\varepsilon(\bar x_d)+\bar r\varphi_1^\varepsilon(\bar x_d)+\bar\rho(\Omega(\tilde x_s)-d)^+ \le \bar f_d+\varepsilon(1+m\bar r).$$

С другой стороны, применяя (22), имеем
$$F_d^*(\varepsilon)=F_s(\tilde x_s)\ge f_0^\varepsilon(\tilde x_s)\ge f_0(\tilde x_s)-\varepsilon\ge\bar f_d-\varepsilon\,(1+C_2).$$

Таким образом,

$$\bar{f}_d + \varepsilon\,(1 + m\bar{r}) \geq F_d^*(\varepsilon) \geq \bar{f}_d - \varepsilon\,(1 + C_2)$$

и, окончательно,

$$\lim_{d\to\infty,\,\varepsilon\to 0} F_d^*(\varepsilon) = f^*.$$

Теорема доказана.

В теоремах 1–3 исследовалась сходимость метода (7). Показано, что применение в методе квазирешений функции точного штрафа $\varphi_1(x)$ (или $\varphi_1^\varepsilon(x)$ для возмущенной задачи) обеспечивает эквивалентность сравниваемых задач, начиная с некоторых фиксированных значений штрафных параметров r и ρ (в теоремах 2 и 3 эти пороговые значения определялись множителями Лагранжа для задачи (11)). Данные результаты полностью согласуются с теорией точных штрафных функций для задач ВП (см. [12; 13]).

3. Метод квазирешений и квадратичная штрафная функция

Далее по аналогии с разд. 2 проверим работоспособность метода квазирешений, когда в качестве штрафной функции выбирается функция квадратичного штрафа $\varphi^\varepsilon(x) = \varphi_2^\varepsilon(x)$. Как и ранее, вначале предположим, что в условиях (4) $\Psi_i(x) \equiv 1$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Рассмотрим задачу (8): $\min\limits_x\{\Phi_s(x) = f_0^\varepsilon(x) + r\varphi_2^\varepsilon(x) + \rho\,(\Omega(x) - d)^{+^2}\}$, $\varphi_2^\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^m (f_i^{\varepsilon^+}(x))^2$, $s = [r, \rho, d, \varepsilon]$, $r > 0$, $\rho > 0$, $d > 0$, $\varepsilon \geq 0$.

Лемма 2. *Пусть для задачи* (1) *выполнено условие* (12). *Тогда задача* (8) *разрешима для любых $r \geq \alpha_1$, $\rho > 0$, $d > 0$, $\varepsilon \geq 0$.*

Доказательство. Покажем, что если выполнено (12), то найдутся числа $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$, $\sigma_1 > -\infty$ такие, что

$$f_0(x) + \beta_1\varphi_2(x) + \beta_2\Omega(x) \geq \sigma_1 > -\infty \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n). \tag{23}$$

В самом деле, в силу (12) имеем

$$f_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\Omega(x) = f_0(x) + \alpha_1\varphi_2(x) + \alpha_2\Omega(x) + \alpha_1\varphi_1(x) - \alpha_1\varphi_2(x) \geq \sigma.$$

Отсюда

$$f_0(x) + \alpha_1\varphi_2(x) + \alpha_2\Omega(x) \geq \sigma + \alpha_1(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) = \sigma + \alpha_1\sum_{i=1}^m (f_i^{+^2}(x) - f_i^+(x))$$

$$= \sigma + \alpha_1\sum_{i=1}^m \Big(f_i^+(x) - \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{m\,\alpha_1}{4} \geq \sigma - \frac{m\,\alpha_1}{4}.$$

Таким образом, условие (23) выполняется при $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$, $\sigma_1 = \sigma - m\,\alpha_1/4$, где α_1, α_2, σ — из (12).

Из определения функций $f_i^\varepsilon(x)$ следует

$$|\varphi_2^\varepsilon(x) - \varphi_2(x)| = \Big|\sum_{i=1}^m [(f_i^{\varepsilon^+}(x))^2 - (f_i^+(x))^2]\Big| = \Big|\sum_{i=1}^m (f_i^{\varepsilon^+}(x) - f_i^+(x))(f_i^{\varepsilon^+}(x) + f_i^+(x))\Big|$$

$$\leq \varepsilon\sum_{i=1}^m (f_i^{\varepsilon^+}(x) + f_i^+(x)) \leq \sum_{i=1}^m (2\,\varepsilon\, f_i^{\varepsilon^+}(x) + \varepsilon^2)$$

$$\leq \sum_{i=1}^m [(f_i^{\varepsilon^+}(x))^2 + 2\,\varepsilon^2] = \varphi_2^\varepsilon(x) + 2\,m\,\varepsilon^2. \tag{24}$$

Очевидно, что наряду с (24) будет выполняться и неравенство

$$|\varphi_2^\varepsilon(x) - \varphi_2(x)| \le \varphi_2(x) + 2\, m\, \varepsilon^2. \tag{25}$$

С учетом (23) и (24) и условия $r \ge \alpha_1 = \beta_1$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\Phi_s(x) = f_0^\varepsilon(x) + r\varphi_2^\varepsilon(x) + \rho\,(\Omega(x) - d)^{+^2} \ge f_0(x) + r\varphi_2(x) + \rho\,(\Omega(x) - d)^{+^2} - \varepsilon\,(1 + 2\, rm\,\varepsilon)$$

$$= f_0(x) + \beta_1\varphi_2(x) + \beta_2\Omega(x) + (r - \beta_1)\varphi_2(x) + \rho\,(\Omega(x) - d)^{+^2} - \beta_2\Omega(x) - \varepsilon\,(1 + 2\, rm\,\varepsilon)$$

$$\ge \sigma_1 + \rho\,(\Omega(x) - d)^{+^2} - \beta_2(\Omega(x) - d)^+ - \beta_2 d - \varepsilon\,(1 + 2\, rm\,\varepsilon). \tag{26}$$

Обозначим $M(C) = \{x\colon \Phi_s(x) \le C\}$. Пусть $C \ge \sigma_1$, $M(C) \ne \varnothing$ и $x' \in M(C)$. Из соотношения (26) вытекает

$$C \ge \Phi_s(x') \ge \sigma_1 + \Big[\sqrt{\rho}\,(\Omega(x) - d)^+ - \frac{\beta_2}{2\sqrt{\rho}}\Big]^2 - \frac{\beta_2^2}{4\,\rho} - \beta_2 d - \varepsilon\,(1 + 2\, rm\,\varepsilon). \tag{27}$$

Если положить $B = B(s, C, \sigma_1, \beta_2) = C - \sigma_1 + \beta_2^2/(4\,\rho) + \beta_2 d + \varepsilon\,(1 + 2\, rm\,\varepsilon)$, то из (27) получим $\sqrt{\rho}\,(\Omega(x') - d)^+ \le \beta_2/(2\sqrt{\rho}) + \sqrt{B}$, и, следовательно, $\Omega(x') \le d + \beta_2/(2\,\rho) + \sqrt{B/\rho}$. Таким образом, множество $M(C)$ ограничено: $M(C) \subset Q(B_1) = \{x\colon \Omega(x) \le B_1\}$, где $B_1 = B_1(s, C, \sigma_1, \beta_2) = d + \beta_2/(2\,\rho) + \sqrt{B/\rho}$. В силу равенства $\inf\limits_x \Phi_s(x) = \min\limits_{x \in M(C)} \Phi_s(x)$ и непрерывности функции $\Phi_s(x)$ по x существует точка $\bar{x}_s = \arg\min\limits_x \Phi_s(x)$.

Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть для задачи* (1) *выполнена лемма* 2 *и* $d > d_0 = \inf\{\Omega(x)\colon x \in X\}$. *Тогда решение* $\bar{x}_s$ *задачи* (8) *для* $r \ge \beta_1$, $\rho > 0$, $d > d_0$, $\varepsilon \ge 0$ *удовлетворяет соотношениям*

$$(\Omega(\bar{x}_s) - d)^+ \le \frac{\beta_2}{2\,\rho} + \sqrt{\frac{B_2}{\rho}}, \tag{28}$$

$$\varphi_2(\bar{x}_s) \le \frac{B_2}{r - \beta_1}, \tag{29}$$

где $B_2 = B_2(s, \beta_2, \sigma_1) = \bar{f}_d - \sigma_1 + \beta_2/(4\,\rho) + \beta_2 d + 2\,\varepsilon\,(1 + mr\,\varepsilon)$, $\bar{f}_d$ — *оптимальное значение задачи* (11), *величины* σ_1, β_1, β_2 — *из* (23).

Любая предельная точка последовательности $\{\bar{x}_s\}$ *при* $r \to \infty$, $\rho \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon^2 r \to 0$ *и фиксированном* d *будет решением задачи* (11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся неравенствами (26), (27), полученными при проверке леммы 2. Полагая $x' = \bar{x}_s$, $C = \Phi_s(\bar{x}_d)$, где $\bar{x}_d$ — решение задачи (11), имеем

$$\Phi_s(\bar{x}_d) \ge \sigma_1 + (r - \beta_1)\varphi_2(\bar{x}_s) + \Big[\sqrt{\rho}\,(\Omega(\bar{x}_s) - d)^+ - \frac{\beta_2}{2\sqrt{\rho}}\Big]^2 - \frac{\beta_2^2}{4\,\rho} - \beta_2 d - \varepsilon\,(1 + 2\, rm\,\varepsilon). \tag{30}$$

Так как с учетом (25)

$$\Phi_s(\bar{x}_d) = f_0^\varepsilon(\bar{x}_d) + r\varphi_2^\varepsilon(\bar{x}_d) + \rho\,(\Omega(\bar{x}_d) - d)^{+^2} \le \bar{f}_d + \varepsilon\,(1 + 2\, mr\,\varepsilon), \tag{31}$$

то из (30) получаем

$$(r - \beta_1)\varphi_2(\bar{x}_s) + \Big[\sqrt{\rho}\,(\Omega(\bar{x}_s) - d)^+ - \frac{\beta_2}{2\sqrt{\rho}}\Big]^2 \le \bar{f}_d - \sigma_1 + \frac{\beta_2^2}{4\,\rho} + \beta_2 d + 2\,\varepsilon\,(1 + 2\, mr\,\varepsilon).$$

Обозначая правую часть этого неравенства через $B_2 = B_2(s, \beta_2, \sigma_1)$, приходим к оценкам (28), (29). Из оценки (28) следует ограниченность последовательности $\{\bar{x}_s\}$ при $r \to \infty$, $\rho \to \infty$,

$\varepsilon \to 0$, $\varepsilon^2 r \to 0$ и фиксированном d. Пусть $\tilde{x}$ — предельная точка $\{\bar{x}_s\}$. Тогда в силу (28) и (29) $\tilde{x} \in X \cap Q_d$ и, следовательно, $f_0(\tilde{x}) \geq \bar{f}_d$. С другой стороны, из определения точки $\bar{x}_s$ и (31) вытекает

$$f_0(\bar{x}_s) - \varepsilon \leq f_0^\varepsilon(\bar{x}_s) \leq \Phi_s(\bar{x}_s) \leq \Phi_s(\bar{x}_d) \leq \bar{f}_d + \varepsilon\,(1 + 2\,mr\,\varepsilon),$$

и поэтому $f_0(\tilde{x}) \leq \bar{f}_d$. Таким образом, $f_0(\tilde{x}) = \bar{f}_d$.

Теорема доказана.

Лемма 3. *Пусть для задачи* (11) *в некоторой точке* x^0 *выполнено условие Слейтера. Тогда задача* (8) *разрешима для любых* $r > 0$, $\rho > 0$, $d > \Omega(x^0)$, $\varepsilon \geq 0$.

Доказательство. Если выполнены условия леммы, то существует седловая точка $[\bar{x}_d; \bar{\lambda}_d, \bar{\mu}_d]$ функции Лагранжа для задачи (11)

$$L_d(x; \lambda, \mu) = f_0(x) + (\lambda, f(x)) + \mu\,(\Omega(x) - d), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}^m_+, \quad \mu \in \mathbb{R}^1_+.$$

Из определения седловой точки следует неравенство (19), поэтому

$$\bar{f}_d \equiv f_0(\bar{x}_d) \leq f_0(x) + (\bar{\lambda}_d, f^+(x)) + \bar{\mu}_d(\Omega(x) - d)^+ \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n). \tag{32}$$

Обозначим $M_s = \{x\colon \Phi_s(x) \leq \Phi_s(\bar{x}_d)\}$, и пусть $x' \in M_s$. Воспользуемся оценками (25) и (26), полученными при доказательстве леммы 2. Если $x = x'$, то из (26) получим

$$\Phi_s(x') \geq f_0(x') + r\varphi_2(x') + \rho\,(\Omega(x') - d)^{+^2} - A_2(s),$$

где $A_2(s) = \varepsilon\,(1 + 2\,mr\,\varepsilon)$. С другой стороны, с помощью (25) оценим

$$\Phi_s(\bar{x}_d) = f_0^\varepsilon(\bar{x}_d) + r\varphi_2^\varepsilon(\bar{x}_d) \leq \bar{f}_d + \varepsilon + r\varphi_2(\bar{x}_d) + 2\,mr\,\varepsilon^2 = \bar{f}_d + A_2(s). \tag{33}$$

Так как $x' \in M_s$, то в итоге имеем

$$f_0(x') + r\varphi_2(x') + \rho\,(\Omega(x') - d)^{+^2} \leq \Phi_s(x') + A_2(s) \leq \Phi_s(\bar{x}_d) + A_2(s) \leq \bar{f}_d + 2\,A_2(s). \tag{34}$$

Полагая в (32) $x = x'$, получим

$$\bar{f}_d - f_0(x') \leq \|\bar{\lambda}_d\|\,\|f^+(x')\| + \bar{\mu}_d(\Omega(x') - d)^+.$$

Тогда из (34) следует

$$r\varphi_2(x') + \rho\,(\Omega(x') - d)^{+^2} \leq \|\bar{\lambda}_d\|\,\|f^+(x')\| + \bar{\mu}_d(\Omega(x') - d)^+ + 2\,A_2(s).$$

Отсюда

$$\Big[\sqrt{r}\,\|f^+(x')\| - \frac{\|\bar{\lambda}_d\|}{2\sqrt{r}}\Big]^2 - \frac{\|\bar{\lambda}_d\|^2}{4\,r} + \Big[\sqrt{\rho}\,(\Omega(x') - d)^+ - \frac{\bar{\mu}_d}{2\sqrt{\rho}}\Big]^2 - \frac{\bar{\mu}_d^2}{4\,\rho} \leq 2\,A_2(s) \tag{35}$$

и, следовательно,

$$\Big[\sqrt{\rho}\,(\Omega(x') - d)^+ - \frac{\bar{\mu}_d}{2\sqrt{\rho}}\Big]^2 \leq A_3(s),$$

где $A_3(s) = \|\bar{\lambda}_d\|^2/(4\,r) + \bar{\mu}_d^2/(4\,\rho) + 2\,A_2(s)$.

Окончательно получаем оценку

$$\Omega(x') \leq d + A_4(s), \tag{36}$$

где $A_4(s) = \bar{\mu}_d/(2\,\rho) + (A_3(s)/\rho)^{1/2}$.

Таким образом, $M_s \subset \{x\colon \Omega(x) \leq d + A_4(s)\}$, т.е. множество M_s ограничено. Так как функция $\Phi_s(x)$ непрерывна относительно x и $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \Phi_s(x) = \min\limits_{x \in M_s} \Phi_s(x)$, то существует точка $\bar{x}_s = \arg\min\limits_x \Phi_s(x)$.

Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть выполнена лемма* 3, $\bar{x}_s = \arg\min_x \Phi_s(x)$. *Тогда для любых* $s = [r, \rho, d, \varepsilon]$, $r > 0$, $\rho > 0$, $d > \Omega(x^0)$, $\varepsilon \geq 0$ *справедливы оценки*

$$(\Omega(\bar{x}_s) - d)^+ \leq A_4(s); \tag{37}$$

$$f_i^+(\bar{x}_s) \leq \|f^+(\bar{x}_s)\| = \sqrt{\varphi_2(\bar{x}_s)} \leq A_5(s), \quad i = 1, \dots, m; \tag{38}$$

$$|f_0(\bar{x}_s) - \bar{f}_d| \leq \max\{2A_2(s), \|\bar{\lambda}_d\|\, A_5(s) + \bar{\mu}_d A_4(s)\}, \tag{39}$$

где величины $A_2(s)$, $A_3(s)$, $A_4(s)$ — *из* (34), (36), $A_5(s) = \|\bar{\lambda}_d\|/(2r) + (A_3(s)/r)^{1/2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\bar{x}_s \in M_s = \{x \colon \Phi_s(x) \leq \Phi_s(\bar{x}_d)\}$, то, полагая в (35) $x' = \bar{x}_s$, получим два неравенства

$$\Big(\sqrt{\rho}\,(\Omega(\bar{x}_s) - d)^+ - \frac{\bar{\mu}_d}{2\sqrt{\rho}}\Big)^2 \leq A_3(s), \quad \Big(\sqrt{r}\,\|f^+(\bar{x}_s)\| - \frac{\|\bar{\lambda}_d\|}{2\sqrt{r}}\Big)^2 \leq A_3(s),$$

из которых следуют оценки (37) и (38).

Далее, из (34) при $x' = \bar{x}_s$ имеем

$$f_0(\bar{x}_s) - \bar{f}_d \leq 2\, A_2(s). \tag{40}$$

Из соотношения (32) при $x = \bar{x}_s$ вытекает

$$\bar{f}_d - f_0(\bar{x}_s) \leq \|\bar{\lambda}_d\|\, \|f^+(\bar{x}_s)\| + \bar{\mu}_d(\Omega(\bar{x}_s) - d)^+ \leq \|\bar{\lambda}_d\|\, A_5(s) + \bar{\mu}_d A_4(s), \tag{41}$$

что вместе с (40) дает оценку (39).

Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.

1. *Если в задаче* (8) *параметр* d *фиксирован,* $d = \tilde{d} = \mathrm{const}$, $r \to \infty$, $\rho \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon r \leq r_0 = \mathrm{const}$, *то* $\lim \bar{\Phi}(s) = \lim f_0(\bar{x}_s) = \bar{f}_{\tilde{d}}$.

2. *Если в задаче* (8) *фиксирован параметр* $\rho = \bar{\rho} = \mathrm{const}$, $r \to \infty$, $d \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon r \leq r_0$, *то* $\lim \bar{\Phi}(s) = \lim f_0(\bar{x}_s) = f^*$.

Здесь $\bar{\Phi}(s) = \Phi_s(\bar{x}_s)$, $\bar{x}_s = \arg\min_x \Phi_s(x)$, $\bar{f}_d$ — *оптимальное значение задачи* (11), $f^* = \inf_{x \in X} f_0(x)$, $f^* > -\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проанализируем поведение величин $A_2(s)$–$A_5(s)$ из оценок (37)–(39) при изменении параметра s согласно пп. 1, 2. Очевидно,

$$A_2(s) = \varepsilon\,(1 + 2\,mr\,\varepsilon) \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$, $r \to \infty$, $\varepsilon r \leq r_0$. Для $A_3(s) = 2\,A_2(s) + \|\bar{\lambda}_d\|^2/(4r) + \bar{\mu}_d^2/(4\rho)$ с учетом (20) получим

$$A_3(s) \leq 2\,A_2(s) + m\,C_1^2/(4r) + \frac{(f_0(x^0) - f^*)^2}{4\,\rho\,(d - \Omega(x^0))^2}.$$

Отсюда $A_3(s) \to 0$, когда $\varepsilon \to 0$, $r \to \infty$, $\varepsilon r \leq r_0$ и по крайней мере один из параметров ρ или d стремится к $+\infty$. Величины

$$A_4(s) = \bar{\mu}_d/(2\,\rho) + (A_3(s)/\rho)^{1/2}, \quad A_5(s) = \|\bar{\lambda}_d\|/(2r) + (A_3(s)/r)^{1/2}$$

будут стремиться к нулю одновременно с $A_3(s)$.

Далее, из соотношений (33) и (41) следует

$$\bar{f}_d - \|\bar{\lambda}_d\|\, A_5(s) - \bar{\mu}_d A_4(s) \leq f_0(\bar{x}_s) \leq f_0^{\varepsilon}(\bar{x}_s) + \varepsilon \leq \Phi_s(\bar{x}_s) + \varepsilon \equiv \bar{\Phi}(s) + \varepsilon \leq \bar{f}_d + \varepsilon + A_2(s).$$

Из этого соотношения непосредственно вытекает утверждение 1 теоремы 6. Если теперь учесть, что $\lim_{d \to \infty} \bar{f}_d = f^*$ (см. доказательство теоремы 3), то можно заключить, что справедливо и утверждение 2.

Теорема доказана.

4. Замечания о возмущении функций исходной задачи

Выше метод квазирешений был обоснован при условии, что в задаче (1) вместо функций $f_i(x)$ рассматриваются их приближения $f_i^\varepsilon(x)$, удовлетворяющие неравенству (4) с $\Psi_i(x) \equiv 1$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Надо заметить, что в литературе по методам решения некорректных задач распространен (см. [7]) и другой способ задания функций $\Psi_i(x)$:

$$\Psi_i(x) \equiv 1 + \Omega(x), \quad i = 0, 1, \ldots, m; \quad \Omega(x) \text{ — стабилизатор задачи (1).} \tag{42}$$

Остановимся на вопросе об изменениях результатов разделов 2 и 3, когда функции $f_i^\varepsilon(x)$ будут описываться условиями (4), (42). Конкретности ради выберем метод (7) и докажем аналог теоремы 1. Удостоверимся, что соответствующие утверждения о сходимости метода квазирешений останутся справедливыми (изменятся разве что оценки качества этой сходимости).

Теорема 7. *Пусть для задачи* (1) *выполнено условие* (12), *функции* $f_i^\varepsilon(x)$ *в методе* (7) *удовлетворяют соотношениям* (4), (42). *Тогда для любого* $s = [r, \rho, d, \varepsilon]$ *при* $r > \alpha_1$, $\rho > \alpha_2 + \varepsilon\,(1 + rm)$, $d > 0$, $\varepsilon \geq 0$ *существует точка* $\tilde{x}_s = \arg\min\limits_x F_s(x)$ *такая, что*

$$\Omega(\tilde{x}_s) \leq d + \frac{\tilde{\alpha}_2 d}{\rho - \tilde{\alpha}_2} + \frac{B(s, \sigma)}{\rho - \tilde{\alpha}_2}, \tag{43}$$

$$\varphi_1(\tilde{x}_s) \leq \frac{\rho}{(r - \alpha_1)(\rho - \tilde{\alpha}_2)}\,(\tilde{\alpha}_2 d + B(s, \sigma)), \tag{44}$$

$$f_0(\tilde{x}_s) \leq \bar{f}_d + \varepsilon\,(1 + rm)(1 + d), \tag{45}$$

где $\bar{f}_d$ *— оптимальное значение задачи* (11), α_1, α_2, σ *— из* (12), $\tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 + \varepsilon\,(1 + rm)$, $B(s, \sigma) = \bar{f}_d - \sigma + \varepsilon\,(1 + rm)(2 + d)$.

Любая предельная точка $\tilde{x}$ *последовательности* $\{\tilde{x}_s\}$ *при* $r \to \infty$, $\rho \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon r \to 0$ *будет решением задачи* (11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом (4), (42) имеем

$$\varphi_1(x) = \sum_{i=1}^m f_i^+(x) \leq \varphi_1^\varepsilon(x) + \varepsilon\, m\,(1 + \Omega(x)) \quad (\forall x).$$

Поэтому

$$|F_s(x) - F_d^0(x, R)| \leq |f_0^\varepsilon(x) - f_0(x)| + r\,|\varphi_1^\varepsilon(x) - \varphi_1(x)| \leq A_s(x), \tag{46}$$

где $F_d^0(x, R) = f_0(x) + r\varphi_1(x) + \rho\,(\Omega(x) - d)^+$, $A_s(x) = \varepsilon\,(1 + \Omega(x))(1 + rm)$.

Обозначим $M(C) = \{x\colon F_s(x) \leq C\}$, $C = \text{const}$, $C \geq \sigma$. Пусть $M(C) \neq \varnothing$ и $x' \in M(C)$. Тогда с учетом (12) и (46) получим

$$C \geq F_s(x') \geq F_d^0(x', R) - A_s(x')$$
$$= f_0(x') + \alpha_1\varphi_1(x') + (r - \alpha_1)\varphi_1(x') + \alpha_2\Omega(x') + \rho\,(\Omega(x') - d)^+ - \alpha_2\Omega(x') - A_s(x')$$
$$\geq \sigma + (\rho - \alpha_2)\Omega(x') - \rho\, d - A_s(x').$$

Отсюда

$$(\rho - \alpha_2)\Omega(x') \leq C - \sigma + \rho\, d + A_s(x') = \rho\, d + C - \sigma + \varepsilon\,(1 + rm) + \varepsilon\,(1 + rm)\Omega(x').$$

Поэтому $(\rho - \alpha_2 - \varepsilon\,(1 + rm))\Omega(x') \leq \rho\, d + C - \sigma + \varepsilon\,(1 + rm)$, т.е.

$$\Omega(x') \leq \frac{1}{\rho - \tilde{\alpha}_2}\,(\rho\, d + C - \sigma + \varepsilon\,(1 + rm)) \quad (\forall x' \in M(C)).$$

По определению стабилизатора $\Omega(x)$ множество $M(C)$ ограничено, но $\inf\limits_x F_s(x) = \min\{F_s(x)\colon x \in M(C)\}$. Следовательно, задача (7) имеет некоторое решение $\tilde{x}_s$.

Пусть $\bar{x}_d$ — решение задачи (11). В силу (46) справедливо

$$F_d^0(\tilde{x}_s, R) - A_s(\tilde{x}_s) \le F_s(\tilde{x}_s) \le F_s(\bar{x}_d) \le F_d^0(\bar{x}_d, R) + A_s(\bar{x}_d),$$

поэтому

$$F_d^0(\tilde{x}_s, R) \le F_d^0(\bar{x}_d, R) + A_s(\tilde{x}_s) + A_s(\bar{x}_d).$$

Вспоминая вид функции $A_s(x)$, получаем

$$f_0(\tilde{x}_s) + \alpha_1\varphi_1(\tilde{x}_s) + \alpha_2\Omega(\tilde{x}_s) + (r-\alpha_1)\varphi_1(\tilde{x}_s) + \rho(\Omega(\tilde{x}_s) - d)^+ - \alpha_2\Omega(\tilde{x}_s)$$
$$\le \bar{f}_d + \varepsilon\,(1+rm)(1+\Omega(\tilde{x}_s) + 1 + \Omega(\bar{x}_d)) \le \bar{f}_d + \varepsilon\,(1+rm)(2+d+\Omega(\tilde{x}_s)).$$

Из этого неравенства следует

$$(r-\alpha_1)\varphi_1(\tilde{x}_s) + \rho\,(\Omega(\tilde{x}_s) - d)^+ - \tilde{\alpha}_2\Omega(\tilde{x}_s) \le \bar{f}_d + \varepsilon\,(1+rm)(2+d) - \sigma,$$

где $\tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 + \varepsilon\,(1+rm)$. Отсюда заключаем

1′. $\rho\,(\Omega(\tilde{x}_s) - d)^+ - \tilde{\alpha}_2\Omega(\tilde{x}_s) \le B(s,\sigma)$;

2′. $(r-\alpha_1)\varphi_1(\tilde{x}_s) \le \tilde{\alpha}_2\Omega(\tilde{x}_s) + B(s,\sigma)$.

Здесь $B(s,\sigma) = \bar{f}_d - \sigma + \varepsilon\,(1+mr)(2+d)$.

Неравенство 1′ можно переписать следующим образом:

$$(\rho - \tilde{\alpha}_2)(\Omega(\tilde{x}_s) - d) \le \tilde{\alpha}_2 d + B(s,\sigma),$$

что равносильно оценке (43). Используя эту оценку, из 2′ имеем

$$\varphi_1(\tilde{x}_s) \le \frac{1}{r-\alpha_1}\,(\tilde{\alpha}_2\Omega(\tilde{x}_s) + B(s,\sigma)) = \frac{1}{r-\alpha_1}\Big[\frac{\tilde{\alpha}_2(\rho\,d + B(s,\sigma))}{\rho - \tilde{\alpha}_2} + B(s,\sigma)\Big]$$
$$= \frac{1}{r-\alpha_1}\Big[\frac{\rho\tilde{\alpha}_2 d}{\rho-\tilde{\alpha}_2} + B(s,\sigma)\Big(\frac{\tilde{\alpha}_2}{\rho-\tilde{\alpha}_2} + 1\Big)\Big] = \frac{\rho}{(r-\alpha_1)\,(\rho-\tilde{\alpha}_2)}\,(\tilde{\alpha}_2 d + B(s,\sigma)),$$

т. е. справедлива оценка (44).

Оценка (45) вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$f_0(\tilde{x}_s) \le F_s(\tilde{x}_s) \le F_s(\bar{x}_d) \le F_d^0(\bar{x}_d, R) + A_s(\bar{x}_d) = \bar{f}_d + \varepsilon\,(1+\Omega(\bar{x}_d))(1+rm) \le \bar{f}_d + \varepsilon\,(1+d)(1+rm).$$

Пусть $d = \mathrm{const}$, $r \to \infty$, $\rho \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon r \to 0$. Из оценки (43) следует ограниченность последовательности $\{x_s\}$. Если $\tilde{x}$ — предельная точка $\{x_s\}$, то из (43)–(45) вытекает $\varphi_1(\tilde{x}) = 0$, $\Omega(\tilde{x}) \le d$, $f_0(\tilde{x}) \le \bar{f}_d$, т. е. $\tilde{x}$ — решение задачи (11).

Теорема доказана.

5. О методе квазирешений для коррекции НЗ ВП 2-го рода

Рассмотрим кратко случай, когда $\inf\limits_{x\in X} f_0(x) = -\infty$, т. е. задача (1) — НЗ ВП 2-го рода. Пусть $x_k \in X$ — последовательность точек таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} f_0(x_k) = -\infty$. Тогда для сколь угодно большого натурального числа N найдется элемент $x_{\bar{k}}$ этой последовательности, для которого $f_0(x_{\bar{k}}) < -N$. Положим $d_{\bar{k}} = \Omega(x_{\bar{k}})$ и рассмотрим задачу (11) с $d = d_{\bar{k}}$. По определению функции $\Omega(x)$ $\lim\limits_{\bar{k}\to\infty} d_{\bar{k}} = \lim\limits_{\bar{k}\to\infty} \Omega(x_{\bar{k}}) = +\infty$. Для оптимального значения $\bar{f}_{d_{\bar{k}}}$ задачи (11) будут выполняться неравенства $\bar{f}_{d_{\bar{k}}} \le f_0(x_{\bar{k}}) < -N$. Учитывая существование предела $\tilde{f} = \lim\limits_{d\to\infty} \bar{f}_d$, заключаем, что $\tilde{f} = -\infty$.

Пусть исходная задача (1) удовлетворяет в некоторой точке условию Слейтера. Можно считать, что это условие справедливо и для (11) при $d = d_{\bar{k}}$. Тогда функция Лагранжа для задачи (11)

$$L_{d_{\bar{k}}}(x;\lambda,\mu) = f_0(x) + (\lambda, f(x)) + \mu\,(\Omega(x) - d_{\bar{k}})$$

будет иметь в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^1_+$ седловую точку $[\bar{x}_{\bar{k}}; \bar{\lambda}_{\bar{k}}, \bar{\mu}_{\bar{k}}]$.

Если сформулировать в новых условиях аналог теоремы 2, то параметр s в задаче (7) надо считать зависимым от $\bar{k}$: $s = s_{\bar{k}}$. Для сходимости метода должно выполняться $r = r_{\bar{k}} > \|\bar{\lambda}_{\bar{k}}\|_\infty$, $\rho = \rho_{\bar{k}} > \bar{\mu}_{\bar{k}}$, $d = d_{\bar{k}}$, $\varepsilon = \varepsilon_{\bar{k}}$. Анализируя доказательство теоремы 2, видим, что оценки (22) при этом примут вид

$$\varphi_1(\tilde{x}_s) \le \frac{2\,(1 + mr_{\bar{k}})\,\varepsilon_{\bar{k}}}{r_{\bar{k}} - \|\bar{\lambda}_{\bar{k}}\|_\infty}, \quad (\Omega(\tilde{x}_s) - d_{\bar{k}})^+ \le \frac{2\,(1 + mr_{\bar{k}})\,\varepsilon_{\bar{k}}}{\rho_{\bar{k}} - \bar{\mu}_{\bar{k}}},$$

$$|f_0(\tilde{x}_s) - \bar{f}_{d_{\bar{k}}})| \le 2\,\varepsilon_{\bar{k}}(1 + mr_{\bar{k}}) \max\Big\{1,\ \frac{\|\bar{\lambda}_{\bar{k}}\|_\infty}{r_{\bar{k}} - \|\bar{\lambda}_{\bar{k}}\|_\infty} + \frac{\bar{\mu}_{\bar{k}}}{\rho_{\bar{k}} - \bar{\mu}_{\bar{k}}}\Big\},$$

где $\tilde{x}_s = \tilde{x}_{s_{\bar{k}}}$, $s_{\bar{k}} = [r_{\bar{k}}, \rho_{\bar{k}}, d_{\bar{k}}, \varepsilon_{\bar{k}}]$. Если $\varepsilon = \varepsilon_{\bar{k}} = 0$, то $\varphi_1(\tilde{x}_s) = 0$, $\Omega(\tilde{x}_s) = d_{\bar{k}}$, $f_0(\tilde{x}_s) = \bar{f}_{d_{\bar{k}}}$.

Пусть теперь $r \to \infty$, $\rho \to \infty$, $d \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon r \to 0$. В силу неравенства

$$F^*_d(\varepsilon) \equiv F_s(x_s) \le \bar{f}_d + 2\,\varepsilon\,(1 + mr)$$

получим $\lim F^*_d(\varepsilon) = \lim \bar{f}_d = \inf\limits_{x \in X} f_0(x) = -\infty$.

Таким образом, метод квазирешений для ВП (1), состоящий в поиске минимума функции $F_s(x)$, представляет собой один из возможных способов оптимальной коррекции НЗ ВП (1) и в случае ее несобственности 2-го рода, при этом точка $\tilde{x}_{s_{\bar{k}}}$ играет роль обобщенного решения для задачи (1). Аналогичные выводы можно сделать и относительно задачи (8) — поиска $\min\limits_x \Phi_s(x)$.

Заключение

В работе автор продолжает исследования возможности применения стандартных методов регуляризации некорректных экстремальных задач с целью построения методов аппроксимации задач выпуклого программирования с особенностями (прежде всего, несобственных). Ранее для этого рассматривались подходы к коррекции несобственных задач на основе метода стабилизирующих функций Тихонова (см. [14]) и метода невязки (см. [10]). В этой статье используется идеология метода квазирешений. Обычно в литературе, посвященной проблематике несобственности в ВП, основное внимание уделялось несобственным задачам 1-го рода. Эти задачи наиболее распространены в практике экономико-математического моделирования и характеризуются несовместностью системы ограничений, что связано с дефицитом ресурсов, завышенными требованиями к качеству решений, многокритериальностью постановки и т. п. В данной работе предполагается, что несовместность ограничений тоже может возникнуть в силу приближенного задания исходной информации, но все же начальная постановка предполагает, как правило, непустоту допустимой области модели. В этом случае особый характер задачи проявляется в ее неразрешимости, возникающей, например, из-за неограниченности целевой функции на допустимом множестве. Последнее свойство характеризует НЗ ВП 2-го рода (см. [1]). Для таких задач метод квазирешений является естественным способом построения аппроксимирующих моделей, который эффективен в вопросах существования решений и их сходимости. Применяемый подход тесно связан с теорией метода штрафных функций в ВП и отражает характерные свойства точных и квадратичных штрафных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И. И., Мазуров Вл. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. **Попов Л. Д.** Применение барьерных функций для оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 3–11.
3. **Волков В. В., Ерохин В. И., Красников А. С., Разумов А. В., Хвостов М. Н.** Минимальная по евклидовой норме матричная коррекция пары двойственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2017. Т. 57, № 11. С. 1788–1803.
4. **Муравьева О. В.** Определение радиусов совместности и несовместности систем линейных уравнений и неравенств по матричной норме // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 6. С. 873–882.
5. **Васильев Ф. П., Потапов М. М., Артемьева Л. А.** Экстраградиентный метод коррекции противоречивых задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 12. С. 1992–1998.
6. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
7. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации: Кн. 1, 2. Изд-во МЦНМО, 2011. 1056 с.
8. **Dax A.** The smallest correction of an inconsistent system of linear inequalities // Optimization and Engineering. 2001. Vol. 2. P. 349–359.
9. **Renaut R. A., Guo N.** Efficient algorithms for solution of regularized total least squares // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2005. Vol. 26, no. 2. P. 457–476.
10. **Skarin V. D.** On parameter control of the residual method for the correction of improper problems // Discrete Optimization and Operations Research — 9th International Conf. (DOOR 2016): Proc. / eds. Y. Kochetov, M. Khachay, V. Beresnev, E. Nurminski, P. Pardalos. P. 441–451. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 9869). doi: 10.1007/978-3-319-44914-2_35.
11. **Еремин И. И., Астафьев Н. Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 196 с.
12. **Burke J.** An exact penalization viewpoint of constrained optimization // SIAM J. Contr. Optim. 1991. Vol. 29, no. 4. P. 968–998.
13. **Евтушенко Ю. Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
14. **Скарин В. Д.** О некоторых универсальных методах коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Автоматика и телемеханика. 2012. № 2. С. 99–110.

Поступила 12.05.2021
После доработки 10.06.2021
Принята к публикации 21.06.2021

Скарин Владимир Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: skavd@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Eremin I.I., Mazurov V.D., Astaf'ev N.N. *Nesobstvennye zadachi lineinogo i vypuklogo programmirovaniya* [Improper problems of linear and convex programming]. Moscow: Nauka Publ., 1983, 336 p.
2. Popov L.D. Use of barrier functions for optimal correction of improper problems of linear programming of the 1st kind. *Autom. Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 3, pp. 417–424. doi: 10.1134/S0005117912030010.
3. Volkov V.V., Erokhin V.I., Krasnikov A.S., Razumov A.V., Khvostov M.N. Minimum-Euclidean-norm matrix correction for a pair of dual linear programming problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2017, vol. 57, no. 11, pp. 1757–1770. doi: 10.1134/S0965542517110148.
4. Murav'eva O.V. Determination of consistency and inconsistency radii for systems of linear equations and inequalities using the matrix l_1 norm. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 6, pp. 840–849. doi: 10.1134/S0965542518060106.

5. Vasil'ev F.P., Potapov M.M., Artem'eva L.A. Extragradient method for correction of inconsistent linear programming problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 12, pp. 1919–1925. doi: 10.1134/S0965542518120163 .
6. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for the solution of ill-posed problems]. Moscow: Nauka Publ., 1979, 288 p.
7. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: MTsNMO Publ., 2011. Vol. 1: 620 p., ISBN: 978-5-94057-707-2 ; Vol. 2: 433 p., ISBN: 978-5-94057-708-9 .
8. Dax A. The smallest correction of an inconsistent system of linear inequalities. *Optimization and Engineering*, 2001, vol. 2, no. 3, pp. 349–359. doi: 10.1023/A:1015370617219 .
9. Renaut R.A., Guo N. Efficient algorithms for solution of regularized total least squares. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2005, vol. 26, no. 2, pp. 457–476. doi: 10.1137/S0895479802419889 .
10. Skarin V.D. On the parameter control of the residual method for the correction of improper problems of convex programming. In: *Discrete Optimization and Operations Research* (DOOR 2016), Y. Kochetov, M. Khachay, V. Beresnev, E. Nurminski, P. Pardalo (eds.), Ser. Lecture Notes in Computer Science, vol. 9869, 2016, pp. 441–451. doi: 10.1007/978-3-319-44914-2_35 .
11. Eremin I.I., Astaf'ev N.N. *Vvedenie v teoriyu lineinogo i vypuklogo programmirovaniya* [Introduction to the theory of linear and convex programming]. Moscow: Nauka Publ., 1976, 192 p.
12. Burke J. An exact penalization viewpoint of constrained optimization. *SIAM J. Contr. Optim.,* 1991, vol. 29, no. 4, pp. 968–998. doi: 10.1137/0329054 .
13. Evtushenko Yu.G. *Numerical optimization techniques.* NY: Springer-Verlag, 1985, 562 p. ISBN: 978-1-4612-9530-3 . Original Russian text published in Evtushenko Yu.G. *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach i ikh primenenie v sistemakh optimizatsii*, Moscow: Nauka Publ., 1982, 432 p.
14. Skarin V.D. On some universal methods of correction of the improper convex programming problems. *Autom. Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 2, pp. 300–309. doi: 10.1134/S0005117912020087 .

Received May 12, 2021
Revised June 10, 2021
Accepted June 21, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-07-01243).

Vladimir Dmitrievich Skarin, Dr. Phys.-Math. Sci, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: skavd@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. D. Skarin. The quasisolution method in the analysis of convex programs with singularities, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 125–141 .