ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 3 2021

УДК 517.955+517.968.4+517.986.7

ДРОБНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАККИНА — ВЛАСОВА И ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ — БЕЛЛМАНА — АЙЗЕКСА[1]

В. Н. Колокольцов, М. С. Троева

Исследуется класс абстрактных нелинейных дробных псевдодифференциальных уравнений в банаховых пространствах, который включает в себя как уравнения типа Маккина — Власова, описывающие нелинейные марковские процессы, так и уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса стохастического управления и игр. Такой подход позволяет развить единый анализ этих уравнений. Показана корректность рассматриваемых уравнений в классе классических решений и доказана их непрерывная зависимость от исходных данных. Полученные результаты распространяются на случай обобщенных дробных уравнений.

Ключевые слова: дробные уравнения типа Маккина — Власова, дробные уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса, мягкие решения, классические решения, дробная производная Капуто — Джрбашяна, обобщенные дробные производные.

V. N. Kolokoltsov, M. S. Troeva. Fractional McKean–Vlasov and HJB–Isaacs equations.

We study a class of abstract nonlinear fractional pseudo-differential equations in Banach spaces that includes both the McKean–Vlasov type equations describing nonlinear Markov processes and the Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equations of stochastic control and games. This approach allows us to develop a unified analysis of these equations. We obtain the well-posedness results for these equations in the sense of classical solutions, and their continuous dependence on the initial data is proved. The obtained results are extended to the case of generalized fractional equations.

Keywords: fractional McKean–Vlasov type equations, fractional HJB-Isaacs equations, mild solutions, classical solutions, Caputo–Djrbashian fractional derivative, generalized fractional derivatives.

MSC: 34A08, 35S15, 45G15

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-87-100

1. Введение

Исследуется класс абстрактных нелинейных дробных псевдодифференциальных уравнений в банаховых пространствах, который включает в себя как уравнения типа Маккина — Власова, описывающие нелинейные марковские процессы, так и уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса стохастического управления и игр. Такой подход позволяет развить единый анализ этих уравнений. В статье показана корректность этих уравнений в классе классических решений. Полученные результаты распространяются на случай обобщенных дробных уравнений.

Дробные уравнения с частными производными относятся к активно развивающимся разделам современной теории дифференциальных уравнений. Они находят широкое применение в разных областях естественных наук и являются предметом активных исследований (см., например, [1; 11; 23–26; 32] и ссылки в них). В частности, дробные дифференциальные уравнения используются при моделировании процессов с памятью (см., например, [2; 29; 30]). Обобщенные дробные уравнения рассматривались в работах [9; 10; 14].

[1]Работа В. Н. Колокольцова (разд. 1, 4 и 5) выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект No. 20-11-20119), работа М. С. Троевой (разд. 2, 3 и 6) выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (НИР № FSRG-2020-0006).

Имеется обширная литература по изучению обобщенных решений уравнений Маккина—Власова (см., например, [5;6;13;22;31] и ссылки в них). В частности, в работе [31] установлены условия существования и единственности инвариантных мер и слабой сходимости к этим мерам для стохастических уравнений Маккина—Власова. Корректность стохастических уравнений Маккина—Власова в классе L_2-функций была показана в [22] и для мер — в [6] при дополнительном предположении монотонности.

Проблема существования обобщенных решений уравнений Гамильтона—Якоби имеет большое значение с точки зрения теории оптимального управления и теории дифференциальных игр. В публикациях [4; 21; 27] были развиты вязкостные и минимаксные решения для уравнений Гамильтона—Якоби. Негладкие и разрывные решения уравнений Гамильтона—Якоби—Беллмана, возникающие в многочисленных прикладных задачах, изучены в монографии [28]. В ней исследуется связь непрерывного минимаксного/вязкостного решения уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана с задачами оптимального управления и с разрывными обобщенными решениями квазилинейного уравнения первого порядка. С помощью метода характеристик описана структура обобщенных решений и предложены численные методы их построения. Уравнения Гамильтона—Якоби в гильбертовом пространстве были рассмотрены в [3]. Теория дробных уравнений Гамильтона—Якоби—Беллмана была первоначально разработана в [20] и далее развита в [15].

Настоящая статья является продолжением исследований, начатых авторами в работах [16–18].

В [18] была показана корректность в классе мягких решений следующей нелинейной задачи Коши

$$\dot{b}(t) = Ab(t) + H(t, b(t), Db(t)), \quad b(a) = Y, \quad t \geq a, \tag{1.1}$$

и ее дробного аналога

$$D^{\beta}_{a+*}b(t) = Ab(t) + H(t, b(t), Db(t)), \quad b(a) = Y, \quad t \geq a. \tag{1.2}$$

Здесь A, $D_1, \cdots, D_n$ — неограниченные линейные операторы в банаховом пространстве B, $D = (D_1, \cdots, D_n)$ и H — непрерывное отображение $\mathbb{R} \times B \times B^n \to B$, D^{β}_{a+*} — дробная производная Капуто — Джрбашяна (КД) порядка $\beta \in (0, 1)$:

$$D^{\beta}_{a+*}b(t) = \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int\limits_0^{t-a} \frac{b(t-z) - b(t)}{z^{1+\beta}} dz + \frac{b(t) - b(a)}{\Gamma(1-\beta)(t-a)^{\beta}}.$$

Мягкие решения дробных нелинейных уравнений основаны на интегральном представлении Золотарева для функций Миттаг-Леффлера.

В данной работе показывается корректность в классе классических решений задач (1.1) и (1.2), а также полученные результаты распространяются на случай обобщенных дробных уравнений:

$$D^{(\nu)}_{a+*}b(t) = Ab(t) + H(t, b(t), Db(t)), \quad b(a) = Y, \quad t \geq a, \tag{1.3}$$

где $D^{(\nu)}_{a+*}$ — обобщенная дробная производная, зависящая от меры ν на $(0, \infty)$:

$$D^{(\nu)}_{a+*}b(t) = -\int\limits_0^{t-a} (b(t-z) - b(t))\nu(dz) - (b(t) - b(a)) \int\limits_{t-a}^{\infty} \nu(dz).$$

Здесь ν — положительная мера на $\{y : y > 0\}$, удовлетворяющая условию Леви

$$\int\limits_0^{\infty} \min(y, 1)\nu(dy) < \infty. \tag{1.4}$$

Это общее выражение включает в себя различные частные случаи, в том числе дробные производные медленного роста и смешанные дробные производные, например операторы

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \frac{d^{\beta_j} f}{dx^{\beta_j}}, \quad \int_0^1 \frac{d^\beta f}{dx^\beta} \mu(d\beta),$$

где a_j — положительные константы, μ — конечная мера.

В качестве одного из наиболее изученных примеров упомянем так называемые умеренные дробные производные, задаваемые мерой $\nu(dy) = Ce^{-\lambda y} y^{-1-\beta}$ с константами $C, \lambda > 0$.

Можно по-разному взвесить точки в прошлом или будущем в зависимости от текущего положения, что приведет к более общим операторам

$$D_+^{(\nu)} = -L_\nu^l, \quad L_\nu^l f(x) = \int_0^\infty (f(x-y) - f(x))\nu(x, dy)$$

с переходным ядром $\nu(x, .)$ таким, что $\max_x \int \min(1, y)\nu(x, dy) < \infty$, — операторам, которые полностью отражают идею “взвешивания прошлого” и которые можно назвать *односторонними*, а именно *левосторонними* или *причинными операторами порядка не более одного*.

А также можно упомянуть дробные операторы Адамара — Килбаса и Эрдейи — Кобера — Киряковой — Лучко (см., например, [8; 9]).

Наши основные примеры касаются случая, когда B — пространство функций на $\mathbb{R}^d$ и D — оператор градиента. В частности, дробное уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса (HJB-Isaacs) управляемых марковских процессов (с внешним параметром) есть уравнение вида

$$D_{a+*}^\beta f(t, x) = Af(t, x) + H\Big(t, x, f(t, x), \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\Big), \tag{1.5}$$

для которого наиболее естественным банаховым пространством является $B = C_\infty(\mathbb{R}^d)$ — банахово пространство непрерывных функций $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, стремящихся к нулю на бесконечности, снабженное sup-нормой. Гамильтониан H, возникающий из оптимального управления, обычно даже не зависит явно от f, а зависит только от ее градиента; он записывается в виде

$$H(t, x, f, p) = H(t, x, p) = \sup_{u \in U} [J(t, x, u) + g(t, x, u)p]$$

с некоторыми функциями J, g, где U — компактное множество управлений (или с inf sup вместо простого sup в случае уравнений Айзекса). Для таких H дробное уравнение (1.5) получено в [19] как уравнение Беллмана для оптимального управления масштабируемыми пределами случайных блужданий в непрерывном времени.

Дробной версией уравнений типа Маккина — Власова (описывающих нелинейные марковские процессы в смысле [13]) являются квазилинейные уравнения типа

$$D_{a+*}^\beta f(t, x) = A^* f(t, x) + \sum_{j=1}^{d} h_j(t, x, \{f(t, .)\}) \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x), \tag{1.6}$$

для которых наиболее естественным банаховым пространством является $L_1(\mathbb{R}^d)$ (или пространство борелевских мер на $\mathbb{R}^d$). В этих уравнениях A — генератор феллеровского процесса в $\mathbb{R}^d$ и A^* — его дуальный оператор. В то время как H в (1.5) зависит от точечных значений f, функции h_j в (1.6) обычно зависят от некоторых интегралов от f. Абстрактная структура уравнений (1.2) позволяет рассматривать эти случаи единообразно.

Содержание статьи таково. В разд. 2 мы напоминаем предварительные материалы из теории функций Миттаг-Леффлера и принципов неподвижной точки. В разд. 3 приведены результаты о корректности уравнений (1.1) и (1.2) в смысле мягких решений из работы [18].

В разд. 4 и 5 представлены наши основные результаты, а именно корректность уравнений (1.1) и (1.2) в классе классических решений. А в разд. 6 мы формулируем аналогичные результаты для обобщенных дробных уравнений (1.3).

Так же как и в случае мягких решений в работе [18], результаты данной статьи могут быть использованы для построения классических решений дробных систем прямых и обратных уравнений, включая уравнения на многообразиях.

2. Вспомогательные сведения

Через $E_\beta(x)$ мы обозначим стандартную функцию Миттаг-Леффлера индекса β:

$$E_\beta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\beta k + 1)}.$$

Наиболее удобной для наших целей формулой для функции Миттаг-Леффлера является ее интегральное представление (формула Золотарева, или формула Золотарева — Полларда)

$$E_\beta(s) = \frac{1}{\beta} \int\limits_0^\infty e^{sx} x^{-1-1/\beta} G_\beta(1, x^{-1/\beta})\, dx, \tag{2.1}$$

где $G_\beta(t,x) = \dfrac{1}{\pi} Re \displaystyle\int_0^\infty \exp\{ipx - tp^\beta e^{i\pi\beta/2}\}dp$ — ядро теплопроводности (решение с начальным условием Дирака) уравнения $\dfrac{\partial G}{\partial t}(t,x) = -\dfrac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} G(t,x)$, или, в вероятностной терминологии, плотность вероятности перехода устойчивого субординатора Леви индекса β. Удобство этой формулы связано с тем, что она позволяет вычислить $E_\beta(A)$ для оператора A всякий раз, когда A порождает полугруппу, так что e^{At} корректно определена.

Из (2.1) следует

$$E'_\beta(s) = \frac{1}{\beta} \int\limits_0^\infty e^{sx} x^{-1/\beta} G_\beta(1, x^{-1/\beta})\, dx, \tag{2.2}$$

поэтому интеграл справа является конечным.

Нам также понадобится хорошо известная формула преобразования Меллина функции G_β

$$\int\limits_0^\infty x^{-\omega} G_\beta(1, x^{-1/\beta})\, dx = \frac{\Gamma(1 - \omega + 1/\beta)}{\Gamma(\beta - \beta\omega + 1)}, \tag{2.3}$$

справедливая для $\omega < 1 + 1/\beta$ (см. доказательство, например, в [15, утверждение 8.1.1]).

Для некоторых оценок полезно выражение E_β в терминах сумм итераций дробного интеграла Римана (который непосредственно вытекает из (2.1)): $E_\beta(\lambda(t-a)^\beta) = \Big(\sum\limits_{j=0}^{\infty} \lambda^j I_a^{j\beta}\Big) \mathbf{1}(t)$, где $\mathbf{1}(t)$ — функция, принимающая постоянное значение 1, а дробный интеграл определяется как

$$[I_a^\alpha f](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, \quad t > a.$$

Отсюда следует, что если отображение Φ, действующее из множества положительных непрерывных функций на $[a,\infty)$ в себя, удовлетворяет неравенству $[\Phi(f)](t) \le c + \lambda[I_a^\alpha(f)](t)$ с постоянными $c, \lambda \ge 0$, то итерации $f_n = \Phi(f_{n-1})$ с ограниченным $f_0 \ge 0$ равномерно ограничены:

$$f_n(t) \le cE_\alpha(\lambda(t-a)^\alpha) + \lambda^n \frac{(t-a)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} \sup_{s\in[a,t]} f_0(s). \tag{2.4}$$

Далее, для банахова пространства B и $\tau < t$ мы обозначим через $C([\tau,t],B)$ банахово пространство непрерывных функций $f : [\tau,t] \to B$ с нормой $\|f\|_{C([\tau,t],B)} = \sup_{s\in[\tau,t]} \|f(s)\|_B$ и $C_Y([\tau,t],B)$ — его замкнутое подмножество, состоящее из функций f таких, что $f(\tau) = Y$, которое является полным метрическим пространством при индуцированной топологии.

Пусть $C_Y([\tau,t],M)$ обозначает выпуклое подмножество $C_Y([\tau,t],B)$ функций со значениями в M, где M — замкнутое выпуклое подмножество из B.

Приведем следующую теорему — версию принципа неподвижной точки, специально разработанную для использования в нелинейных диффузионных и дробных уравнениях (см. теорему 2.1.3 из [15]).

Теорема 1. *Предположим, что для любого $Y \in M$, $\alpha \in B^{par}$, где B^{par} — другое банахово пространство, задано отображение $\Phi_{Y,\alpha} : C([\tau,T],M) \to C_Y([\tau,T],M)$ для некоторых $T > \tau$ такое, что*

$$\|[\Phi_{Y,\alpha}(\mu^1_{\cdot})](t) - [\Phi_{Y,\alpha}(\mu^2_{\cdot})](t)\| \le L(Y) \int_\tau^t (t-s)^{-\omega} \|\mu^1_{\cdot} - \mu^2_{\cdot}\|_{C([\tau,s],B)}\, ds,$$

$$\|[\Phi_{Y_1,\alpha_1}(\mu_{\cdot})](t) - [\Phi_{Y_2,\alpha_2}(\mu_{\cdot})](t)\| \le \varkappa\|Y_1 - Y_2\| + \varkappa_1\|\alpha_1 - \alpha_2\|$$

для всех $t \in [\tau,T]$, $\mu,\mu^1,\mu^2 \in C([\tau,T],M)$, $Y_1,Y_2 \in M$, $\alpha_1,\alpha_2 \in B^{par}$, для некоторых констант $\varkappa,\varkappa_1 \ge 0$, $\omega \in [0,1)$ и непрерывной функции L на M.

Тогда для любых $Y \in M$, $\alpha \in B^{par}$ отображение $\Phi_{Y,\alpha}$ имеет единственную неподвижную точку $\mu_{\cdot,\tau}(Y,\alpha)$ в $C_Y([\tau,T],M)$. Более того, если $\omega > 0$, то для всех $t \in [\tau,T]$

$$\|\mu_{t,\tau}(Y,\alpha) - Y\| \le E_{1-\omega}(L(Y)\Gamma(1-\omega)(t-\tau)^{1-\omega})\|[\Phi_{Y,\alpha}(Y)](t) - Y\|$$

и неподвижные точки $\mu_{\cdot,\tau}(Y_1,\alpha_1)$ и $\mu_{\cdot,\tau}(Y_2,\alpha_2)$ с различными начальными данными Y_1,Y_2 и параметрами α_1,α_2 удовлетворяют оценке (для любого $j = 1,2$)

$$\|\mu_{t,\tau}(Y_1,\alpha_1) - \mu_{t,\tau}(Y_2,\alpha_2)\| \le (\varkappa\|Y_1 - Y_2\| + \varkappa_1\|\alpha_1 - \alpha_2\|)E_{1-\omega}(L(Y_j)\Gamma(1-\omega)(t-\tau)^{1-\omega}).$$

Если $\omega = 0$, эти оценки упрощаются:

$$\|\mu_{t,\tau}(Y,\alpha) - Y\| \le e^{(t-\tau)L(Y)}\|[\Phi_{Y,\alpha}(Y)](t) - Y\|,$$

$$\|\mu_{t,\tau}(Y_1,\alpha_1) - \mu_{t,\tau}(Y_2,\alpha_2)\| \le (\varkappa\|Y_1 - Y_2\| + \varkappa_1\|\alpha_1 - \alpha_2\|)\exp\{(t-\tau)\min(L(Y_1),L(Y_2))\}.$$

3. Мягкие решения

В этом разделе приведем основные понятия и результаты о мягких решениях, полученные нами в работе [18].

Для двух банаховых пространств B,C обозначим через $\mathcal{L}(B,C)$ банахово пространство ограниченных линейных операторов $B \to C$ с обычной операторной нормой, обозначенной как $\|.\|_{B\to C}$.

Последовательности вложенных банаховых пространств $B_2 \subset B_1 \subset B$ с нормами, обозначенными как $\|.\|_2, \|.\|_1, \|.\|$ соответственно, будем называть *банаховой тройкой* (вложенных пространств) или *банаховой башней порядка* 3, если нормы упорядочены: $\|.\|_2 \ge \|.\|_1 \ge \|.\|$ и B_2 плотно в B_1 в топологии B_1, тогда как B_1 плотно в B в топологии B. Следующие условия будут играть ключевую роль в данной работе.

Условия (A):

(i) Пусть $B_2 \subset B_1 \subset B$ — банахова тройка с нормами, обозначаемыми как $\|.\|_2, \|.\|_1, \|.\|$ соответственно, и пусть

$$D_i \in \mathcal{L}(B_1,B) \cap \mathcal{L}(B_2,B_1), \quad i = 1,\cdots,n.$$

Без ограничения общности мы предполагаем, что нормы всех D_j ограничены 1 как в $\mathcal{L}(B_1, B)$, так и в $\mathcal{L}(B_2, B_1)$ (что обычно имеет место в приложениях ниже).

(ii) Пусть $A \in \mathcal{L}(B_2, B)$ и A порождают сильно непрерывную полугруппу e^{At} и в B, и в B_1, так что

$$\|e^{At}\|_{B \to B} \leq M e^{mt}, \quad \|e^{At}\|_{B_1 \to B_1} \leq M_1 e^{tm_1} \tag{3.1}$$

с некоторыми неотрицательными константами M, m, M_1, m_1, и B_2 является инвариантной существенной областью определения оператора A для этой полугруппы в B.

(iii) Пусть $H : \mathbb{R} \times B \times B^n \to B$ — непрерывное отображение, липшицево в том смысле, что

$$\|H(t, b_0, b_1, \cdots, b_n) - H(t, \tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_n)\| \leq L_H \sum_{j=0}^{n} \|b_j - \tilde{b}_j\| \Big(1 + L'_H \sum_{j=1}^{n} \|b_j\|\Big), \tag{3.2}$$

и имеет линейный рост

$$\|H(t, b_0, b_1, \cdots, b_n)\| \leq L_H \Big(1 + \sum_{j=1}^{n} \|b_j\|\Big) \tag{3.3}$$

с некоторыми константами L_H, L'_H.

З а м е ч а н и е 1. Для классических уравнений Гамильтона — Якоби — Беллмана оценка (3.2) выполняется с $L'_H = 0$, и в этом случае (3.3) следует из (3.2). Однако для уравнений типа Маккина — Власова линейного роста постоянной Липшица в (3.2) нельзя избежать.

Важным предположением в нашем анализе является следующее свойство сглаживания полугруппы e^{At}: при $t > 0$ она переводит B в B_1 и

$$\|e^{At}\|_{B \to B_1} \leq \varkappa t^{-\omega}, \quad t \in (0, 1], \tag{3.4}$$

с некоторыми константами $\varkappa > 0$ и $\omega \in (0, 1)$. Иногда используется аналогичное условие для пары B_1, B_2:

$$\|e^{At}\|_{B_1 \to B_2} \leq \varkappa_1 t^{-\omega}, \quad t \in (0, 1]. \tag{3.5}$$

З а м е ч а н и е 2. Для псевдодифференциальных операторов A (включая генераторы феллеровских полугрупп) свойство более глубокого сглаживания (3.5) может быть получено из (3.4) и дифференцируемости символа $A(x, p)$ оператора A по первому аргументу (см. теорему 5.15.1 из [15]).

Так называемая мягкая форма задачи Коши (1.1) представляет собой интегральное уравнение

$$b(t) = e^{A(t-a)} Y + \int_a^t e^{A(t-s)} H(s, b(s), Db(s))\, ds, \quad t \geq a. \tag{3.6}$$

Хорошо известно (см., например, [15]) и легко увидеть, что если функция $b(t)$ является решением уравнения (1.1), то она также решает уравнение (3.6), поэтому единственность решения уравнения (1.1) следует из единственности для уравнения (3.6).

Справедлива следующая теорема о корректности уравнения (3.6) (см. [18, теорема 4.1]). Приведем формулировку теоремы 4.1 в случае уравнения (3.6), которое не зависит от параметра α. Доказательство аналогично.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (A) *и свойство гладкости* (3.4). *Тогда уравнение* (3.6) *корректно в* B_1, *т. е. для любого* $Y \in B_1$ *существует его единственное глобальное решение* $b(t) = b(t; Y) \in B_1$, *которое липшиц-непрерывно зависит от начальных данных* Y. *В частности,*

$$\sup_{t \in [a,T]} \|b(t; Y) - b(t; \tilde{Y})\|_1 \leq K \|Y - \tilde{Y}\|_1, \tag{3.7}$$

с постоянной K, *зависящей от* $(T - a)$ *и всех констант, входящих в условия теоремы.*

Для случая уравнения (1.2) его мягкая форма представляет собой интегральное уравнение

$$b(t) = E_\beta(A(t-a)^\beta)Y + \beta \int_a^t (t-s)^{\beta-1} E'_\beta(A(t-s)^\beta) H(s, b(s), Db(s))\, ds, \tag{3.8}$$

где $E_\beta(A)$ определяется формулой (2.1). Таким образом, более явно это уравнение записывается в виде

$$b(t) = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty e^{A(t-a)^\beta x} Y x^{-1-1/\beta} G_\beta(1, x^{-1/\beta})\, dx$$

$$+ \int_a^t (t-s)^{\beta-1} \int_0^\infty e^{A(t-s)^\beta x} x^{-1/\beta} G_\beta(1, x^{-1/\beta})\, dx H(s, b(s), Db(s))\, ds.$$

Справедлива следующая теорема (см. [18, теорема 4.2]). Приведем формулировку теоремы 4.2 для уравнения (3.8), которое на зависит от параметра α. Доказательство аналогично.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (A) *и свойство сглаживания* (3.4). *Тогда уравнение* (3.8) *корректно в* B_1, *т. е. для любого* $Y \in B_1$ *существует его единственное глобальное решение* $b(t) = b(t; Y) \in B_1$, *которое липшиц-непрерывно зависит от начальных данных* Y, *так что выполняется* (3.7).

4. Классические решения

Для получения классических решений рассматриваемых уравнений введем дополнительный набор условий.

Условия (B):

Функция H непрерывна как отображение $H : \mathbb{R} \times B_1 \times (B_1)^n \to B_1$ и липшицева в том смысле, что

$$\|H(t, b_0, b_1, \cdots, b_n) - H(t, \tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_n)\|_1 \le \tilde{L}_H \sum_{j=0}^n \|b_j - \tilde{b}_j\|_1 \Big(1 + \tilde{L}'_H \sum_{j=1}^n \|b_j\|_1\Big), \tag{4.1}$$

имеет линейный рост

$$\|H(t, b_0, b_1, \cdots, b_n)\|_1 \le \tilde{L}_H (1 + \sum_{j=1}^n \|b_j\|_1), \tag{4.2}$$

и e^{At} ограничена в B_2, так что

$$\|e^{At}\|_{B_2 \to B_2} \le M_2 e^{t m_2} \tag{4.3}$$

с некоторыми неотрицательными константами M_2, m_2.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и условия сглаживания* (3.4), (3.5). *Тогда уравнения* (1.1), (1.2) *корректны в пространстве* B_2, *т.е. для любого* $Y \in B_2$ *существуют единственные глобальные решения этих задач* $b(t) \in B_2$, *которые липшиц-непрерывно зависят от начальных данных* Y *в норме* B_2.

Доказательство. Покажем корректность мягкого уравнения (3.8) в B_2. Для мягкого уравнения (3.6) корректность устанавливается аналогично.

Для простоты обсудим только случай с $\tilde{L}'_H = 0$ в (4.1). (Общий случай разбирается так же, как и в случае мягких решений в работе [18].) Решения уравнения (3.8) — это неподвижные точки отображения

$$[\Phi_Y(b(.))](t) = E_\beta(A(t-a)^\beta)Y + \beta\int\limits_a^t (t-s)^{\beta-1}E'_\beta(A(t-s)^\beta)H(s,b(s),Db(s))\,ds, \tag{4.4}$$

действующего в $C_Y([a,T],B_2)$ для любого $T > a$. Мы имеем

$$\|[\Phi_{Y_1}(b(.))](t) - [\Phi_{Y_2}(b(.))](t)\|_2 \le M_2 E_\beta(m_2(t-a)^\beta)\|Y_1 - Y_2\|_2, \tag{4.5}$$

что следует из (4.3) и (2.1). Далее,

$$[\Phi_Y(b^1(.))](t) - [\Phi_Y(b^2(.))](t) = \int\limits_a^t (t-s)^{\beta-1}ds$$

$$\times \int\limits_0^\infty e^{A(t-s)^\beta x}x^{-1/\beta}G_\beta(1,x^{-1/\beta})dx[H(s,b^1(s),Db^1(s)) - H(s,b^2(s),Db^2(s))].$$

Разложив двойной интеграл на две части по множествам $(t-s)^\beta x \le 1$ и его дополнению, воспользуемся оценкой (3.5) в первом интеграле и оценкой (4.3) во втором интеграле, что дает

$$\|[\Phi_Y(b^1(.))](t) - [\Phi_Y(b^2(.))](t)\|_2$$

$$\le \varkappa_1\tilde{L}_H(n+1)\int\limits_a^t (t-s)^{\beta-1}(t-s)^{-\omega\beta}\int\limits_0^\infty x^{-\omega-1/\beta}G_\beta(1,x^{-1/\beta})\,dx\|b^1(s)-b^2(s)\|_2\,ds$$

$$+ \varkappa_1\tilde{L}_H M_2(n+1)\int\limits_a^t (t-s)^{\beta-1}\int\limits_0^\infty e^{m_2(t-s)^\beta x}x^{-1/\beta}G_\beta(1,x^{-1/\beta})\,dx\|b^1(s)-b^2(s)\|_2\,ds.$$

Используя (2.3) для оценки первого члена и (2.2) для оценки второго члена, получаем

$$\|[\Phi_Y(b^1(.))](t) - [\Phi_Y(b^2(.))](t)\|_2$$

$$\le \tilde{L}_H(n+1)(\varkappa_1 + M_2)C(m_2,\beta,T-a)\int\limits_a^t (t-s)^{-[1-\beta(1-\omega)]}\|b^1(s)-b^2(s)\|_2\,ds, \tag{4.6}$$

где C — постоянная, зависящая от $m_2, \beta, (T-a)$. В силу неравенств (4.5) и (4.6) из теоремы 1 следует существование решения интегрального уравнения (3.8) в классе функций из B_2. Хорошо известно и легко доказать (см. работу [15]), что если решение мягкого уравнения принадлежит пространству B_2, то оно является классическим решением уравнения (1.2). □

Аналогично работе [18] прокомментируем, как полученные результаты применяются к уравнениям Гамильтона — Якоби — Беллмана (1.5) и Маккина — Власова (1.6). Для этих случаев B — это пространство функций на $\mathbb{R}^d$, A — генератор феллеровского процесса $\mathbb{R}^d$, а D — оператор градиента (производная). В частности, для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана естественной банаховой тройкой является $C^2_\infty(\mathbb{R}^d) \subset C^1_\infty(\mathbb{R}^d) \subset C_\infty(\mathbb{R}^d)$, а для уравнений Маккина — Власова возможной тройкой является $W_2(\mathbb{R}^d) \subset W_1(\mathbb{R}^d) \subset L_1(\mathbb{R}^d)$. Здесь $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ — пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}^d$, стремящихся к нулю на бесконечности, $C^j_\infty(\mathbb{R}^d)$ — их подмножества функций, имеющих производные порядка до j в $C_\infty(\mathbb{R}^d)$, и

$W_j(\mathbb{R}^d)$ — пространство Соболева функций с частными производными (понимаемыми в смысле обобщенных функций) до порядка j в $L_1(\mathbb{R}^d)$, снабженных интегральными (соболевскими) нормами

$$\|f\|_{L_1(R^d)} = \int |f(x)|\,dx, \quad \|f\|_{W_1(R^d)} = \|f\|_{L_1(R^d)} + \sum_{j=1}^{d} \int \Big|\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big| dx,$$

$$\|f\|_{W_2(R^d)} = \|f\|_{W_1(R^d)} + \sum_{i\le j} \int \Big|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\Big| dx.$$

Доказательство сглаживающих свойств оператора A обычно основывается на свойствах функций Грина оператора A (переходных вероятностей процессов, порождаемых A). Например, известно, что (3.4) и (3.5) выполняются при $\omega = 1/2$ для невырожденных операторов диффузии A с достаточно гладкими коэффициентами. Когда $A = -|\Delta|^\alpha$ с $\alpha \in (1,2)$ или, в более общем смысле, $A = -a(x)|\Delta|^\alpha$ с гладкой положительной функцией a, ограниченной сверху и снизу, или, как в более общем смысле, когда A — псевдодифференциальный оператор, который порождает невырожденный процесс устойчивого типа с симметричной спектральной мерой, т. е.

$$A = \int\limits_{S^{d-1}} |(\nabla, s)|^\alpha \mu(s)\,ds$$

с положительной гладкой функцией μ на $(d-1)$-мерной сфере S^{d-1}, ограниченной сверху и снизу, полугруппа, порожденная A, удовлетворяет (3.4), (3.5) и (3.1) с $\omega = 1/\alpha$, как показано в [12] (см. также [15]). Подобные свойства сохраняются также для различных смесей диффузий и устойчивых процессов, возмущенных чисто скачкообразными процессами.

5. Классические решения при более слабых условиях

Условие (4.1) выглядит естественно в нашем абстрактном контексте. Однако, хотя это часто выполняется для квазилинейных уравнений типа Маккина — Власова, это условие обычно трудно проверить для уравнений Гамильтона — Якоби — Беллмана, поскольку функции Гамильтона оптимального управления часто липшицевы, но не гладкие. Для решения этой проблемы ослабим липшиц-непрерывность, введя следующие условия.

У с л о в и я (C):

Функция H непрерывна как отображение $H : \mathbb{R} \times B_1 \times B_1^n \to B_1$, имеет линейный рост в смысле (4.2), и выполняется (4.3).

Обозначим через B^R замкнутые шары радиуса R в банаховом пространстве B. Пусть $\bar{B}_1^R$ и $\bar{B}_2^R$ обозначают замыкание B_1^R в B и замыкание B_2^R в B_1 соответственно.

Теперь вместо условия сглаживания (3.5) нам понадобится чуть более общее свойство: полугруппа e^{At} отображает $\bar{B}_1^R$ в B_2 для всех R и справедливо неравенство

$$\|e^{At} f\|_{B_2} \le \varkappa_1 t^{-\omega} R \tag{5.1}$$

при $f \in \bar{B}_1^R$.

З а м е ч а н и е 3. В нашем основном примере с уравнением Гамильтона — Якоби — Беллмана тройка $B_2 \subset B_1 \subset B$ является тройкой $C^2_\infty(\mathbb{R}^d) \subset C^1_\infty(\mathbb{R}^d) \subset C_\infty(\mathbb{R}^d)$, $\bar{B}_1^R$ становится множеством всех липшицевых функций с константой Липшица, ограниченной R, а $\bar{B}_2^R$ — множеством гладких функций с липшиц-непрерывными производными с константой Липшица, ограниченной R. В этом случае немного запутанные условия в следующей теореме оказываются естественными. При этих $\bar{B}_1^R$ и $\bar{B}_2^R$ видно, что операторы D_j продолжаются до непрерывных отображений $\bar{B}_2^R \to \bar{B}_1^R$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (A), (C) *и условия сглаживания* (3.4), (5.1). *Более того, пусть D_j продолжаются до непрерывных отображений $\bar{B}_2^R \to \bar{B}_1^R$ для любого R и e^{At} продолжается до отображений $\bar{B}_1^R \to B_2$. Тогда уравнения* (1.1) *и* (1.2) *корректны в пространстве B_2, т. е. для любого $Y \in B_2$ существуют единственные глобальные решения этих задач.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем доказательство для уравнения (1.2); для второго рассматривается аналогично. По условиям теоремы если $Y \in B_2$, то Φ_Y из (4.4) переводит $C_Y([a,T],B_2)$ в себя для любого $T > a$. Следовательно, если $Y \in B_2$, и итерации начинаются с постоянной функции $b^0(t) = Y$, то все итерации $b^k = (\Phi_Y)^k(Y)$ принадлежат $C_Y([a,T],B_2)$. Более того, условие роста (4.2) позволяет заключить, что все итерации равномерно ограничены по k (для любого фиксированного T). Чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$\|[\Phi_Y(b(.))](t)\|_2 \le M_2 e^{m_2(T-a)}\|Y\|_2 + M_2 e^{m_2(T-a)}\tilde{L}_H(n+1)[1+(T-a)^\omega]\int_a^t (t-s)^{-\omega}\|b(s)\|_2\,ds$$

$$= M_2 e^{m_2(T-a)}\|Y\|_2 + M_2 e^{m_2(T-a)}\tilde{L}_H(n+1)[1+(T-a)^\omega]\Gamma(1-\omega)[I_a^{1-\omega}(\|b(.)\|_2)](t),$$

где константа во втором члене возникает из-за использования (3.5) для $(t-s) < 1$ и (4.3) для $(t-s) > 1$.

Значит, b^k можно оценить с помощью (2.4):

$$\|b^k(t)\|_2 \le cE_{1-\omega}(\lambda(t-a)^{1-\omega}) + \lambda^k \frac{(t-a)^{k(1-\omega)}}{\Gamma(k(1-\omega))}\|Y\|_2,$$

где $c = M_2 e^{m_2(T-a)}\|Y\|_2$, $\lambda = M_2 e^{m_2(T-a)}\tilde{L}_H(n+1)[1+(T-a)^\omega]\Gamma(1-\omega)$. Отметим, что мы применяем оценку (2.4) не к самому отображению Φ, а к соответствующим нормам. Отсюда вытекает, что $\|b^k(t)\|_2$ равномерно ограничены по k.

Следовательно, все $b^k(t)$ для $t \le T$ принадлежат некоторому шару B_2^R. С другой стороны, поскольку итерации сходятся в B_1 (по теореме 2), то предельная кривая $b(t)$ принадлежит $\bar{B}_2^R$, и соответственно, согласно условиям теоремы все $D_j b(t)$ принадлежат $\bar{B}_1^R$; таким образом, $b(t) = [\Phi_Y(b(.))](t)$ принадлежат B_2.

Зная, что $b(t) \in B_2$ и равномерно ограничена в B_2, можно доказать прямым дифференцированием уравнения (3.6), что $b(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1). □

6. Обобщенные дробные уравнения

Для решения задач (1.3) нужны обобщения функций Миттаг-Леффлера, введенные в [7; 15]. А именно из этих работ следует, что мягкая форма уравнения (1.3) представляет собой интегральное уравнение

$$b(t) = E_{(\nu),t-a}(A)Y + \int_0^{t-a} U_{-A}^{(\nu)}(ds)H(t-s,b(t-s),Db(t-s)), \tag{6.1}$$

где обобщенная операторнозначная функция Миттаг-Леффлера определяется как

$$E_{(\nu),x}(A) = \int_0^\infty e^{At}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_z^\infty G_{(\nu)}(t,dy)\Big)dt,$$

а потенциальная мера задается уравнением $U_{-A}^{(\nu)}(M) = \int_0^\infty e^{At}G_{(\nu)}(t,M)\,dt$. Здесь $G_{(\nu)}(t,dy)$ — функция Грина задачи Коши для обобщенного дробного оператора $D^{(\nu)}$.

Из принципа сравнения (см. утверждение 8.6.2 из [15]) следует, что если выполняется

$$\nu(dy) \geq C_\nu y^{-1-\beta} dy \tag{6.2}$$

для некоторого $\beta \in (0,1), C > 0$, то и потенциальная мера, и обобщенные функции Миттаг-Леффлера ограничены соответствующими объектами из обычного дробного уравнения D^β, и, значит, при этом условии все приведенные выше результаты автоматически распространяются на уравнения (1.3), так что выполняется следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть мера $\nu(dy)$ на $\{y\colon y > 0\}$ удовлетворяет условию* (1.4) *и имеет нижнюю границу β-дробного типа* (6.2) *с некоторым $\beta \in (0,1), C_\nu > 0$. Пусть выполнены условия* (A) *и свойство гладкости* (3.4). *Тогда уравнение* (6.1) *корректно в B_1, т. е. для любого $Y \in B_1$ существует его единственное глобальное мягкое решение $b(t) = b(t;Y) \in B_1$, которое липшиц-непрерывно зависит от начальных данных Y, так что выполняется*

$$\sup_{t\in[a,T]} \|b(t;Y) - b(t;\tilde{Y})\|_1 \leq K^{(\nu)} \|Y - \tilde{Y}\|_1$$

с постоянной $K^{(\nu)}$, зависящей от $(T-a)$ и всех констант, входящих в условия теоремы.

При выполнении условий (B), (C) *и условий сглаживания* (3.4), (3.5) *мягкое решение уравнения* (6.1) *становится классическим решением уравнения* (1.3).

Благодарности. Авторы благодарны рецензенту за внимательное прочтение статьи и за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Atanackovic T., Dolicanin D., Pilipovic S., Stankovic B.** Cauchy problems for some classes of linear fractional differential equations // Fract. Calc. Appl. Anal. 2014. Vol. 17, no. 4. P. 1039–1059. doi: 10.2478/s13540-014-0213-1 .
2. **Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trujillo J.J.** Fractional calculus: Models and numerical methods. Second edition. Singapore: World Scientific, 2016. 476 p. (Ser. on Complexity, Nonlinearity and Chaos; vol. 5.) doi: 10.1142/10044 .
3. **Barbu V., Da Prato G.** Hamilton–Jacobi Equations in Hilbert spaces. London: Pitman, 1983. 172 p. (Research Notes in Math. Ser.; vol. 86.)
4. **Crandall M. G., Lions P.-L.** Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42. doi: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8 .
5. **Crisan D. McMurray E.** Smoothing properties of McKean–Vlasov SDEs // Probab. Theory Related Fields. 2018. Vol. 171, no. 1-2. P. 97–148. doi: 10.1007/s00440-017-0774-0 .
6. **Dawson D., Vaillancourt J.** Stochastic McKean–Vlasov equations // NoDEA, Nonlinear Differ. Equ. Appl. 1995. Vol. 2, no. 2. P. 199–229.
7. **Hernandez-Hernandez M.E., Kolokoltsov V. N., Toniazzi L.** Generalized fractional evolution of Caputo type // Chaos Solitons Fractals. 2017. Vol. 102. P. 184–196. doi: 10.1016/j.chaos.2017.05.005 .
8. **Kilbas A.** Hadamard-type fractional calculus // J. Korean Math. Soc. 2001. Vol. 38, no. 6. P. 1191–1204.
9. **Kiryakova V.** Generalized fractional calculus and applications. Harlow; NY: Longman Scientific & Technical, 1993. 388 p. (Pitman Research Notes in Math. Ser.; vol. 301.)
10. **Kochubei A.N., Kondratiev Y.** Fractional kinetic hierarchies and intermittency // Kinet. Relat. Models. 2017. Vol. 10, iss. 3. P. 725–740. doi: 10.3934/krm.2017029 .
11. **Kochubei A., Luchko Yu.** Handbook of fractional calculus with applications. Fractional differential equations. Vol. 2. Berlin; Boston: De Gruyter, 2019. 519 p. doi: 10.1515/9783110571660 .
12. **Kolokoltsov V.N.** Generalized continuous-time random walks, subordination by hitting times, and fractional dynamics // Theory of Probability & Its Applications. 2009. Vol. 53, no. 4. P. 594–609. doi: 10.1137/S0040585X97983857 .
13. **Kolokoltsov V.N.** Nonlinear Markov processes and kinetic equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010. 375 p. (Cambridge Tracks in Math.; vol. 182.)

14. **Kolokoltsov V.N.** On fully mixed and multidimensional extensions of the Caputo and Riemann–Liouville derivatives, related Markov processes and fractional differential equations // Fract. Calc. Appl. Anal. 2015. Vol. 18, no. 4. P. 1039–1073. doi: 10.1515/fca-2015-0060 . URL: http://arxiv.org/abs/1501.03925 .
15. **Kolokoltsov V.N.** Differential equations on measures and functional spaces. Birkhäuser: Birkhäuser Advanced Texts, 2019. 536 p. doi: 10.1007/978-3-030-03377-4 .
16. **Kolokoltsov V.N., Troeva M.** Regularity and Sensitivity for McKean–Vlasov type SPDEs generated by stable-like processes // Probl. Anal. Issues Anal. 2018. Vol. 7(25), no. 2. P. 69–81. doi: 10.15393/j3.art.2018.5250 .
17. **Kolokoltsov V.N., Troeva M.** On mean field games with common noise and McKean–Vlasov SPDEs // Stoch. Anal. Appl. 2019. Vol. 37, no. 4. P. 522–549. doi: 10.1080/07362994.2019.1592690 .
18. **Kolokoltsov V.N., Troeva M.** Abstract McKean–Vlasov and HJB equations, their fractional versions and related forward-backward systems on Riemannian manifolds. 2021. 23 p. URL: https://arxiv.org/abs/2103.05359 .
19. **Kolokoltsov V.N., Veretennikova M.** Fractional Hamilton Jacobi Bellman equations for scaled limits of controlled Continuous Time Random Walks // Commun. Appl. Ind. Math. 2014. Vol. 6, no. 1, art. no. e-484. doi: 10.1685/journal.caim.484 .
20. **Kolokoltsov V.N., Veretennikova M.** Well-posedness and regularity of the Cauchy problem for nonlinear fractional in time and space equations // Fract. Differ. Calc. 2014. Vol. 4, no. 1. P. 1–30. doi: 10.7153/fdc-04-01 . URL: https://arxiv.org/abs/1402.6735 .
21. **Krasovskii N. N., Subbotin A. I.** Game-theoretical control problems. NY: Springer, 1988. 517 p.
22. **Kurtz Th., Xiong J.** Particle representations for a class of nonlinear SPDEs // Stochastic Process. Appl., 1999. Vol. 83, no. 1. P. 103–126. doi: 10.1016/S0304-4149(99)00024-1 .
23. **Leonenko N.N., Meerschaert M.M., Sikorskii A.** Correlation structure of fractional Pearson diffusions // Comput. Math. Appl. 2013. Vol. 66, no. 5. P. 737–745. doi: 10.1016/j.camwa.2013.01.009 .
24. **Meerschaert M., Nane E., Vellaisamy P.** Fractional Cauchy problems on bounded domains // The Annals of Probability. 2009. Vol. 37, no. 3. P. 979–1007. doi:10.1214/08-AOP426 .
25. **Псху А.В.** Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 4. С. 111–122.
26. **Podlubny I.** Fractional differential equations, An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. San Diego: Acad. Press, 1999. 340 p. (Math. Sci. Eng.; vol. 198.)
27. **Subbotin A.I.** Generalized solutions of first order PDEs. The Dynamical optimization perspective. Boston: Birkhäuser, 1995. 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 .
28. **Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г.** Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2013. 244с.
29. **Tarasov V.E.** Fractional dynamics. Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 505 p. (Nonlinear Physical Science). doi: 10.1007/978-3-642-14003-7 .
30. **Uchaikin V.V.** Fractional derivatives for physicists and engineers. Berlin; Heidelberg: Springer, 2013. doi: 10.1007/978-3-642-33911-0 .
31. **Veretennikov A.Yu.** On ergodic measures for McKean–Vlasov stochastic equations // Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods / eds. H. Niederreiter, D. Talay. 2004. Berlin; Heidelberg: Springer, 2006. P. 471–486. doi: 10.1007/3-540-31186-6_29 .
32. **Zhou У.** Fractional evolution equations and inclusions: analysis and control. London: Elsevier, 2016. 294 p.

Поступила 30.04.2021
После доработки 21.06.2021
Принята к публикации 19.07.2021

Колокольцов Василий Никитич
д-р физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник
Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”
г. Москва;
Санкт-Петербургский государственный университет

г. Санкт-Петербург;
Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН
г. Москва
e-mail: kolokoltsov59@mail.ru

Троева Марианна Степановна
канд. физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
НИИ математики, Северо-Восточный федеральный университет
г. Якутск
e-mail: troeva@mail.ru

REFERENCES

1. Atanackovic T., Dolicanin D., Pilipovic S., Stankovic B. Cauchy problems for some classes of linear fractional differential equations. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2014, vol. 17, no. 4, pp. 1039–1059. doi: 10.2478/s13540-014-0213-1 .
2. Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trujillo J.J. *Fractional calculus: Models and numerical methods*, Second edition, Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos, vol. 5, Singapore: World Scientific, 2016, 476 p. doi: 10.1142/10044 .
3. Barbu V., Da Prato G. *Hamilton–Jacobi equations in Hilbert spaces.* Research Notes in Mathematics Series, vol. 86, London: Pitman, 1983, 172 p. ISBN: 0273085972 .
4. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 277, no. 1, pp. 1–42. doi: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8 .
5. Crisan D. McMurray E. Smoothing properties of McKean–Vlasov SDEs. *Probab. Theory Relat. Fields*, 2018, vol. 171, no. 1-2, pp. 97–148. doi: 10.1007/s00440-017-0774-0 .
6. Dawson D., Vaillancourt J. Stochastic McKean–Vlasov equations. *NoDEA, Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 1995, vol. 2, no. 2, pp. 199–229. doi: 10.1007/BF01295311 .
7. Hernandez-Hernandez M.E., Kolokoltsov V. N., Toniazzi L. Generalised fractional evolution equations of Caputo type. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2017, vol. 102, pp. 184–196. doi: 10.1016/j.chaos.2017.05.005 .
8. Kilbas A. Hadamard-type fractional calculus. *J. Korean Math. Soc.*, 2001, vol. 38, no. 6, pp. 1191–1204.
9. Kiryakova V. *Generalized fractional calculus and applications.* Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 301. Harlow; NY: Longman Scientific & Technical, 1993, 388 p. ISBN: 0582219779 .
10. Kochubei A.N., Kondratiev Y. Fractional kinetic hierarchies and intermittency. *Kinetic & Related Models*, 2017, vol. 10, no. 3, pp. 725–740. doi: 10.3934/krm.2017029 .
11. Kochubei A., Luchko Y. *Handbook of fractional calculus with applications: Fractional differential equations*, Vol. 2. Berlin; Boston: De Gruyter, 2019, 519 p. doi: 10.1515/9783110571660 .
12. Kolokoltsov V.N. Generalized continuous-time random walks, subordination by hitting times, and fractional dynamics. *Theory of Probability & Its Applications*, 2009, vol. 53, no. 4, pp. 594–609. doi: 10.1137/S0040585X97983857 .
13. Kolokoltsov V.N. *Nonlinear Markov processes and kinetic equations.* Cambridge Tracks in Mathematics, vol. 182, Cambridge Univ. Press, 2010, 375 p. ISBN: 978-0-521-11184-3 .
14. Kolokoltsov V.N. On fully mixed and multidimensional extensions of the Caputo and Riemann-Liouville derivatives, related Markov processes and fractional differential equations. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2015, vol. 18, no. 4, pp. 1039–1073. doi: 10.1515/fca-2015-0060 . Available on: http://arxiv.org/abs/1501.03925 .
15. Kolokoltsov V.N. *Differential equations on measures and functional spaces.* Birkhäuser: Birkhäuser Advanced Texts, 2019, 536 p. doi: 10.1007/978-3-030-03377-4 .
16. Kolokoltsov V.N., Troeva M.S. Regularity and sensitivity for McKean–Vlasov type SPDEs generated by stable-like processes. *Probl. Anal. Issues Anal.*, 2018, vol. 7(25), no. 2, pp. 69–81. doi: 10.15393/j3.art.2018.5250 .
17. Kolokoltsov V.N., Troeva M. On mean field games with common noise and McKean–Vlasov SPDEs. *Stochastic Anal. Appl.*, 2019, vol. 37, no. 4, pp. 522–549. doi: 10.1080/07362994.2019.1592690 .
18. Kolokoltsov V.N., Troeva M. Abstract McKean–Vlasov and HJB equations, their fractional versions and related forward-backward systems on Riemannian manifolds. *arXiv*:2103.05359 [math.DS]. 23 p. Available on: https://arxiv.org/abs/2103.05359 .

19. Kolokoltsov V.N., Veretennikova M.A. A fractional Hamilton Jacobi Bellman equation for scaled limits of controlled continuous time random walks. *Commun. Appl. Ind. Math.*, 2014, vol. 6, no. 1, art. no. e-484. doi: 10.1685/journal.caim.484 .
20. Kolokoltsov V.N., Veretennikova M.A. Well-posedness and regularity of the Cauchy problem for nonlinear fractional in time and space equations. *Fract. Differ. Calc.*, 2014, vol. 4, no. 1, pp. 1–30. doi: 10.7153/fdc-04-01 . Available on: https://arxiv.org/abs/1402.6735 .
21. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* NY: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 .
22. Kurtz Th., Xiong J. Particle representations for a class of nonlinear SPDEs. *Stochastic Processes Appl.*, 1999, vol. 83, no. 1, pp. 103–126. doi: 10.1016/S0304-4149(99)00024-1 .
23. Leonenko N.N., Meerschaert M.M., Sikorskii A. Correlation structure of fractional pearson diffusions. *Comput. Math. Appl.*, 2013, vol. 66, no. 5, pp. 737–745. doi: 10.1016/j.camwa.2013.01.009 .
24. Meerschaert M.M., Nane E., Vellaisamy P. Fractional Cauchy problems on bounded domains. *Ann. Probab.*, 2009, vol. 37, no. 3, pp. 979–1007. doi: 10.1214/08-AOP426 .
25. Pskhu A.V. Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order. *Sb. Math.*, 2011, vol. 202, no. 4, pp. 571–582. doi: 10.1070/SM2011v202n04ABEH004156 .
26. Podlubny I. *Fractional differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications.* Mathematics in Science and Engineering, vol. 198. San Diego: Acad. Press, 1999, 340 p. ISBN: 0125588402 .
27. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first order PDEs. The dynamical optimization perspective.* Boston: Birkhauser, 1995, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 .
28. Subbotina N.N., Kolpakova E.A., Tokmantsev T.B., Shagalova L.G. *Metod kharakteristik dlya uravneniya Gamil'tona–Yakobi–Bellmana* [The method of characteristics for Hamilton–Jacobi–Bellman equations], Yekaterinburg: UrO RAN Publ., 2013, 244 p. ISBN: 978-5-7691-2351-1 .
29. Tarasov V.E. *Fractional dynamics. Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media.* Ser. Nonlinear Physical Science, Berlin; Heidelberg: Springer, Verlag, 2011. 505 p. doi: 10.1007/978-3-642-14003-7 .
30. Uchaikin V.V. *Fractional derivatives for physicists and engineers.* Berlin; Heidelberg: Springer, 2013. doi: 10.1007/978-3-642-33911-0 .
31. Veretennikov A.Yu. On ergodic measures for McKean-Vlasov stochastic equations. In: Niederreiter H., Talay D. (eds), *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2004*, Berlin; Heidelberg: Springer, 2006, pp. 471–486. doi: 10.1007/3-540-31186-6_29 .
32. Zhou Y. *Fractional evolution equations and inclusions: Analysis and control.* London: Elsevier, 2016, 294 p. ISBN: 9780128047750 .

Received April 30, 2021
Revised June 21, 2021
Accepted July 19, 2021

Funding Agency: The work of V. N. Kolokoltsov (Sections 1, 4, and 5) was supported by the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20119), and the work of M. S. Troeva (Sections 2, 3, and 6) was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. FSRG-2020-0006).

Vassili Nikitich Kolokoltsov, Dr. Phys.-Math. Sci., National Research University Higher School of Economics, Moscow, 109028 Russia; Saint-Petersburg State University, Saint Petersburg, 198504 Russia; Federal Research Center "Computer Science and Control", RAS, Moscow, 119333 Russia, e-mail: kolokoltsov59@mail.ru .

Marianna Stepanovna Troeva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Research Institute of Mathematics, North-Eastern Federal University, Yakutsk, 677000 Russia, e-mail: troeva@mail.ru .

Cite this article as: V. N. Kolokoltsov, M. S. Troeva. Fractional McKean–Vlasov and HJB–Isaacs equations, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 87–100 .